Lubin-Tate 理論入門

吉田輝義*

概 要

主に Iwasawa [3] に従って Lubin-Tate 理論を紹介する．

1　序論

本稿では，主に Iwasawa [3] の III-VI 章に従い，局所類体論の一部である次の定理を証明する：

定理 1.1（定理 5.9） 局所体 K に対し，K のある Abel 拡大体 K^{LT} が存在し，次の性質で特徴づけられる単射準同形 $\mathrm{Art}_K : K^\times \to \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{LT}}/K)$ が唯一つ定まる：

(i) K の任意の素元 π に対し，$\mathrm{Art}_K(\pi)|_{K^{\mathrm{ur}}} = \mathrm{Frob}_K$.

(ii) K^{LT} に含まれる任意の有限次完全分岐拡大 K'/K に対し，$\mathrm{Art}_K(N_{K'/K}(K'^\times))|_{K'} = \mathrm{id}$.

さらに，Art_K の像は $W_K^{\mathrm{LT}} := \{\sigma \in \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{LT}}/K) \mid \sigma|_{K^{\mathrm{ur}}} \in \mathrm{Frob}_K^{\mathbb{Z}}\}$ である．

予備知識としては，Galois 理論（円分拡大・有限体・無限次拡大を含む）および 7 節にまとめた基礎的な可換環論のみを仮定する．3 節では素元を一つ固定して Lubin-Tate 拡大・Artin 写像を構成する．これは $\mathbb{Q}_p$ 上の円分拡大の直接の拡張である．4 節では，前節の構成が素元に依らないことを示す．5 節ではノルム作用素を用いてノルム群（ノルム写像の像）を計算し，これによって分岐拡大に対する base change（定理 5.8）を証明する．

本稿では，とくに断らなければ環といえば単位元をもつ可換環を指す．環 A に対し，$A^\times$ でその単元群（単元のなす乗法群）を表す．体 F に対しては普通，その代数的閉包 $\overline{F}$ を固定して F の代数拡大は $\overline{F}$ の部分体と考える．体の有限次拡大 F'/F に対してノルム写像を $N_{F'/F} : F'^\times \to F^\times$ で表す．本稿で現れる体はすべて完全体である．F の標数で割れない $n \geq 1$ に対し $X^n - 1$ の F 上の分解体を $F(\boldsymbol{\mu}_n)$ で表し（**円分拡大**），これは Galois 群が自然に $(\mathbb{Z}/(n))^\times$ に単射で入るような Abel 拡大になる．$\boldsymbol{\mu}_n$ で $X^n - 1$ の根の全体を表す．$\mathbb{F}_q$ で元の個数が q 個の有限体を表す．各 $f \geq 1$ に対して $\mathbb{F}_{q^f} = \mathbb{F}_q(\boldsymbol{\mu}_{q^f-1})$ である．$\widehat{\mathbb{Z}} := \varprojlim_n \mathbb{Z}/(n)$ で $n \mid n'$ に対する標準全射 $\mathbb{Z}/(n') \to \mathbb{Z}/(n)$ に関する逆極限（$\mathbb{Z}$ の**副有限完備化**）を表すと，$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ は，q 乗 Frobenius 写像 $x \mapsto x^q$ を 1 に写す写像により $\widehat{\mathbb{Z}}$ に同形である．

*京都大学大学院理学研究科 / Harvard University. teruyoshi@gmail.com, yoshida@math.harvard.edu

2　局所体・形式群則

2.1　局所体（7 節参照）

p を素数とし，$\mathbb{Z}_p := \varprojlim_m \mathbb{Z}/(p^m)$ を p **進整数環**とする．これは (p) を極大イデアルとする CDVR（完備離散付値環）である．$\mathbb{Z}_p$ の商体が $\mathbb{Q}_p$（p **進体**）である．本稿では，**局所体**とは $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大を指す（本稿を通して，素数 p は動かない）．局所体 K に対し，$\mathbb{Z}_p$ の K での整閉包を $\mathcal{O}_K$ で表し，K の**整数環**という．これはまた CDVR となり（命題 7.1(i)），その極大イデアルを $\mathfrak{p} := \mathfrak{p}_K$ で表す．$k := \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ を K の**剰余体**という．k は $\mathbb{Q}_p$ の剰余体 $\mathbb{F}_p$ の有限次拡大だから，$k \cong \mathbb{F}_q$（q は p のべき）．$\mathfrak{p}$ の生成元を K の**素元**という．素元 π を一つ固定するたびに，Abel 群の同形：

$$\mathcal{O}_K^\times \times \mathbb{Z} \ni (u, b) \overset{\cong}{\longmapsto} u \cdot \pi^b \in K^\times$$

が定まる．第二射影（**付値**）$v_K : K^\times \to \mathbb{Z}$ は π の選び方に依らず，$\mathcal{O}_K = \{x \in K \mid v_K(x) \geq 0\}$.

K'/K を局所体の有限次拡大とする．$\mathcal{O}_{K'}$ は $\mathcal{O}_K$ の K' での整閉包であり，K' の剰余体 k' は k の有限次拡大である．K'/K の**分岐指数** $e = e(K'/K)$，**剰余次数** $f = f(K'/K)$ を次で定める：

$$\mathfrak{p}\mathcal{O}_{K'} = \mathfrak{p}_{K'}^e, \quad [k' : k] = f$$

このとき，(1) $[K' : K] = ef$，(2) $v_{K'}(x) = ev_K(x)$ $(\forall x \in K)$，(3) $v_K(N_{K'/K}(x)) = fv_{K'}(x)$ $(\forall x \in K'^\times)$．$e = 1$ のとき K'/K を**不分岐拡大**，$f = 1$ のとき K'/K を**完全分岐拡大**という．さらに K''/K' を有限次拡大とすると，$e(K''/K) = e(K''/K')e(K'/K)$，$f(K''/K) = f(K''/K')f(K'/K)$ である．従って，K'/K が不分岐で K''/K が完全分岐ならば $K' \cap K''/K$ は不分岐かつ完全分岐，すなわち $K' \cap K'' = K$ である．

局所体の不分岐拡大は，次の補題（証明は 7 節）から完全に分かる：

補題 2.1（Hensel の補題） $(p, n) = 1$ なる $n \geq 1$ に対し，$\boldsymbol{\mu}_n \subset k \iff \boldsymbol{\mu}_n \subset K$.

各 $f \geq 1$ に対して $K_f := K(\boldsymbol{\mu}_{q^f-1})$ とおくと K_f/K は不分岐（命題 7.2）で，剰余体を k_f とおくと上の補題より $\mathbb{F}_{q^f} \subset k_f$．同形 $\mathrm{Gal}(K_f/K) \cong \mathrm{Gal}(k_f/\mathbb{F}_q)$ により，$\mathrm{Gal}(k_f/\mathbb{F}_q)$ の元は $\boldsymbol{\mu}_{q^f-1}$ への作用によって決まるから，$k_f = \mathbb{F}_q(\boldsymbol{\mu}_{q^f-1}) = \mathbb{F}_{q^f}$ となり K_f/K は f 次拡大である．逆に K'/K を f 次不分岐拡大とすると，K' の剰余体は $\mathbb{F}_{q^f}$ だから補題より $\boldsymbol{\mu}_{q^f-1} \subset K'$ で，拡大次数を比較して $K' = K_f$ を得る．$f \mid f'$ なら $K_f \subset K_{f'}$ だから，K のすべての不分岐拡大の合併集合 $K^{\mathrm{ur}} := \bigcup_{f \geq 1} K_f$ は K の無限次 Galois 拡大体になり（K の**最大不分岐拡大**），上の同形写像の極限を取って，同形写像

$$\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ur}}/K) \xrightarrow{\cong} \varprojlim_f \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^f}/\mathbb{F}_q) \cong \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q) \xrightarrow{\cong} \widehat{\mathbb{Z}}$$

を得る．$1 \in \widehat{\mathbb{Z}}$ に写る元としては，$\overline{\mathbb{F}}_q$ の q 乗 Frobenius 写像に写る元 φ（**数論的 Frobenius 写像**），またはその逆写像（**幾何的 Frobenius 写像**）Frob_K を取る．任意の有限次拡大 K'/K に対し，$K'/K' \cap K^{\mathrm{ur}}$ は完全分岐で，$K' \cap K^{\mathrm{ur}}/K$ は不分岐である．

2.2　形式群則

本小節では A を零環でない環とする．A 上の 1 変数形式的べき級数環 $A[[X]] := \varprojlim_m A[X]/(X^m)$ の中で定数項が 0 であるような元全体のなすイデアル $(X) \subset A[[X]]$ は，合成 $f \circ g := f(g(X))$ に関して X を単位元とする半群をなす．f における X の係数が A の単元であるときに限り，$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = X$ をみたす f^{-1} が存在する．また，$f \in (X) \subset A[[X]]$ および多変数のべき級数 $F \in A[[X_1, \ldots, X_n]]$ に対しても，次のような記号を用いる：

$$f \circ F := f(F(X_1, \ldots, X_n)), \quad F \circ f := F(f(X_1), \ldots, f(X_n)) \in A[[X_1, \ldots, X_n]].$$

定義 2.2 A 上の**形式群則** (formal group law over A) とは，A 上の 2 変数形式的べき級数 $F(X, Y) \in A[[X, Y]]$ であって，次の条件をみたすものである[1]：

(i) $F(X, Y) \equiv X + Y \bmod \deg 2$.

(ii) $F(F(X, Y), Z) = F(X, F(Y, Z))$.

(iii) $F(X, Y) = F(Y, X)$.

基本的な例として，**加法群** $\widehat{\mathbb{G}}_a(X, Y) := X + Y$ や**乗法群** $\widehat{\mathbb{G}}_m(X, Y) := X + Y + XY$ がある．

F を環 A 上の形式群則とする．$f(X) := F(X, 0)$ とおくと，(i) より $f(X) \equiv X \pmod{\deg 2}$ なので，f^{-1} が存在する．(ii) より $f \circ f = f$ だから，f^{-1} を合成して $f(X) = X$ を得る．同様に $F(0, Y) = Y$ だから，F は 1 次の項 $X + Y$ 以外には X または Y のみからなる項を持たない．よって，$F(X, Y) = 0$ を Y に関して解くことができて，$F(X, i_F(X)) = 0$ をみたすような $i_F(X) \in A[[X]]$ が一意に定まる．そこで，イデアル $(X) \subset A[[X]]$ に加法を

$$f +_F g := F(f(X), g(X))$$

と定義すると，0 を零元とする Abel 群をなす（f の逆元は $i_F \circ f$ で与えられる）.

定義 2.3 F, G を環 A 上の形式群則とする．A 上の形式的べき級数 $f(X) \in (X) \subset A[[X]]$ で，

$$f \circ F = G \circ f, \quad \text{i.e.} \quad f(F(X, Y)) = G(f(X), f(Y))$$

をみたすものを F から G への**準同形** (homomorphism) といい，$f : F \to G$ と表す．二つの準同形の合成はべき級数の合成で定義され，$f(X) = X$ が恒等射 $\mathrm{id} : F \to F$ を定める．もし f^{-1} が存在すれば，これは $f^{-1} : G \to F$ を定め $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ をみたす．このとき f は**同形** (isomorphism) であるといい，$f : F \xrightarrow{\cong} G$ と表す．F から G への準同形全体の集合 $\mathrm{Hom}_A(F, G)$ は，$+_G$ によって Abel 群をなす．さらに，$\mathrm{End}_A(F) := \mathrm{Hom}_A(F, F)$ は，$+_F$ を加法，合成を乗法と定めることで，可換とは限らない環をなす．

[1] 上に定義したものは，正確には可換 1 次元形式群則と呼ばれるものであるが，本稿ではこの場合しか用いないので単に形式群則と呼ぶ．また，[3] では形式群則ではなく単に「形式群」と呼ばれているが，他の文献では「形式群」は形式群則の同形類（**形式群スキーム**）を指すことが多い．本稿では以下同形類ではなく形式群則そのもの（べき級数）について述べることが多い．

3　$\mathcal{O}_K$ 上の Lubin-Tate 群：Artin 写像の構成

再び 2.1 節の記号に戻り，K を局所体，$\mathcal{O}_K$ をその整数環，その極大イデアルを $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_K$，剰余体の標数を $p = \mathrm{char}(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})$，位数を $q = |\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}|$ とする．**本節では，K の素元 π を固定する**．

3.1　$\mathcal{O}_K$ 上の Lubin-Tate 群

3.1.1　存在

命題 3.1 $f \in \mathcal{O}_K[[X]]$ を，次の二つの条件をみたすべき級数とする：

$$f(X) \equiv \pi X \pmod{\deg 2}, \qquad f(X) \equiv X^q \pmod{\mathfrak{p}}. \tag{1}$$

(i) このとき，$\mathcal{O}_K$ 上の形式群則 F_f で $f \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(F_f)$ となるようなものが唯一つ存在する．

(ii) さらに，$\forall a \in \mathcal{O}_K$ に対して，$[a]_f(X) \equiv aX \pmod{\deg 2}$ かつ $f \circ [a]_f = [a]_f \circ f$ となるような $[a]_f \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(F_f)$ が一意に定まる（とくに $[\pi]_f = f$）．これは単射環準同形 $[\cdot]_f : \mathcal{O}_K \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(F_f)$ を与える．

まず，次の補題を用意する．

補題 3.2 $f, f' \in \mathcal{O}_K[[X]]$ はともに (1) をみたすものとする．有限個の $\mathcal{O}_K$ の元 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{O}_K$ に対して，次をみたすような $F \in \mathcal{O}_K[[X_1, \ldots, X_n]]$ が唯一つ存在する：

$$F \equiv \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n \pmod{\deg 2}, \qquad f' \circ F = F \circ f.$$

証明　各 m に対し上の条件を $\mathrm{mod}\,\deg(m+1)$ でみたすような次数 m 以下の多項式 F_m が一意に定まることを示せばよい．$m = 1$ のときは条件より明らかだから，m に関する帰納法で示す．F_m まで求まったとして，$G_{m+1} := f' \circ F_m - F_m \circ f$ とおくと，$G_{m+1} \equiv F_m^q - F_m(X_1^q, \ldots, X_n^q) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ だからその係数は π で割れる．次数 $m+1$ の斉次多項式 $H_{m+1} := F_{m+1} - F_m$ が一意に定まることを示す．条件より $f' \circ F_{m+1} - F_{m+1} \circ f = G_{m+1} + (f' \circ H_{m+1} - H_{m+1} \circ f) \equiv G_{m+1} + (\pi H_{m+1} - \pi^{m+1} H_{m+1}) = 0 \pmod{\deg(m+2)}$ である．全次数 $m+1$ の単項式を任意に取り，その G_{m+1} での係数を $\pi\beta$，その H_{m+1} での係数を α とすると $\pi\beta + \pi\alpha - \pi^{m+1}\alpha = 0$ だから，$\alpha = -\beta/(1-\pi^m)$ と求まる．∎

命題 3.1(i) の証明　$n = 2,\ \alpha_1 = \alpha_2 = 1$ に対して補題を適用すると，$F_f \equiv X + Y \pmod{\deg 2}$ かつ $f \circ F_f = F_f \circ f$ なる $F_f \in \mathcal{O}_K[[X, Y]]$ が一意に定まり，$F_f(Y, X)$ は同じ条件をみたすから $F_f(X, Y) = F_f(Y, X)$．また $F_f(F_f(X, Y), Z),\ F_f(X, F_f(Y, Z))$ はともに $n = 3,\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ に対する補題の条件をみたすから相等しい．よって F_f は形式群則であって $f \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(F_f)$．∎

次に，この F_f に対して：

補題 3.3 $f, f' \in \mathcal{O}_K[[X]]$ はともに (1) をみたすものとする．$\theta \in (X) \subset \mathcal{O}_K[[X]]$ に対して，

$$f' \circ \theta = \theta \circ f \Longrightarrow \theta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(F_f, F_{f'}).$$

証明　$\theta(X) \equiv aX \pmod{\deg 2}$ とする．$f' \circ \theta = \theta \circ f$ であれば，

$$f' \circ (\theta \circ F_f) = \theta \circ f \circ F_f = (\theta \circ F_f) \circ f$$
$$f' \circ (F_{f'} \circ \theta) = F_{f'} \circ f' \circ \theta = (F_{f'} \circ \theta) \circ f$$

となるから，$\theta \circ F_f$ と $F_{f'} \circ \theta$ はともに $n = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = a$ に対する補題 3.2 の条件をみたすので相等しい．すなわち $\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(F_f, F_{f'})$. ∎

命題 3.1(ii) の証明　$\forall a \in \mathcal{O}_K$ に対して，補題 3.2 を $n = 1$, $\alpha_1 = a$ に適用すれば，$[a]_f(X) \equiv aX \pmod{\deg 2}$ かつ $f \circ [a]_f = [a]_f \circ f$ なる $[a]_f \in \mathcal{O}_K[[X]]$ が一意に定まる．補題 3.3 より $[a]_f \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(F_f)$ で，$[a]_f(X) \equiv aX \pmod{\deg 2}$ より $[\cdot]_f$ は単射である．さらに，$[a]_f +_f [b]_f$ と $[a+b]_f$ はともに $n = 1$, $\alpha_1 = a + b$ に対して，$[a]_f \circ [b]_f$ と $[ab]_f$ はともに $n = 1$, $\alpha_1 = ab$ に対して補題 3.2 の条件をみたすからそれぞれ相等しい．すなわち $[\cdot]_f$ は環準同形である． ∎

3.1.2　一意性

定義 3.4　A を $\mathcal{O}_K$ 代数とする．A 上の形式群則 F と単射環準同形 $[\cdot] : \mathcal{O}_K \longrightarrow \mathrm{End}_A(F)$ の組 $(F, [\cdot])$ で，$\forall a \in \mathcal{O}_K$ に対し $[a](X) \equiv aX \pmod{\deg 2}$ をみたすものを A 上の**形式 $\mathcal{O}_K$ 加群則** (formal $\mathcal{O}_K$-module law) という．形式 $\mathcal{O}_K$ 加群則の間の**準同形** $\theta : (F, [\cdot]) \longrightarrow (F', [\cdot]')$ とは，形式群則としての準同形 $\theta : F \to F'$ で，$\mathcal{O}_K$ の作用と可換，すなわち $[a]' \circ \theta = \theta \circ [a]$ $(\forall a \in \mathcal{O}_K)$ をみたすものを指す．それらの集合を $\mathrm{Hom}_A\big((F, [\cdot]),\ (F', [\cdot]')\big)$ で表す．θ^{-1} が存在すれば，$\theta \circ [a] \circ \theta^{-1} = [a]'$ により $\theta^{-1} : (F', [\cdot]') \longrightarrow (F, [\cdot])$ を与えるから，θ を形式 $\mathcal{O}_K$ 加群則の**同形**という．

命題 3.1 により，(1) をみたす f に対して $(F_f, [\cdot]_f)$ は $\mathcal{O}_K$ 上の形式 $\mathcal{O}_K$ 加群則となる．

補題 3.5　$f, f' \in \mathcal{O}_K[[X]]$ はともに (1) をみたすものとする．$\theta \in (X) \subset \mathcal{O}_K[[X]]$ に対して：

$$f' \circ \theta = \theta \circ f \iff \theta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}\big((F_f, [\cdot]_f),\ (F_{f'}, [\cdot]_{f'})\big).$$

証明　$\Leftarrow$ は $f' = [\pi]_{f'}$, $f = [\pi]_f$ より明らか．$\Rightarrow$ は，補題 3.3 によって，$\forall a \in \mathcal{O}_K$ に対して $\theta \circ [a]_f$ と $[a]_{f'} \circ \theta$ が等しいことを示せばよいが，$\theta(X) \equiv bX \pmod{\deg 2}$ とすると，これらはともに $n = 1$, $\alpha_1 = ab$ に対する補題 3.2 の条件をみたすので相等しい． ∎

定理 3.6（$\mathcal{O}_K$ 上の Lubin-Tate 群）素元 $\pi \in \mathcal{O}_K$ に対して，$\mathcal{O}_K$ 上の形式 $\mathcal{O}_K$ 加群則 $F_\pi = (F_\pi, [\cdot])$ で $[\pi](X) \equiv X^q \pmod{\mathfrak{p}}$ をみたすものが同形を除いて唯一つ存在する[2].

---

[2] ここで，$\theta : (F, [\cdot]) \xrightarrow{\cong} (F', [\cdot]')$ を $\mathcal{O}_K$ 上の形式 $\mathcal{O}_K$ 加群則の間の同形とすると，$[\pi](X) \equiv X^q \pmod{\mathfrak{p}}$ であれば，$[\pi]'(\theta(X)) \equiv \theta([\pi](X)) \equiv \theta(X^q) \equiv \theta(X)^q \pmod{\mathfrak{p}}$ となる $(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p} \cong \mathbb{F}_q)$ から，定理の条件は同形に関して安定である．$(F_\pi, [\cdot])$ の形式 $\mathcal{O}_K$ 加群としての同形類を $\mathcal{O}_K$ 上の **Lubin-Tate 群**という．

証明　適当に命題 3.1 の (1) をみたす f に対して $(F_f, [\cdot]_f)$ を取れば，定理の条件をみたす F_π を得る．逆に，定理の条件をみたすような $(F_\pi, [\cdot])$ が与えられたとき，$f = [\pi]$ は (1) をみたすから，命題 3.1 の一意性によって $F_\pi = F_f$ かつ $[\cdot] = [\cdot]_f$ でなければならない．

よって，あとは (1) をみたすような二つの f, f' に対して，$(F_f, [\cdot]_f)$ と $(F_{f'}, [\cdot]_{f'})$ が互いに同形であることを見ればよい．補題 3.2 を $n = 1$, $\alpha_1 = 1$ に対して用いると，$\theta(X) \equiv X \pmod{\deg 2}$ かつ $f' \circ \theta = \theta \circ f$ なる $\theta \in \mathcal{O}_K[[X]]$ が一意に定まる．補題 3.5 によって $\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}\big((F_f, [\cdot]_f), (F_{f'}, [\cdot]_{f'})\big)$ で，$\theta(X) \equiv X \pmod{\deg 2}$ より θ は同形である． ∎

3.2　Lubin-Tate 拡大の構成

命題 3.7 $f \in \mathcal{O}_K[X]$ を (1) をみたすモニック（例えば $f(X) = \pi X + X^q$）とする．整数 $m \geq 1$ に対して，多項式 $[\pi^m]_f(X) = 0$ の K 上の分解体を $K(\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m})$ とし，

$$\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m} := \{\alpha \in K(\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m}) \mid [\pi^m]_f(\alpha) = 0\}$$

とおく．$[\pi^m]_f(X) \in \mathcal{O}_K[X]$ だから $\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m} \subset \mathcal{O}_{K(\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m})}$．このとき：

(i) $\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m}$ は $+_{F_f}, [\cdot]_f$ によって $\mathcal{O}_K$ 加群となり，ある $\alpha \in \boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m} \setminus \boldsymbol{\mu}_{f,\pi^{m-1}}$ をとると，次は $\mathcal{O}_K$ 加群としての同形を与える：

$$\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^m \ni a \longmapsto [a]_f(\alpha) \in \boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m}.$$

(ii) $N : K(\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m})^\times \to K^\times$ をノルム写像とすると，$N(-\alpha) = \pi$ で，$K(\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m})/K$ は完全分岐拡大であり，$-\alpha$ は $K(\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m})$ の素元である．

(iii) 次は Abel 群の同形であり，α の選び方に依らない：

$$\begin{aligned} \mathrm{Gal}(K(\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m})/K) &\xrightarrow{\cong} (\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^m)^\times \\ (\alpha \mapsto [u]_f(\alpha)) &\longmapsto u \bmod \mathfrak{p}^m \end{aligned}$$

(iv) Abel 拡大 $K(\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m})/K$ および上の同形写像は f の選び方に依らず，π と m のみで定まる．

証明　(i)-(iii) の証明では $[\cdot]_f$ の添字 f を省略する．

(i): $K' = K(\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m})$ とおくと．$\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m} \setminus \boldsymbol{\mu}_{f,\pi^{m-1}}$ は多項式 $h_m(X) := [\pi^m](X)/[\pi^{m-1}](X)$ の根全体の集合である．また $h_1(X) = f(X)/X \equiv \pi \pmod{X}$ かつ $h_1(X) \equiv X^{q-1} \pmod{\mathfrak{p}}$ で，$h_m(X) = h_1([\pi^{m-1}](X))$ だから，$h_m(X) \equiv \pi \pmod{X}$ かつ $h_m(X) \equiv X^{(q-1)q^{m-1}} \pmod{\mathfrak{p}}$．よって任意の $\alpha \in \boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m} \setminus \boldsymbol{\mu}_{f,\pi^{m-1}}$ に対し，$0 = h_m(\alpha) \equiv \alpha^{(q-1)q^{m-1}} \pmod{\mathfrak{p}\mathcal{O}_{K'}}$ だから $\alpha \notin \mathcal{O}_{K'}^\times$．ここで m も任意だったから $\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m} \subset \mathfrak{p}_{K'}$ が分かり，その元を $+_F, [\cdot]$ に代入できる．定義より明らかに $\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m}$ はこれらの演算で閉じて $\mathcal{O}_K$ 加群をなす．再び $\alpha \in \boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m} \setminus \boldsymbol{\mu}_{f,\pi^{m-1}}$ を一つ取

ると，$\mathcal{O}_K$ 準同形 $\mathcal{O}_K \ni a \mapsto [a](\alpha) \in \boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m}$ の核は $\mathfrak{p}^m$ だから命題の $\mathcal{O}_K$ 準同形は単射で，$q^m = |\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^m| \le |\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m}| \le \deg\,[\pi^m]_f = q^m$ だから $\mathcal{O}_K$ 同形である．

(ii): (i) によって $\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m} = \{[a](\alpha) \mid a \in \mathcal{O}_K\} \subset K(\alpha)$ だから $K' = K(\alpha)$ で，$[K' : K] \le \deg h_m = (q-1)q^{m-1}$．また $\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^{m-1}} = \{[a](\alpha) \mid a \in \mathfrak{p}\}$ だから $\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m} \setminus \boldsymbol{\mu}_{f,\pi^{m-1}} = \{[a](\alpha) \mid a \in (\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^m)^\times\}$ であり，h_m の定数項は π だったから，$\pi = \prod_{a\in(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^m)^\times}(-[a](\alpha))$．さて，$\alpha \notin \mathcal{O}_{K'}^\times$ でかつ $[a](\alpha) \equiv a\alpha \pmod{\alpha^2}$ だから $[a](\alpha)$ と α の付値は同じである．よって $\mathcal{O}_{K'}$ のイデアルとして $(\pi) = (\alpha)^{(q-1)q^{m-1}}$ だから $[K' : K] \ge (q-1)q^{m-1}$ で，これは等号でなくてはならない．従って K'/K は完全分岐で α は K' の素元であり，また $h_m \in \mathcal{O}_K[X]$ は K 上既約で，$\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m} \setminus \boldsymbol{\mu}_{f,\pi^{m-1}}$ は α の K 上の共役元の集合だから，$\pi = N(-\alpha)$.

(iii): $K' = K(\alpha)$ より $\mathrm{Gal}(K'/K)$ の元 σ は α の像で決まるからこれは単射で，明らかに準同形であり，$[K' : K] = |(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^m)^\times|$ だから群同形である．また，$[u] \in \mathcal{O}_K[[X]]$ は $\mathrm{Gal}(K'/K)$ の元 σ で動かないから，$\sigma(\alpha) = [u](\alpha)$ ならば $\sigma([u'](\alpha)) = [u'](\sigma(\alpha)) = [u'u](\alpha) = [u]([u'](\alpha))$ となり α の代わりに $[u'](\alpha)$ を用いても同じ写像が定まる．

(iv): 二つの f, f' に対して，定理 3.6 によって定まる $\theta : (F_f, [\cdot]_f) \xrightarrow{\cong} (F_{f'}, [\cdot]_{f'})$ は $\mathcal{O}_K$ 加群の同形 $\theta : \boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m} \to \boldsymbol{\mu}_{f',\pi^m}$ を与え，$\theta \in \mathcal{O}_K[[X]]$ だから $\boldsymbol{\mu}_{f',\pi^m} \subset K(\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m})$．同様に θ^{-1} を考えれば $K(\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m}) = K(\boldsymbol{\mu}_{f',\pi^m})$ を得る．また $\alpha \mapsto [u]_f(\alpha)$ なる K 同形は，$\theta(\alpha)$ を $\theta([u]_f(\alpha)) = [u]_{f'}(\theta(\alpha))$ に写すから，(iii) の写像も一致する． ∎

定義 3.8 上の命題の $K(\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m})$ を K_π^m で表す．$m \le m'$ ならば $K_\pi^m \subset K_\pi^{m'}$ であるから，その合併集合 $K_\pi^{\mathrm{ram}} := \bigcup_{m\ge1} K_\pi^m$ は体になり，$K_\pi^{\mathrm{LT}} := K_\pi^{\mathrm{ram}} K^{\mathrm{ur}}$ を合成体とする．

命題 3.7(iii) の同形写像を $\rho_m : \mathrm{Gal}(K_\pi^m/K) \xrightarrow{\cong} (\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^m)^\times$ と表すと，$m \le m'$ に対し，制限 $\mathrm{Gal}(K_\pi^{m'}/K) \to \mathrm{Gal}(K_\pi^m/K)$ は $\rho_{m'}, \rho_m$ によって自然な射影 $(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^{m'})^\times \to (\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^m)^\times$ に写るから，逆極限に移って，次の同形写像が定まる：

$$\rho : \mathrm{Gal}(K_\pi^{\mathrm{ram}}/K) \ni (\alpha \mapsto [u](\alpha)) \overset{\cong}{\longmapsto} u \in \mathcal{O}_K^\times$$

K_π^{ram} は完全分岐だから $K_\pi^{\mathrm{ram}} \cap K^{\mathrm{ur}} = K$ なので，次の命題を得る：

命題 3.9 次は同形写像である：

$$\begin{aligned} \mathrm{Gal}(K_\pi^{\mathrm{LT}}/K) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Gal}(K_\pi^{\mathrm{ram}}/K) \times \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ur}}/K) &\xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_K^\times \times \widehat{\mathbb{Z}} \\ \big(\alpha \mapsto [u](\alpha),\ \ \mathrm{Frob}_K^b\big) &\longmapsto (u, b) \end{aligned}$$

定義 3.10 上の命題の同形の逆写像と $K^\times \ni u \cdot \pi^b \overset{\cong}{\longmapsto} (u, b) \in \mathcal{O}_K^\times \times \mathbb{Z} \subset \mathcal{O}_K^\times \times \widehat{\mathbb{Z}}$ を合成して得られる写像を **Artin 写像** (Artin map) といい，次のように表す：

$$\mathrm{Art}_K^\pi : K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_\pi^{\mathrm{LT}}/K).$$

注意 3.11 上のように定義する理由は，次節で明らかになる．

4 $\mathcal{O}_{\widehat{K}}$ 上の Lubin-Tate 群：Artin 写像の一意性

命題 4.1 F を局所体 K の代数拡大で，$F/F\cap K^{\mathrm{ur}}$ が有限次拡大であるようなものとする．

(i) F での $\mathcal{O}_K$ の整閉包 $\mathcal{O}_F$ は（完備とは限らないが）DVR である．

(ii) 任意の有限次拡大 F'/F に対し，$\widehat{F'}=F'\widehat{F}$ で，$\widehat{F}\cap F'=F$，また $[\widehat{F'}:\widehat{F}]=[F':F]$.

(iii) F,F' をともにそのような体とすると，$\widehat{F}=\widehat{F'}\Longrightarrow F=F'$.

証明 $\mathcal{O}_F$ は，F に含まれる有限次拡大 K'/K に対する $\mathcal{O}_{K'}$ の合併で，包含写像はみな局所準同形[3]だから局所環である．$\mathcal{O}_{F\cap K^{\mathrm{ur}}}$ は，極大イデアルが K の素元で生成されるから DVR であり，$\mathcal{O}_F$ も DVR である．(ii) は命題 7.1(ii) から従う．(ii) より $\widehat{F}\cap\overline{K}=F$ だから (iii) が従う． ∎

$F=K^{\mathrm{ur}}$ を考えると，$\mathcal{O}_K$ の素元は $\mathcal{O}_{K^{\mathrm{ur}}}$ の素元でもあり，$\mathcal{O}_{K^{\mathrm{ur}}}/\mathfrak{p}_{K^{\mathrm{ur}}}\cong\overline{\mathbb{F}}_q$ だが，$\mathcal{O}_{K^{\mathrm{ur}}}$ は完備ではない．$\mathcal{O}_{K^{\mathrm{ur}}}$ の完備化を $\mathcal{O}_{\widehat{K}}$，その商体を $\widehat{K}$ で表す[4]．$\varphi=\mathrm{Frob}_K^{-1}\in\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ur}}/K)$ は自然に $\widehat{K}$ の自己同形に延長される．$\mathcal{O}_{\widehat{K}}$ 係数のべき級数 F に対し，係数に φ を作用させて得られるべき級数を F^{φ} と書く．本節では素元 π を動かし，Lubin-Tate 群を $\mathcal{O}_{\widehat{K}}$ 上で考える．

一般に B を A 代数とし，F を環 A 上の形式群則とすると，構造射 $A\to B$ から誘導される環準同形 $A[[X,Y]]\to B[[X,Y]]$ による F の像は B 上の形式群則をなし，これを $F\otimes_A B$ で表す．さらに $(F,[\cdot])$ が A 上の形式 $\mathcal{O}_K$ 加群則ならば，環準同形 $\mathrm{End}_A(F)\to\mathrm{End}_B(F\otimes_A B)$ と $[\cdot]$ の合成を $[\cdot]\otimes_A B$ とすると，$(F,[\cdot])\otimes_A B:=(F\otimes_A B,\ [\cdot]\otimes_A B)$ は B 上の形式 $\mathcal{O}_K$ 加群則となる．

4.1 Lubin-Tate 拡大の一意性

補題 4.2 π,π' をともに $\widehat{K}$ の素元，$f,f'\in\mathcal{O}_{\widehat{K}}[[X]]$ はそれぞれ π,π' に対して (1) をみたすとする．

(i) 有限個の元 $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathcal{O}_{\widehat{K}}$ が，$\pi'\alpha_i=\pi\alpha_i^{\varphi}$ $(1\le i\le n)$ をみたしているとする．このとき，次をみたすような $F\in\mathcal{O}_{\widehat{K}}[[X_1,\dots,X_n]]$ が唯一つ存在する：

$$F\equiv\alpha_1X_1+\cdots+\alpha_nX_n\ (\mathrm{mod}\deg 2),\qquad f'\circ F=F^{\varphi}\circ f.$$

(ii) さらに $\pi,\pi'\in K$ かつ $f,f'\in\mathcal{O}_K[[X]]$ とするとき，$\theta\in(X)\subset\mathcal{O}_{\widehat{K}}[[X]]$ に対し：

$$f'\circ\theta=\theta^{\varphi}\circ f\Longrightarrow\theta\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\widehat{K}}}\big((F_f,[\cdot]_f)\otimes\mathcal{O}_{\widehat{K}},\ (F_{f'},[\cdot]_{f'})\otimes\mathcal{O}_{\widehat{K}}\big).$$

証明 (i): 補題 3.2 の証明を修正する：各 m に対し $\mathrm{mod}\deg(m+1)$ で条件を満たす次数 m 以下の多項式 F_m を求める．$m=1$ のときは明らかで，F_m まで求まったとして，$G_{m+1}:=f'\circ F_m-F_m^{\varphi}\circ f$ とおくと，$G_{m+1}\equiv F_m^q-F_m^{\varphi}(X_1^q,\dots,X_n^q)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,\mathfrak{p}_{\widehat{K}})$ だからその係数は π' で割れる．次数 $m+1$ の斉次多項式 $H_{m+1}:=F_{m+1}-F_m$ が一意に定まることを示す．条件より $f'\circ F_{m+1}-F_{m+1}^{\varphi}\circ f=$

[3] すなわち $\phi:\mathcal{O}_{K'}\to\mathcal{O}_{K''}$ に対して $\phi(\mathfrak{p}_{K'})\subset\mathfrak{p}_{K''}$.

[4] あまりよい記号ではないが，混乱の恐れはないので容赦されたい．

$G_{m+1}+(f'\circ H_{m+1}-H^{\varphi}_{m+1}\circ f)\equiv G_{m+1}+(\pi' H_{m+1}-\pi^{m+1}H^{\varphi}_{m+1})=0\ (\mathrm{mod}\deg(m+2))$ である．全次数 $m+1$ の単項式を任意に取り，その G_{m+1} での係数を $\pi'\beta$，その H_{m+1} での係数を α とすると $\pi'\beta+\pi'\alpha-\pi^{m+1}\alpha^{\varphi}=0$ だから，$\alpha=-\beta-\sum_{i=1}^{\infty}(\pi^{m+1}/\pi')^{1+\varphi+\cdots\varphi^{i-1}}\beta^{\varphi^i}$ と求まる．

(ii): 補題 3.3・補題 3.5 と同様に示す．$\theta(X)\equiv bX\ (\mathrm{mod}\deg 2)$ とし，$f'\circ\theta=\theta^{\varphi}\circ f$ ならば，

$$f'\circ(\theta\circ F_f)=\theta^{\varphi}\circ f\circ F_f=(\theta^{\varphi}\circ F_f^{\varphi})\circ f=(\theta\circ F_f)^{\varphi}\circ f$$
$$f'\circ(F_{f'}\circ\theta)=F_{f'}^{\varphi}\circ f'\circ\theta=(F_{f'}^{\varphi}\circ\theta^{\varphi})\circ f=(F_{f'}\circ\theta)^{\varphi}\circ f$$

となるから，$\theta\circ F_f$ と $F_{f'}\circ\theta$ はともに $n=2,\ \alpha_1=\alpha_2=b$ に対する補題 4.2 の条件をみたすので相等しい．また $\forall a\in\mathcal{O}_K$ に対し，同様の計算を $F_f, F_{f'}$ の代わりに $[a]_f, [a]_{f'}$ について行えば $\theta\circ[a]_f$ と $[a]_{f'}\circ\theta$ はともに $n=1,\ \alpha_1=ab$ に対する (i) の条件をみたすので相等しい． ∎

命題 4.3 π,π' および $f,f'\in\mathcal{O}_K[[X]]$ を補題 4.2(ii) の通りとする．このとき，$\mathcal{O}_{\widehat{K}}$ 上の形式 $\mathcal{O}_K$ 加群則の同形 $\theta:(F_f,[\cdot]_f)\otimes\mathcal{O}_{\widehat{K}}\xrightarrow{\cong}(F_{f'},[\cdot]_{f'})\otimes\mathcal{O}_{\widehat{K}}$ が存在する．

証明 まず，準同形 $\mathcal{O}_{\widehat{K}}^{\times}\ni u\longmapsto u^{\varphi}/u\in\mathcal{O}_{\widehat{K}}^{\times}$ が全射であることを示す．$x\in\mathcal{O}_{\widehat{K}}^{\times}$ とすると，$\mathcal{O}_{\widehat{K}}^{\times}\cong\varprojlim_m(\mathcal{O}_{\widehat{K}}/\mathfrak{p}_{\widehat{K}}^{m+1})^{\times}$ であるから，$\forall m\geq 0$ に対し，$u_m^{\varphi}/u_m\equiv x\ (\mathrm{mod}\,\mathfrak{p}_{\widehat{K}}^{m+1})$ なる $u_m\in\mathcal{O}_{\widehat{K}}^{\times}$ の存在を示せばよい．$m=0$ のときは，$(\mathcal{O}_{\widehat{K}}/\mathfrak{p}_{\widehat{K}})^{\times}\cong\overline{\mathbb{F}}_q^{\times}$ において $u\mapsto u^{\varphi}/u=u^{q-1}$ は全射だからよい．u_m まで得たとし，K の素元 π に対し $x/(u_m^{\varphi}/u_m)=1+\alpha\pi^{m+1}$ とする．$\mathcal{O}_{\widehat{K}}/\mathfrak{p}_{\widehat{K}}\cong\overline{\mathbb{F}}_q$ で $u\mapsto u^{\varphi}-u=u^q-u$ は全射だから，$\beta^{\varphi}-\beta\equiv\alpha\ (\mathrm{mod}\,\mathfrak{p}_{\widehat{K}})$ なる $\beta\in\mathcal{O}_{\widehat{K}}$ がとれるので，$u_{m+1}=u_m(1+\beta\pi^{m+1})$ とおけば $u_{m+1}^{\varphi}/u_{m+1}\equiv x\ (\mathrm{mod}\,\mathfrak{p}_{\widehat{K}}^{m+2})$．さて，以上より $u^{\varphi}/u=\pi/\pi'$ なる $u\in\mathcal{O}_{\widehat{K}}^{\times}$ がとれるから，補題 4.2(i) を $n=1,\ \alpha_1=u$ に対して用いると，$\theta(X)\equiv uX\ (\mathrm{mod}\deg 2)$ かつ $f'\circ\theta=\theta^{\varphi}\circ f$ なる $\theta\in\mathcal{O}_{\widehat{K}}[[X]]$ が一意に定まり，補題 4.2(ii) より θ は $\mathcal{O}_{\widehat{K}}$ 上の形式 $\mathcal{O}_K$ 加群則の同形である． ∎

系 4.4（Lubin-Tate 拡大の一意性） (i) 合成体 $K_{\pi}^{m}K^{\mathrm{ur}}$，従って K_{π}^{LT} は π の選び方に依らない（以後 $K^{\mathrm{LT}}:=K_{\pi}^{\mathrm{LT}}$ と書く）.

(ii) 同形写像 $\mathrm{Art}_K^{\pi}|_{\mathcal{O}_K^{\times}}:\mathcal{O}_K^{\times}\xrightarrow{\cong}\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{LT}}/K^{\mathrm{ur}})$ は π の選び方に依らない．

証明 (i): 二つの π,π' に対してそれぞれ $f,f'\in\mathcal{O}_K[X]$ を (1) をみたすモニックとし，命題 3.7(iv) と全く同様に考える．命題 4.3 の θ は，$\mathcal{O}_K$ 加群の同形 $\theta:\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m}\to\boldsymbol{\mu}_{f',\pi'^m}$ を与える．$\theta\in\mathcal{O}_{\widehat{K}}[[X]]$ によりこの同形は体の $\widehat{K}$ 同形 $\theta:\widehat{K}(\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m})\to\widehat{K}(\boldsymbol{\mu}_{f',\pi^m})$ を与え，$\theta\in\mathcal{O}_{\widehat{K}}[[X]]$ だから $\boldsymbol{\mu}_{f',\pi^m}\subset\widehat{K}(\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m})$．同様に θ^{-1} を考えれば $\widehat{K}(\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m})=\widehat{K}(\boldsymbol{\mu}_{f',\pi^m})$，すなわち $K_{\pi}^{m}\widehat{K}=K_{\pi'}^{m}\widehat{K}$．命題 4.1(ii) より $\widehat{K_{\pi}^{m}K^{\mathrm{ur}}}=K_{\pi}^{m}\widehat{K}$ だから，命題 4.1(iii) より $K_{\pi}^{m}K^{\mathrm{ur}}=K_{\pi'}^{m}K^{\mathrm{ur}}$.

(ii): 命題 4.1(ii) および $K^{\mathrm{ur}}\cap K_{\pi}^{m}=K$ より，自然な制限写像で：

$$\mathrm{Gal}(K_{\pi}^{m}\widehat{K}/\widehat{K})\xrightarrow{\cong}\mathrm{Gal}(K_{\pi}^{m}K^{\mathrm{ur}}/K^{\mathrm{ur}})\xrightarrow{\cong}\mathrm{Gal}(K_{\pi}^{m}/K)\xrightarrow[\rho_m]{\cong}(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^m)^{\times}$$

だから，これの合成が π の選び方に依らないことを示せばよいが，これも命題 3.7(iv) と同様に，$\alpha\mapsto[u]_f(\alpha)$ なる $\widehat{K}$ 同形が，$\theta(\alpha)$ を $\theta([u]_f(\alpha))=[u]_{f'}(\theta(\alpha))$ に写すことから従う． ∎

4.2 Artin 写像の一意性

命題 4.5 π, π' をともに K の素元で $\pi' = u\pi$ $(u \in \mathcal{O}_K^\times)$ とし，$f, f' \in \mathcal{O}_K[[X]]$ をそれぞれ π, π' に対して (1) をみたすものとする．$\theta \in \mathcal{O}_{\widehat{K}}[[X]]$ を命題 4.3 の通りとするとき：

$$\theta^\varphi = \theta \circ [u]_f.$$

証明 θ の定義より $f' \circ \theta = \theta^\varphi \circ f$ で，$f = [\pi]_f$，$f' = [\pi']_{f'}$ だから $[\pi']_{f'} \circ \theta = \theta^\varphi \circ [\pi]_f$．一方 θ は形式 $\mathcal{O}_K$ 加群則の同形だから，$[\pi']_{f'} \circ \theta = \theta \circ [\pi']_f = \theta \circ [u]_f \circ [\pi]_f$．よって次の補題から従う．∎

補題 4.6 π を K の素元とし，$f \in \mathcal{O}_K[[X]]$ は (1) をみたすものとすると，$h \in \mathcal{O}_{\widehat{K}}[[X]]$ と $m \geq 1$ に対し，$h \circ [\pi]_f \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^m} \Longrightarrow h \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^m}$．とくに，次は単射である：

$$\circ[\pi]_f : \mathcal{O}_{\widehat{K}}[[X]] \ni h \longmapsto h \circ [\pi]_f \in \mathcal{O}_{\widehat{K}}[[X]]$$

証明 m に関する帰納法で示す（$m = 0$ なら示すべきことはない）．$h \circ [\pi]_f = \pi^m \cdot g$ とすると，帰納法の仮定より $h = \pi^{m-1} \cdot h'$ で，$h' \circ [\pi]_f = \pi \cdot g$．これを $\bmod \mathfrak{p}$ すれば $h'(X^q) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ だから $h' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$，すなわち $h \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^m}$． ∎

定理 4.7（Artin 写像の一意性） Artin 写像 $\mathrm{Art}_K^\pi : K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{LT}}/K)$ は π の選び方に依らない（以後 $\mathrm{Art}_K := \mathrm{Art}_K^\pi$ と書く）．

証明 系 4.4(ii) により，二つの素元 π, π' に対して $\mathrm{Art}_K^{\pi'}(\pi') = \mathrm{Art}_K^\pi(\pi')$ を示せば十分である[5]．$K^{\mathrm{LT}} = K^{\mathrm{ur}} \cdot K_{\pi'}^{\mathrm{ram}}$ で，K^{ur} への作用は同じだから，$K_{\pi'}^{\mathrm{ram}}$ への作用を見る．$f, f' \in \mathcal{O}_K[[X]]$ をそれぞれ π, π' に対して (1) をみたすモニックとし，命題 4.3 の θ を取る．$\alpha \in \boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m}$ に対して $\theta(\alpha)$ を考えると，定義より $\mathrm{Art}_K^{\pi'}(\pi')(\theta(\alpha)) = \theta(\alpha)$．また $\pi' = u\pi$ とおくと，$\mathrm{Art}_K^\pi(\pi') = \mathrm{Art}_K^\pi(u\pi)$ は定義より $\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m}$ には $\alpha \mapsto [u]_f(\alpha)$ で，K^{ur} には $\mathrm{Frob}_K = \varphi^{-1}$ で作用するから，$\mathrm{Art}_K^\pi(\pi')(\theta(\alpha)) = \theta^{\varphi^{-1}}([u]_f(\alpha)) = (\theta \circ [u]_f)^{\varphi^{-1}}(\alpha)$ で，命題 4.5 よりこれは $\theta(\alpha)$ である．よって $\mathrm{Art}_K^{\pi'}(\pi')$ と $\mathrm{Art}_K^\pi(\pi')$ は $K_{\pi'}^m$ の上で一致し，m は任意だったから $\mathrm{Art}_K^{\pi'}(\pi') = \mathrm{Art}_K^\pi(\pi')$． ∎

定義 4.8 有限次拡大 K'/K に対し，ノルム写像 $K'^\times \to K^\times$ の像を $N(K'/K)$ で表す．一般の代数拡大 F/K に対しては，$N(F/K) = \bigcap_{K' \subset F} N(K'/K)$ と定める．

系 4.9 K の素元 π, π' に対し $\pi'/\pi \in 1 + \mathfrak{p}^m$ $(m \geq 1)$ とすると（ここで $\langle \pi \rangle := \{\pi^a \mid a \in \mathbb{Z}\}$）：

$$K_\pi^m = K_{\pi'}^m, \quad (1 + \mathfrak{p}^m) \times \langle \pi \rangle \subset N(K_\pi^m/K).$$

証明 Art_K^π の定義より，$K^\times$ の部分群 $(1 + \mathfrak{p}^m) \times \langle \pi \rangle$ の Art_K^π による像の不変体が K_π^m であるから，$(1 + \mathfrak{p}^m) \times \langle \pi \rangle = (1 + \mathfrak{p}^m) \times \langle \pi' \rangle$ と定理 4.7 より $K_\pi^m = K_{\pi'}^m$．従って命題 3.7(ii) により $\pi, \pi' \in N(K_\pi^m/K)$ だから $u = \pi'/\pi \in N(K_\pi^m/K)$ で，π' を動かして命題の後半を得る． ∎

[5] 系 4.4(ii) を使わず次のようにしてもよい：任意の二つの素元 π, π' に対して $\mathrm{Art}_K^{\pi'}(\pi') = \mathrm{Art}_K^\pi(\pi')$ ならば，任意の素元 π'' に対して $\mathrm{Art}_K^{\pi'}(\pi'') = \mathrm{Art}_K^{\pi''}(\pi'') = \mathrm{Art}_K^\pi(\pi'')$ で，$K^\times$ は素元たちで生成されるから $\mathrm{Art}_K^{\pi'} = \mathrm{Art}_K^\pi$．

5 Coleman operator：Artin 写像の特徴づけと Base Change

5.1 Coleman operator とノルム群

本小節では再び K の素元 π と (1) をみたすモニック $f \in \mathcal{O}_K[X]$ を一つ固定し，F_f の演算を $+_F$，$[\cdot]$ で，$\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m}$ を $\boldsymbol{\mu}_{\pi^m}$ で表す．まず，補題 4.6 の写像 $\circ[\pi]$ の $\mathcal{O}_K[[X]]$ における像を特徴づける：

補題 5.1 $g \in \mathcal{O}_K[[X]]$ に対し：

(i) $g(\alpha) = 0 \ (\forall \alpha \in \boldsymbol{\mu}_\pi) \iff \exists h \in \mathcal{O}_K[[X]],\ g(X) = h(X) \cdot [\pi](X)$.

(ii) $g(X +_F \alpha) = g(X) \ (\forall \alpha \in \boldsymbol{\mu}_\pi) \iff \exists h \in \mathcal{O}_K[[X]],\ g = h \circ [\pi]$.

証明 (i): $\Leftarrow$ は明らか. $g(X) = \sum_{i=0}^\infty a_i X^i$, $g(\alpha) = 0$ ならば, 各 $i \geq 0$ に対し $b_i := \sum_{j=0}^\infty a_{i+j+1}\alpha^j \in \mathcal{O}_{K_\pi^1}$ とおけば $\mathcal{O}_{K_\pi^1}[[X]]$ において $g(X) = (X - \alpha) \cdot \sum_{i=0}^\infty b_i X^i$．これを繰り返して $g(X) = h(X) \cdot [\pi](X)$ を得るが，$g, [\pi]$ は $\mathcal{O}_K$ 係数だから h も $K \cap \mathcal{O}_{K_\pi^1} = \mathcal{O}_K$ に係数を持つ.

(ii): $\Leftarrow$ は明らか．$\forall \alpha \in \boldsymbol{\mu}_\pi$ に対し $g(X +_F \alpha) = g(X)$ ならば，(i) より $g(X) - g(0) = g_1(X) \cdot [\pi](X)$ と書けて，$[\pi](X +_F \alpha) = [\pi](X)$ より $g_1(X +_F \alpha) = g_1(X)$．この操作を繰り返し，$g_0 := g$ および $g_i(X) - g_i(0) = g_{i+1}(X) \cdot [\pi](X)$ によって g_i を定めれば，$g(X) = \sum_{i=0}^\infty g_i(0) \cdot [\pi](X)^i$ を得るから，$h(X) := \sum_{i=0}^\infty g_i(0) X^i$ とおけば $g = h \circ [\pi]$. ∎

定義 5.2 (Coleman operator) $g \in \mathcal{O}_K[[X]]$ に対し，$\prod_{\alpha \in \boldsymbol{\mu}_\pi} g(X +_F \alpha)$ の各係数は $\boldsymbol{\mu}_\pi$ の元の対称式だから $\mathcal{O}_K$ の元である．よって補題 4.6・補題 5.1(ii) によって,

$$N(g) \circ [\pi](X) = \prod_{\alpha \in \boldsymbol{\mu}_\pi} g(X +_F \alpha) \tag{2}$$

をみたす $N(g) \in \mathcal{O}_K[[X]]$ がただ一つ存在する．定義より $N(g_1 g_2) = N(g_1)N(g_2)$．また，$N^0(g) := g$ および $N^m(g) := N(N^{m-1}(g))$ $(m \geq 1)$ と表す.

補題 5.3 $m \geq 1$ に対し，$N^m(g) \circ [\pi^m](X) = \prod_{\alpha \in \boldsymbol{\mu}_{\pi^m}} g(X +_F \alpha)$.

証明 m に関する帰納法で示す（$m = 1$ なら明らか）．$\boldsymbol{\mu}_{\pi^m}/\boldsymbol{\mu}_\pi$ の代表系 A を一つ固定すると：

$$\prod_{\alpha \in \boldsymbol{\mu}_{\pi^m}} g(X +_F \alpha) = \prod_{\beta \in A} \prod_{\alpha \in \boldsymbol{\mu}_\pi} g(X +_F \beta +_F \alpha) = \prod_{\beta \in A} N(g) \circ [\pi](X +_F \beta)$$

で，$[\pi](X +_F \beta) = [\pi](X) +_F [\pi](\beta)$ だが，$[\pi] : A \to \boldsymbol{\mu}_{\pi^{m-1}}$ は全単射だから，上の右辺は $= \prod_{\alpha \in \boldsymbol{\mu}_{\pi^{m-1}}} N(g)([\pi](X) +_F \alpha)$ で，これは帰納法の仮定より $N^{m-1}(N(g)) \circ [\pi^{m-1}]([\pi](X)) = N^m(g) \circ [\pi^m](X)$ に等しい. ∎

補題 5.4 (i) $N(g) \equiv g \pmod{\mathfrak{p}}$．とくに，$N(\mathcal{O}_K[[X]]^\times) \subset \mathcal{O}_K[[X]]^\times$.

(ii) $m \geq 1$ に対し，$g \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^m} \Longrightarrow N(g) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{m+1}}$.

(iii) $g \in \mathcal{O}_K[[X]]^\times$ のとき，$m \geq 1$ に対し，$N^m(g)/N^{m-1}(g) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^m}$.

証明 (i): $[\pi](X) \equiv X^q \pmod{\mathfrak{p}}$ より，(2) の左辺 $\equiv N(g)(X^q) \pmod{\mathfrak{p}}$．また，$\alpha \in \boldsymbol{\mu}_\pi$ に対し $X +_F \alpha \equiv X \pmod{\mathfrak{p}_{K_\pi^1}}$ より $g(X +_F \alpha) \equiv g(X) \pmod{\mathfrak{p}_{K_\pi^1}}$ だから，$\mathcal{O}_K/\mathfrak{p} \cong \mathbb{F}_q$ より (2) の右辺 $\equiv g(X)^q \equiv g(X^q) \pmod{\mathfrak{p}}$．よって $N(g) \equiv g \pmod{\mathfrak{p}}$.

(ii): $g = 1 + \pi^m h$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
N(g) \circ [\pi] &= \prod_{\alpha \in \boldsymbol{\mu}_\pi} \bigl(1 + \pi^m h(X +_F \alpha)\bigr) \equiv \bigl(1 + \pi^m h(X)\bigr)^q \pmod{\mathfrak{p}^m \mathfrak{p}_{K_\pi^1}} \\
&\equiv 1 + q\pi^m h(X) + \cdots \pi^{mq} h(X)^q \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^m \mathfrak{p}_{K_\pi^1}}
\end{aligned}
$$

だから，$(N(g) - 1) \circ [\pi] \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^m \mathfrak{p}_{K_\pi^1}}$ で，これは $\mathcal{O}_K[[X]]$ の元だから $(N(g) - 1) \circ [\pi] \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{m+1}}$．よって補題 4.6 より $N(g) - 1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{m+1}}$.

(iii): (i) より $N(g)/g \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ で，これに (ii) を $(m-1)$ 回適用すればよい. ∎

命題 5.5 K の素元 π と $m \geq 1$ に対し，$N(K_\pi^m/K) = (1 + \mathfrak{p}^m) \times \langle \pi \rangle$.

証明 系 4.9 より，$N(K_\pi^m/K) \subset (1 + \mathfrak{p}^m) \times \langle \pi \rangle$ を示せばよい．$N : K(\boldsymbol{\mu}_{f,\pi^m})^\times \to K^\times$ をノルム写像とし，$\alpha \in \boldsymbol{\mu}_{\pi^m} \setminus \boldsymbol{\mu}_{\pi^{m-1}}$ を固定すると，命題 3.7(ii) により $(K_\pi^m)^\times = \mathcal{O}_{K_\pi^m}^\times \times \langle -\alpha \rangle$ で $N(-\alpha) = \pi$ だから，$N(\mathcal{O}_{K_\pi^m}^\times) \subset 1 + \mathfrak{p}^m$ を示せばよい．任意の $u \in \mathcal{O}_{K_\pi^m}^\times$ は，次の補題 5.6 より $u = g(\alpha)$, $g \in \mathcal{O}_K[[X]]^\times$ と表せる．各 $i \geq 0$ に対し $u_i = N^i(g)(0)$ とおくと，補題 5.3 より $u_i = \prod_{\alpha \in \boldsymbol{\mu}_{\pi^i}} g(\alpha)$ だから $N(u) = u_m/u_{m-1}$ で，補題 5.4(iii) により $u_m/u_{m-1} \in 1 + \mathfrak{p}^m$. ∎

補題 5.6 K'/K を完全分岐拡大，α を K' の素元とすると，$\mathcal{O}_{K'} = \mathcal{O}_K[\alpha]$.

証明 $[K' : K] = n$ とし，$x = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha^i$ $(a_i \in K)$ とすると，$i \neq j$ ならば $v_{K'}(a_i \alpha^i) \neq v_{K'}(a_j \alpha^j)$ より $v_{K'}(x) = \min_i \{v_{K'}(a_i \alpha^i)\}$ だから，(i) $x = 0 \Longrightarrow \forall i\ a_i = 0$, (ii) $x \in \mathcal{O}_{K'} \iff \forall i\ a_i \in \mathcal{O}_K$. (i) より $\{1, \alpha, \alpha^2 \ldots, \alpha^{n-1}\}$ は K' の K 上の基底で，これと (ii) より $\mathcal{O}_{K'} \subset \mathcal{O}_K[\alpha]$. ∎

系 5.7 K の素元 π に対し，$N(K_\pi^{\mathrm{ram}}/K) = \langle \pi \rangle$．一般に，$F$ を K の完全分岐拡大（K の有限次完全分岐拡大の合併集合で表せる代数拡大）で K_π^{ram} を含むものとすると，$N(F/K) = \langle \pi \rangle$.

証明 前半は命題 5.5 と $\bigcap_{m \geq 1}(1 + \mathfrak{p}^m) = \{1\}$ より従う．後半は，$N(F/K) \subset N(K_\pi^{\mathrm{ram}}/K) = \langle \pi \rangle$ だから，$P = v_K^{-1}(\{1\})$ とおけば，$N(F/K) \cap P \neq \emptyset$ を示せば十分である．これを一般の完全分岐拡大 F/K について示す．任意の素元 π に対し $P = \pi \cdot \mathcal{O}_K^\times$ で $\mathcal{O}_K^\times = \varprojlim_m \mathcal{O}_K^\times/(1 + \mathfrak{p}^m)$ だから集合として $P = \varprojlim_m P/(1 + \mathfrak{p}^m)$ なので，各 m に対し $(N(F/K) \cap P)/(1 + \mathfrak{p}^m) \neq \emptyset$ を示せば十分である．F に含まれる有限次拡大 K'/K は完全分岐だから，$(N(K'/K) \cap P)/(1 + \mathfrak{p}^m)$ は有限集合 $P/(1 + \mathfrak{p}^m)$ の空でない部分集合であり，また $K', K'' \subset F$ なら $K'K'' \subset F$ で $N(K'K''/K) \subset N(K'/K) \cap N(K''/K)$ だから，$(N(K'/K) \cap P)/(1 + \mathfrak{p}^m)$ たちの共通部分 $(N(F/K) \cap P)/(1 + \mathfrak{p}^m)$ も空でない. ∎

5.2 分岐拡大の base change と特徴づけ

定理 5.8（分岐拡大の base change） K'/K を局所体の有限次完全分岐拡大とする．このとき，$K^{\mathrm{LT}} \subset K'^{\mathrm{LT}}$ であり，次は可換である：

$$\begin{tikzcd} K'^{\times} \arrow[r, "\mathrm{Art}_{K'}"] \arrow[d, "N_{K'/K}"'] & \mathrm{Gal}(K'^{\mathrm{LT}}/K') \arrow[d, "\mathrm{res}"] \\ K^{\times} \arrow[r, "\mathrm{Art}_K"] & \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{LT}}/K) \end{tikzcd} \tag{3}$$

すなわち，$\forall x \in K'^{\times}$ に対し，$\mathrm{Art}_{K'}(x)|_{K^{\mathrm{LT}}} = \mathrm{Art}_K(N_{K'/K}(x))$.

証明 K' の素元 π' に対して，$\mathrm{Art}_{K'}(\pi') \in \mathrm{Gal}(K'^{\mathrm{LT}}/K')$ の $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K')$ への延長を σ とおくと，$\sigma|_{K'^{\mathrm{ur}}} = \mathrm{Frob}_{K'}$，$\sigma|_{K'^{\mathrm{ram}}_{\pi'}} = \mathrm{id}$ だから，σ による不変体 F_σ は $K'^{\mathrm{ram}}_{\pi'}$ を含み，系 5.7 より $N(F_\sigma/K') = \langle \pi' \rangle$．よって $N(F_\sigma/K) = N_{K'/K}(N(F_\sigma/K')) = \langle N_{K'/K}(\pi') \rangle$．一方，$\sigma|_{K^{\mathrm{ur}}} = \mathrm{Frob}_{K'}|_{K^{\mathrm{ur}}} = \mathrm{Frob}_K$ だから $x := \mathrm{Art}_K^{-1}(\sigma|_{K^{\mathrm{LT}}})$ は K のある素元 π だが，$\sigma|_{K^{\mathrm{ram}}_\pi} = \mathrm{Art}_K(\pi)|_{K^{\mathrm{ram}}_\pi} = \mathrm{id}$ だから $K^{\mathrm{ram}}_\pi \subset F_\sigma$ で，F_σ/K は完全分岐だから，再び系 5.7 より $N(F_\sigma/K) = \langle \pi \rangle$，従って $N_{K'/K}(\pi') = \pi$．また σ は任意で，$\mathrm{Art}_{K'}(\pi')$ のあらゆる延長 σ に対する F_σ の共通部分は $K'^{\mathrm{ram}}_{\pi'}$ だから，$K^{\mathrm{ram}}_\pi \subset K'^{\mathrm{ram}}_{\pi'}$．これと $K'^{\mathrm{ur}} = K'K^{\mathrm{ur}}$ より $K^{\mathrm{LT}} \subset K'^{\mathrm{LT}}$．以上より $\mathrm{Art}_{K'}(\pi')|_{K^{\mathrm{LT}}} = \mathrm{Art}_K(N_{K'/K}(\pi'))$ で，$K'^{\times}$ は K' の素元たちで生成されるから，定理を得る． ■

以下，$K \subset K' \subset K^{\mathrm{LT}}$ をみたす有限次拡大 K'/K を **Lubin-Tate 拡大**と呼ぶことにする．

定理 5.9 $\mathrm{Art}_K : K^{\times} \to \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{LT}}/K)$ は次の性質をみたす唯一つの準同形写像である：

(i) K の任意の素元 π に対し，$\mathrm{Art}_K(\pi)|_{K^{\mathrm{ur}}} = \mathrm{Frob}_K$.

(ii) 任意の完全分岐 Lubin-Tate 拡大 K'/K に対し，$\mathrm{Art}_K(N(K'/K))|_{K'} = \mathrm{id}$.

証明 定理 5.8 より Art_K はこれらをみたす[6]．逆にこれらをみたす準同形写像 Art'_K が与えられたとすると，K の任意の素元 π に対し，(ii) と命題 3.7(ii) より $\mathrm{Art}'_K(\pi)|_{K^{\mathrm{ram}}_\pi} = \mathrm{id}$ だから，(i) と合わせて $\mathrm{Art}'_K(\pi) = \mathrm{Art}_K(\pi)$ を得る．$K^{\times}$ は K の素元たちで生成されるから，$\mathrm{Art}'_K = \mathrm{Art}_K$． ■

この定理のうち，Art_K の特徴づけ（一意性）の部分は，4 節までにすでに示されていることに注意する．これによって，例えば Galois コホモロジーによる方法で構成された Artin 写像がこれと一致することが解る．ほぼ本稿の 3・4 節に相当する Lubin-Tate の原論文 [4] では，このようにして彼らの構成した Artin 写像が従来知られていた局所類体論の相互写像に一致することを示しているが，Artin 写像が上の定理 5.9 の性質を持つことを直接示すことはできなかった．これは 5 節に紹介した方法で，Coleman [1] を待って初めて可能になったのである．

[6] 不分岐な K'/K に対しても (ii) をみたすことはすぐ解る：$K' := K_f/K$ を f 次不分岐拡大とすると，Art_K の定義より $\mathrm{Art}_K(x)|_{K'} = \mathrm{id} \iff v_K(x) \in f\mathbb{Z}$ だが，明らかに $N_{K'/K}(K'^{\times}) \subset v_K^{-1}(f\mathbb{Z})$.（実はこれも等号である.）任意の有限次 Lubin-Tate 拡大 K'/K について (ii) を示すには，base change を不分岐拡大についても示す必要がある．

6　おわりに

Iwasawa [3] は，本稿の 3・4 節をすべて相対 Lubin-Tate 群 (de Shalit [2]) に対して構成し，さらに途中で局所 Kronecker-Weber 定理 ($K^{\mathrm{LT}} = K^{\mathrm{ab}}$) を証明することによって，一般の有限次拡大に対する base change を証明し，局所類体論の主定理を導いている．また，本質的に分岐理論に属する局所 Kronecker-Weber 定理の証明を，Lubin-Tate 理論から分離することもできる[7]．ノルム群の計算（本稿の 5 節）も相対 Lubin-Tate 群に対して行えば，一般の有限次拡大に対する base change を直接示し,「K^{LT} に関する局所類体論」を導くことができるのである (Yoshida [5]).

定理 6.1（局所類体論 minus 局所 Kronecker-Weber 定理）[8]

(i) 次の性質をみたす唯一つの準同形写像 $\mathrm{Art}_K : K^\times \to \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{LT}}/K)$ が存在する：

  (a) K の任意の素元 π に対し，$\mathrm{Art}_K(\pi)|_{K^{\mathrm{ur}}} = \mathrm{Frob}_K$.

  (b) 任意の Lubin-Tate 拡大 K'/K に対し，$\mathrm{Art}_K(N(K'/K))|_{K'} = \mathrm{id}$.

(ii) 任意の有限次拡大 K'/K と $\forall x \in K'^\times$ に対し，$\mathrm{Art}_{K'}(x)|_{K^{\mathrm{LT}}} = \mathrm{Art}_K(N_{K'/K}(x))$ で，Art_K は $K^\times/N(K'/K) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Gal}((K' \cap K^{\mathrm{LT}})/K))$ を導く．

この定理の K^{LT}（Lubin-Tate 拡大）を K^{ab}（Abel 拡大）に置き換えると局所類体論の主定理を得る．**Weil 群** $W_K := \{\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \mid \sigma|_{K^{\mathrm{ur}}} \in \mathrm{Frob}^{\mathbb{Z}}\}$ を用いると，上の事情は以下のように定式化できる．(i) Lubin-Tate 理論：全射 $W_K^{\mathrm{ab}} \to K^\times$ の構成（3 節），この全射の base change（関手性）による特徴づけ（4 節），(ii) 関手性の証明（5 節），(iii) 局所 Kronecker-Weber 定理：この全射が同形であることの証明[9]．全射 $W_K^{\mathrm{ab}} \to K^\times$ を単射 $\{K^\times$ の指標$\} \longrightarrow \{W_K$ の指標$\}$ と考え，これを全単射 $\{GL_n(K)$ の既約表現$\} \longrightarrow \{W_K$ の n 次元表現$\}$ の形に拡張したのが**局所 Langlands 対応**（非可換局所類体論）と呼ばれるもので，その幾何学的実現である**非可換 Lubin-Tate 理論**も示されている．これらの定理の現在知られている証明はいずれも大域 Langlands 対

[7] Lubin-Tate 理論を仮定すると，局所 Kronecker-Weber 定理は Hasse-Arf の定理と同値である．

[8] Lubin-Tate 拡大に関する，古典的な局所類体論の諸定理は直ちに従う．

(i) **（同形定理）** 任意の Lubin-Tate 拡大 K'/K に対し，$K^\times/N(K'/K) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Gal}(K'/K)$.

(ii) **（終結定理）** 任意の有限次拡大 K'/K に対し，$N(K'/K) = N((K' \cap K^{\mathrm{LT}})/K))$ であり，$[K^\times : N(K'/K)] \leq [K' : K]$．等号は K'/K が Lubin-Tate 拡大のときに限り成り立つ．

(iii) **（順序定理）** K'/K を有限次拡大，K''/K を Lubin-Tate 拡大とするとき，$N(K'/K) \subset N(K''/K) \iff K'' \subset K'$．このとき，$K'/K$ も Lubin-Tate 拡大であれば，$\mathrm{Art}_{K'}$ によって $N(K''/K)/N(K'/K) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Gal}(K'/K'')$.

(iv) **（結合定理）** $K', K''/K$ をともに Lubin-Tate 拡大とするとき：
$N(K'K''/K) = N(K'/K) \cap N(K''/K)$,　$N((K' \cap K'')/K) = N(K'/K)N(K''/K)$.

(v) **（存在定理・一意定理）** 任意の指数有限な閉部分群 $H \subset K^\times$ に対し，$N(K'/K) = H$ となる Lubin-Tate 拡大 K'/K が唯一つ存在する．

[9] 逆に，Galois コホモロジーを用いた証明では，関手性をみたす全射 $K^\times \to W_K^{\mathrm{ab}}$ が構成され，関手性がこれを特徴づけることも解るが，単射性（存在定理）の Lubin-Tate 理論を用いない証明は複雑になる (cf. Serre, "Local Fields").

応の一部を用いるものであるが，もし上に述べた (i),(ii),(iii) の形の局所類体論の証明を一般化した純局所的証明が得られれば，それが最も見通しよく美しい証明になると筆者には思われる[10].

7 付録：DVR の基礎事項

本稿で用いる DVR についての事実をまとめておく[11]．環 A は PID でかつ局所環である（すなわち極大イデアルをただ一つだけ持つ）とき**離散付値環 (DVR)** という．A を DVR とし，P を A の極大イデアルとする．P の生成元を A の**素元**という．A の**完備化**とは $\widehat{A} := \varprojlim_m A/P^m$ のことであり，これは $\widehat{P} := P\widehat{A}$ を極大イデアルとする DVR になる．K を A の商体とすると，$\widehat{K} := K \otimes_A \widehat{A}$ は $\widehat{A}$ の商体であり，これを K の**完備化**という．標準射 $A \to \widehat{A}$ は必ず単射で（従って $K \subset \widehat{K}$），これが同形であるとき A を**完備離散付値環 (CDVR)** という．DVR の完備化は CDVR であり，$A/P \xrightarrow{\cong} \widehat{A}/\widehat{P}$. また，$A$ が CDVR ならば，A 係数のべき級数 $F \in A[[X_1, \ldots, X_n]]$ に $x_1, \ldots, x_n \in P$ を代入して $F(x_1, \ldots, x_n) \in A$ を得る．これは，$A[[X_1, \ldots, X_n]] \cong \varprojlim_m \bigl(A[X_1, \ldots, X_n]/(\deg m)\bigr)$ および $A \cong \varprojlim_m A/P^m$ を用いて，

$$A[X_1, \ldots, X_n]/(\deg m) \ni F \bmod \deg m \longmapsto F(x_1, \ldots, x_n) \bmod P^m \in A/P^m$$

の逆極限によって得られる．

A を DVR，K をその商体，L をその n 次分離拡大，B を L での A の整閉包とすると，$L \cong B \otimes_A K$ で L は B の商体である．このとき B は有限生成 A 加群であり，A は PID であるから単因子論より B は自由 A 加群で，その階数は $n = [L : K]$ に等しい．また B は Dedekind 整域（1 次元整閉 Noether 整域）であり，P の元で生成される B のイデアル PB の素イデアル分解を $PB = \prod_{i=1}^g Q_i^{e_i}$ とすると，$Q_1, \ldots, Q_g$ が B の極大イデアルの全てである．$\widehat{B}_i := \varprojlim_m B/Q_i^m$ とおく．B が自由 A 加群だから $B \otimes_A$ と逆極限は交換し，次の標準同形がある：

$$B \otimes_A \widehat{A} \cong B \otimes \bigl(\varprojlim_m A/P^m\bigr) \cong \varprojlim_m B/(PB)^m \cong \varprojlim_m \prod_{i=1}^g B/Q_i^{e_i m} \cong \prod_{i=1}^g \widehat{B}_i.$$

命題 7.1 (i) A を CDVR とすると，B も CDVR である．

(ii) B も DVR ならば，L の完備化 $\widehat{L}$ は $L \otimes_K \widehat{K}$ と同形で（合成体 $L\widehat{K}$），$\widehat{L}$ の中で $L \cap \widehat{K} = K$.

証明 (i): $B \cong B \otimes_A \widehat{A}$ で B は整域だから，$g = 1$ で $B \cong \widehat{B}$. (ii): $B \otimes_A \widehat{A} \cong \widehat{B}$ だから，$L \otimes_K \widehat{K} \cong L \otimes_K (K \otimes_A \widehat{A}) \cong L \otimes_B (B \otimes_A \widehat{A}) \cong L \otimes_B \widehat{B} \cong \widehat{L}$ で，従って $[\widehat{L} : \widehat{K}] = [L : K]$. 後半の

[10]局所 Langlands 対応を一意に特徴づけるのに必要な諸性質を求めることは長い間の懸案であった．現在は表現のペアの ε 因子と呼ばれるものを用いて特徴づけられているが，関手性によって特徴づけられればその方が好ましい．

[11]証明については，例えば `http://abel.math.harvard.edu/~yoshida/AlgebraicNumberTheory.dvi` を参照．

主張は L/K が Galois 拡大の場合に示せば十分である．このとき制限 $\mathrm{Gal}(\widehat{L}/\widehat{K}) \to \mathrm{Gal}(L/(L\cap\widehat{K}))$ は単射だから，$[\widehat{L}:\widehat{K}] \le [L:L\cap\widehat{K}] \le [L:K]$ だが，これは等号となるので $L\cap\widehat{K} = K$． ∎

以下 $g=1$，$Q=Q_1$ とする．$Q\cap A = P$ より $k_Q := B/Q$ は $k_P := A/P$ の拡大体で，B が有限生成 A 加群だから有限次拡大である．**分岐指数** e，**剰余次数** f を $PB = Q^e$ および $f = [k_Q : k_P]$ で定めると，k_P 上のベクトル空間として $B/PB \cong (k_Q)^e$ となり（Q 進展開），右辺の次元は ef であり，左辺の次元は B の A 加群としての階数に等しいから n である．従って $n = ef$ を得る．$e=1$ のとき L/K は**不分岐**，$f=1$ のとき L/K は**完全分岐**という．

さらに L/K を Galois 拡大とし，k_P を完全体とする．$\mathrm{Gal}(L/K)$ の元は B の自己同形を引き起こし，Q を自分自身に写すから，自然な群準同形 $\mathrm{Gal}(L/K) \ni \sigma \longmapsto \sigma|_B \bmod Q \in \mathrm{Aut}(k_Q/k_P)$ が定まる．このとき k_Q/k_P は Galois 拡大となり，この群準同形は全射である．$|\,\mathrm{Gal}(k_Q/k_P)| = f$ だから，核の位数は e である．次は不分岐な例を与える：

命題 7.2 $L = K(\boldsymbol{\mu}_n)$（で，$g=1$）とする．$\mathrm{char}\, k_P \not| n$ ならば L/K は不分岐である．

証明 $e=1$ を示すには，上の群準同形が単射であることを見る．$\mathrm{Gal}(K(\boldsymbol{\mu}_n)/K)$ の元は $\boldsymbol{\mu}_n$ の生成元 $\zeta \in B^\times$ の像で決まるから，$\zeta^i \equiv \zeta^j \pmod{Q} \Longrightarrow \zeta^i = \zeta^j$ を示せばよい．$\zeta^i - \zeta^j \in Q \Longrightarrow \zeta^{i-j} - 1 \in Q$ だから，$1 \le i \le n-1$ に対し $\zeta^i - 1 \notin Q$ を示せばよい．恒等式 $\prod_{i=1}^{n-1}(X-\zeta^i) = (X^n-1)/(X-1) = X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1$ に $X=1$ を代入して $\prod_{i=1}^{n-1}(1-\zeta^i) = n$ を得るから，$n \notin Q$ より体 k_Q において $\prod_{i=1}^{n-1}(1-\overline{\zeta^i}) \ne 0$，従って $\zeta^i - 1 \notin Q$． ∎

補題 2.1 の証明 $\Leftarrow$ は，命題 7.2 の証明中で示した $\zeta^i \equiv \zeta^j \pmod{\mathfrak{p}} \Longrightarrow \zeta^i = \zeta^j$ より直ちに従う．$\Rightarrow$ を示す．$k = \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ には 1 の原始 n 乗根が存在するから，これを代表する $\zeta_1 \in \mathcal{O}_K$ をとる．$\mathcal{O}_K = \varprojlim_m (\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^m)$ より，各 $m \ge 1$ に対し，$\zeta_m^n \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^m}$，$\zeta_m \equiv \zeta_1 \pmod{\mathfrak{p}}$ なる $\zeta_m \in \mathcal{O}_K$ を帰納的に構成すればよい．ζ_m まで構成できたとし，$\zeta_m^n \equiv 1 + \alpha\pi^m \pmod{\mathfrak{p}^{m+1}}$ とおく．条件より $\zeta_{m+1} = \zeta_m + \beta\pi^m$ と書けて，$\bmod\, \mathfrak{p}^{m+1}$ で $\zeta_{m+1}^n \equiv \zeta_m^n + n\zeta_m^{n-1}\beta\pi^m \equiv 1 + (\alpha + n\zeta_m^{n-1}\beta)\pi^m$ となるから，$\beta = -\alpha/n\zeta_m^{n-1}$ とすればよい． ∎

参考文献

[1] R. Coleman, *Division values in local fields*, Invent. Math. **53** (1979), 91-116.

[2] E. de Shalit, *Relative Lubin-Tate groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **95** (1985), 1-4.

[3] K. Iwasawa, *Local Class Field Theory*, Oxford Univ. Press, 1986.

[4] J. Lubin, J. Tate, *Formal complex multiplication in local fields*, Ann. Math. **81** (1965), 380-387.

[5] T. Yoshida, *Local class field theory via Lubin-Tate theory*, preprint 2005.