早稲田大学整数論研究集会，2004 年 3 月 19 日

非可換 Lubin-Tate 理論と Deligne-Lusztig 理論

吉田 輝義 (tyoshida@ms.u-tokyo.ac.jp)
(東京大学大学院数理科学研究科 / Harvard University)

1 はじめに

本稿では K を標数 0 の局所体（ある素数 p に対する p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大）とする．K の代数的整数論の中心的な研究対象は K の絶対 Galois 群 $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ であろう．例えば，K に対する局所類体論は，標準的な群準同形

$$K^\times \longrightarrow G_K^{ab}$$

を与える．ここで $G_K^{ab} = \mathrm{Gal}(K_{ab}/K)$ は G_K の最大 Abel 商である．G_K^{ab} のみならず G_K 全体を理解しようと試みる，いわば非可換局所類体論は，**局所 Langlands 対応**として定式化されている．これは，すべての正整数 n に対して，

$$\{GL_n(K) \text{ の既約許容表現 }\} \longleftrightarrow \{G_K \text{ の } n \text{ 次元表現 }\}$$

という形の対応を与えようとするものであり，$n = 1$ の場合が局所類体論にあたる（実際は G_K の代わりに Weil-Deligne 群を考えるなどの精密化を行って初めて 1 対 1 対応が得られるのであるが，詳細は他の文献に譲ることにする）．この予想は Weil, Deligne, Langlands らによって提唱され，Henniart らの仕事を経て，1999 年 Harris-Taylor によって解決された ([HT])．一般の簡約代数群 G に対する $G(K)$ の既約表現に関した予想もあるが，一般には未解決である．

$GL_n(K)$ に対する局所 Langlands 対応の Harris-Taylor による証明は，志村多様体の数論幾何学と，代数体上の保型表現に関する理論を駆使してなされるものであり，高度に洗練された大域的理論を用いるものである．これは，類体論の場合と同様に，局所 Langlands 対応は，**大域 Langlands 対応**の局所的なヴァージョンになっているからであり，現状では局所 Langlands 対応の証明は一部の大域 Langlands 対応の実現に依存したものである.（この状況は，局所類体論が初め大域類体論の系として導出された経緯と類似している.） この場合の大域 Langlands 対応は，CM 代数体上のユニタリ型志村多様体のエタールコホモロジー群に実現されるものであり，虚数乗法論による虚二次体の大域類体論の幾何学的実現の一般化と考えられるものである．これを用いて，Harris-Taylor は局所体 K 上のユニタリ型志村多様体のエタールコホモロジー群に局所 Langlands 対応を実現した.

そこで，局所 Langlands 対応の実現に関連した局所的な数論幾何学に関してはより多くの研究が待たれる（現時点の未解決問題については，M.Harris の ICM 講演 [H] が詳しい）．とくに，これが局所体上の志村多様体のエタールコホモロジー群に実現されることを純粋に局所体上のみの手法により証明することが課題になる．これは，虚数乗法論の局所的なヴァージョンとして

Lubin-Tate 理論が構想されて証明されたことの一般化と考えられ，**非可換 Lubin-Tate 理論**として H.Carayol により定式化されている ([Car]).

この非可換 Lubin-Tate 理論には，消滅サイクルコホモロジーを使うものとリジッド空間のコホモロジーを使うものと二つのヴァージョンがある（いずれも，用いるコホモロジー理論は ℓ 進エタールコホモロジーである）が，本稿で扱うのは前者である．後に詳しく定義するが，この理論においては高さ n の**形式** O_K **加群**の変形空間（O_K は K の整数環）と呼ばれる完備局所環の作るアフィンスキーム $X_0 = \mathrm{Spec}\, A_0$ を考える．この環 A_0 は，K の最大不分岐拡大体の完備化 K_0 の整数環 $W = \widehat{O_K^{ur}}$ 上の $n-1$ 変数の形式的ベキ級数環と同形になる．この変形空間は $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の高さ n の形式 O_K 加群の変形のモジュライ空間であるが，これに**レベル** $\mathfrak{p}^m$ **構造**（$\mathfrak{p}$ は O_K の極大イデアル，$m \in \mathbb{N}_{>0}$）という付加構造をつけた変形問題のモジュライ空間を考えると，A_0 上の有限平坦代数 A_m が得られる．これは再び n 次元完備局所環となり，その幾何的生成ファイバー（W 上 $K_0 = \mathrm{Frac}\, W$ の代数的閉包をテンソルしたもの）を取ると，

$$\mathrm{Spec}\, A_m \otimes \overline{K}_0 \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A_0 \otimes \overline{K}_0$$

は $GL_n(O_K/\mathfrak{p}^m)$ を Galois 群とする有限 Galois 被覆となる．非可換 Lubin-Tate 理論では，この幾何的生成ファイバーの ℓ 進エタールコホモロジー群（ℓ は p と異なる素数）

$$H^i\big(\mathrm{Spec}\, A_m \otimes \overline{K}_0,\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell\big)$$

を考える（このような形のコホモロジーを，一般に**消滅サイクルコホモロジー**という：4 節参照）．これは $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の有限次元ベクトル空間となり，定義から直ちに，この空間には $GL_n(O_K/\mathfrak{p}^m)$ と $\mathrm{Gal}(\overline{K}_0/K_0)$ が作用し（後者の群は K の惰性群 $I_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_{ur})$ に同形である），この二つの作用は互いに可換であることが分かるから，この空間は，

$$\bigoplus_{i=1}^{k} \rho_i \otimes \pi_i, \quad \rho_i \in \mathrm{Rep}(I_K),\ \pi_i \in \mathrm{Rep}(GL_n(O_K/\mathfrak{p}^m))$$

という形に分解する．ここで $\mathrm{Rep}(G)$ は群 G の $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の有限次元既約表現の同値類の集合である．非可換 Lubin-Tate 理論とは，本質的に，この対応 $\rho_i \longleftrightarrow \pi_i$ から，$GL_n(K)$ の**尖点表現** ([super]cuspidal representation) と G_K の既約 n 次元表現との間の局所 Langlands 対応を構成できることを主張するものである[1].

本稿では，上記の内容およびそこで用いられる手法についてなるべく予備知識を仮定せずに概説し，また筆者の行った，$m = 1$ の場合の純局所的なコホモロジーの計算について述べる．数論幾何学の手法が直接に代数的整数論の問題に応用される例として，少しでも本稿が興味を持たれた方々のお役に立てれば幸いである．伊藤哲史氏（京大理）および三枝洋一氏（東大数理）には，本稿を詳しく読んでいただき，数多くの訂正やコメントを頂いた．ここに深く感謝したい．もちろん，本稿の誤りや不明瞭な点にはすべて筆者がその責を負うことを明記しておく．

[1]本当はもう少し情報が必要だが，ここでは立ち入らない．

2 Lubin-Tate 理論の復習

非可換 Lubin-Tate 理論に入る前に，まずは Lubin-Tate 理論を簡潔に復習しよう（岩澤 [Iw][2]）．p を素数とし，K を p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とする．K の整数環を O_K とし，その素元 π を一つ固定する．O_K は $\mathfrak{p} = (\pi)$ を極大イデアルとする離散付値環であり，剰余体を $k \cong \mathbb{F}_q$（q は p のべき）とする．本稿では一般に体 F の分離閉包を $\overline{F}$ で，絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ を G_F で表す．

局所類体論は K の最大 Abel 拡大 K_{ab}/K の Galois 群 $\mathrm{Gal}(K_{ab}/K)$ を記述する理論であった．K の最大不分岐拡大体 K_{ur} は K の Abel 拡大であり，その Galois 群は剰余体の絶対 Galois 群に同形である：

$$\mathrm{Gal}(K_{ur}/K) \cong G_{\mathbb{F}_q} \cong \widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

さて，局所類体論の相互写像 $\rho : K^\times \to \mathrm{Gal}(K_{ab}/K)$ は次のような可換図式を作る：

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & O_K^\times \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & K^\times \arrow[r, "\mathrm{val}"] \arrow[d, "\rho"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Gal}(K_{ab}/K_{ur}) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(K_{ab}/K) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(K_{ur}/K) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

（val は K の正規付値を表す.） 右側の縦の写像 $\mathbb{Z} \to \mathrm{Gal}(K_{ur}/K) \cong \widehat{\mathbb{Z}}$ は単射で像が稠密であるから，ρ も単射で像は稠密である．Lubin-Tate 理論は，次のように K 上のすべての Abel 拡大（局所類体）を構成する．多項式

$$[\pi](X) = \pi X + X^q$$

を考え，これを m 回入れ子にしたもの $[\pi]^m(X) = [\pi]([\pi](\cdots[\pi](X))\cdots)$ を考える．この多項式の K 上の分解体を K_m^π とすると，多項式の形からこれらは K の完全分岐拡大である．このとき，各 m に対して Abel 群の同形

$$(O_K/\pi^m)^\times \cong \mathrm{Gal}(K_m^\pi/K)$$

を定義することができ，これらは m に関して自然に compatible となるので，$K^\pi = \bigcup_m K_m^\pi$ とおくと，同形：

$$O_K^\times = \varprojlim_m (O_K/\pi^m)^\times \cong \mathrm{Gal}(K^\pi/K)$$

ができる．このとき，$K_{ab} = K^\pi K_{ur}$ となり，さらに K^π/K は完全分岐であるから $\mathrm{Gal}(K_{ab}/K_{ur}) \cong \mathrm{Gal}(K^\pi/K) \cong O_K^\times$ で，これが上の可換図式の左側の縦の同形 $O_K^\times \to \mathrm{Gal}(K_{ab}/K_{ur})$ を与える．

さて，K の分岐 Abel 拡大 K_m^π は素元 π に依存するが，$K_m^\pi K_{ur}$ は m にしか依らない．これは，上の構成が，K_{ur} 上ではより canonical に記述されるからである．幾何学的に見通しよくするために，さらに K_{ur} の π 進完備化 $K_0 = \widehat{K_{ur}}$ の上で考える．K_0 の整数環 $W = \widehat{O_K^{ur}}$ は π を素元とし，$\overline{\mathbb{F}}_q$ を剰余体とする完備離散付値環である[3]．このとき $K_m = K_m^\pi K_0$ とおくと，$K_{ab}K_0 = \bigcup_m K_m$ であり，自然な制限によって $\mathrm{Gal}(K_{ab}K_0/K_0) \cong \mathrm{Gal}(K_{ab}/K_{ur}) \cong O_K^\times$ である．さて，W 上では，**Lubin-Tate 群**（高さ 1 の形式 O_K 加群）$\widetilde{\Sigma}_1$ という形式群スキームが同形を除いて唯一つ

[2] この本は，Coleman の結果を用いることによって局所類体論を Lubin-Tate 理論を基礎として展開しており，岩澤健吉『局所類体論』（岩波書店）の英訳ではない．

[3] O_K が $\mathbb{Z}_p$ 上分岐しているときは，W は $\overline{\mathbb{F}}_q$ の Witt 環ではない．

に定まり，K_m は，$\widetilde{\Sigma}_1$ の生成ファイバー $\Sigma = (\widetilde{\Sigma}_1)_{K_0}$ の $\mathfrak{p}^m$-等分点 $\Sigma[\mathfrak{p}^m]$ を K_0 に付加することで得られる体，ということになるのである[4]．これを説明するために，形式 O_K 加群を考える．

3　形式 O_K 加群とその変形空間

$K, O_K, \mathfrak{p} = (\pi), k \cong \mathbb{F}_q, K_0 = \widehat{K_{ur}}, W = \widehat{O_K^{ur}}$ などの記号は前節の通りである．ここでは，形式 O_K 加群とその変形空間を定義する (Drinfeld [Dr])．

Definition 1.　(i) 単位元をもつ可換環 A に対し，A 上の（1 次元可換）**形式群** (formal group) とは，A 係数の 2 変数形式ベキ級数 $F(X,Y) \in A[[X,Y]]$ で，(1) $F(X,Y) \equiv X+Y \pmod{\deg \geq 2}$，(2) $F(F(X,Y),Z) = F(X,F(Y,Z))$，(3) $F(X,Y) = F(Y,X)$ の三つの条件をみたすものである．A 上の形式群 F, G に対し，準同形 $f : F \to G$ とは，(1) $f(F(X,Y)) = G(f(X), f(Y))$，(2) $f(0) = 0$ をみたす $f(X) \in A[[X]]$ のことである．

(ii) A を O_K 代数とする．A 上の**形式 O_K 加群** (formal O_K-module) とは，A 上の形式群 F と，単射環準同形 $[\cdot] : O_K \to \mathrm{End}(F)$ の組 $\Sigma = (F, [\cdot])$ であり，$\forall a \in O_K$ に対し，$[a](X) \equiv aX \pmod{X^2}$ をみたすものである．

Example 2.　(i) $A = \overline{\mathbb{F}}_q$ のとき，$\overline{\mathbb{F}}_q$ 上の形式 O_K 加群は**高さ** (height) $n \in \mathbb{N}_{>0} \cup \{\infty\}$ によって同形を除いて完全に分類される．$\Sigma = (F, [\cdot])$ の高さとは，$F \cong \mathbb{G}_a$ のときは ∞ とし，それ以外のときは，$[\pi](X) = u \cdot X^{q^n} \quad (u \in \overline{\mathbb{F}}_q[[X]]^\times)$ をみたす $n \in \mathbb{N}_{>0}$ である．この定義は π の選び方に依らない．$\overline{\mathbb{F}}_q$ 上の高さ n の形式 O_K 加群を一つ固定し，Σ_n で表す．

(ii) $\mathbb{G}_m/\overline{\mathbb{F}}_p$ は高さ 1 の形式 $\mathbb{Z}_p$ 加群である．$\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の超特異楕円曲線の形式群は，高さ 2 の形式 $\mathbb{Z}_p$ 加群である．

(iii) O_K 代数の間の O_K 準同形 $A \to B$ と A 上の形式 O_K 加群 Σ に対し，B 上の形式 O_K 加群 $\Sigma \otimes_A B$ が自然に定まる．

Definition 3. $\mathscr{C}$ を，W 上の完備 Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ で剰余体が $A/\mathfrak{m} \cong W/(\pi) \cong \overline{\mathbb{F}}_q$ となるもの全体のなす圏（射は W 上の局所準同形）とする．$(A, \mathfrak{m}) \in \mathscr{C}$ に対して：

(i) A 上の形式 O_K 加群 Σ に対し，$\Sigma \otimes_A (A/\mathfrak{m})$ の高さを，Σ の**高さ** (height) という．

(ii) A 上の高さ n の形式 O_K 加群 Σ と，同形 $i : \Sigma \otimes_A (A/\mathfrak{m}) \to \Sigma_n$ の組 (Σ, i) を，Σ_n の A への**変形** (deformation) という．2 つの変形の間の射は自然に定義される．

Proposition 4. (Drinfeld) $\mathscr{C}$ から集合の圏への共変関手 $\mathscr{F}_0$ を

$$\mathscr{F}_0(A) = \{\Sigma_n \text{ の } A \text{ への変形の同形類}\}$$

で定義すると，この関手は n 次元局所環 $A_0 = W[[T_1, \ldots, T_{n-1}]] \in \mathscr{C}$ によって表現される．このとき普遍対象を $\widetilde{\Sigma}_n/A_0$ で表す．

[4] これは円分体論・虚数乗法論の類似である．例えば，円分拡大 $\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q}$ は，$\mathbb{Q}$ 上の群スキーム $\mathbb{G}_m$ の N 等分点 $\mathbb{G}_m[N]$ を付加することで得られる．

すなわち，$\forall A \in \mathscr{C}$ に対して $\mathscr{F}_0(A) \cong \mathrm{Hom}_W(A_0, A)$ であり，A 上の任意の高さ n の形式 O_K 加群はある W 準同形 $f : A_0 \to A$ によって $\widetilde{\Sigma}_n \otimes_{A_0,f} A$ と同形である．

とくに，$n=1$ の場合 $A_0 = W$ であるから，Σ_1 の W への変形 $\widetilde{\Sigma}_1$（W 上の高さ 1 の形式 O_K 加群）は同形を除いて唯一に定まることがわかる．これが前節で述べた W 上の **Lubin-Tate 群**である[5]．

さて，今度は Lubin-Tate 群の $\mathfrak{p}^m$-等分点にあたるものの一般化を考えよう．$(A, \mathfrak{m}) \in \mathscr{C}$ とすると，A 上の形式 O_K 加群 Σ に対し，$\mathfrak{m}$ には Σ の演算 $(F, [\cdot])$ によって O_K 加群構造が定まる．これは，A が $\mathfrak{m}$ 進完備であることから，$\mathfrak{m}$ の元を A 係数形式的ベキ級数に代入しても収束して $\mathfrak{m}$ の元を定めるからである．この O_K 加群を $\mathfrak{m}_\Sigma$ で表す．

Definition 5. $(A, \mathfrak{m}) \in \mathscr{C}$ とするとき：

(i) A 上の高さ n の形式 O_K 加群 Σ に対し，O_K 加群の準同形 $\varphi : (O_K/\mathfrak{p}^m)^n \longrightarrow \mathfrak{m}_\Sigma$ で，

$$[\pi^m](X) = u \cdot \prod_{x \in (O_K/\mathfrak{p}^m)^n} (X - \varphi(x)) \qquad (u \in A[[X]]^\times) \tag{3.1}$$

をみたすものを，Σ の**レベル $\mathfrak{p}^m$ 構造** (level $\mathfrak{p}^m$-structure)[6] という．

(ii) Σ_n の A への変形 (Σ, i) と Σ のレベル $\mathfrak{p}^m$ 構造 φ の組 (Σ, i, φ) を，Σ_n の**レベル $\mathfrak{p}^m$ 構造つき変形** (deformation with level $\mathfrak{p}^m$-structure) という．2 つのレベル $\mathfrak{p}^m$ 構造つき変形の間の射は自然に定義される．

Example 6. $A = \overline{\mathbb{F}}_q$ のときは，$\mathfrak{m} = 0$ であるから，Σ_n のレベル $\mathfrak{p}^m$ 構造は $\varphi = 0$ のみである．（Σ_n においては，$[\pi^m](X) = u \cdot X^{q^{mn}}$ であることに注意.）

Proposition 7. (Drinfeld) $\mathscr{C}$ から集合の圏への共変関手 $\mathscr{F}_m$ を

$$\mathscr{F}_m(A) = \{\Sigma_n \text{ の } A \text{ へのレベル } \mathfrak{p}^m \text{ 構造つき変形の同形類}\}$$

で定義すると，この関手は n 次元局所環 $A_m \in \mathscr{C}$ によって表現される．レベル構造を忘却することによって定まる W 準同形 $A_0 \to A_m$ は有限平坦であり，普遍対象は $(\widetilde{\Sigma}_n \otimes_{A_0} A_m, i, \tilde{\varphi}_m)$ と書ける．さらに，$(O_K/\mathfrak{p}^m)^n$ の標準基底を $\{e_1, \ldots, e_n\}$，$X_i = \tilde{\varphi}_m(e_i) \in A_m$ とすると，A_m は $\{X_1, \ldots, X_n\}$ を正則パラメータとする完備正則局所環である．

さて，$\mathscr{F}_m$ には有限群 $GL_n(O_K/\mathfrak{p}^m)$ が右から自然に作用する（$g \in GL_n(O_K/\mathfrak{p}^m)$ に対し，$(\Sigma, i, \varphi) \longmapsto (\Sigma, i, \varphi \circ g)$）から，$A_m$ は $GL_n(O_K/\mathfrak{p}^m)$ の左作用をもつ．このとき，

Proposition 8. $\mathrm{Spec}\, A_m \otimes_W K_0 \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A_0 \otimes_W K_0$ は $GL_n(O_K/\mathfrak{p}^m)$ を Galois 群とする有限 Galois エタール被覆である．

今一度 $n=1$ の場合に戻って考えると，$\mathrm{Spec}\, A_0 \otimes_W K_0 = \mathrm{Spec}\, K_0$ であるから，$A_m \otimes_W K_0 / K_0$ は，$GL_1(O_K/\mathfrak{p}^m) = (O_K/\mathfrak{p}^m)^\times$ を Galois 群とする Galois 拡大であるということになる．A_m の

[5]一般の O_K 代数 A（例えば O_K）上でも，高さ 1 の形式 O_K 加群を Lubin-Tate 群という．

[6]楕円曲線などの等分点の通常のレベル構造と区別するために，この形式加群のレベル構造を **Drinfeld レベル構造** (Drinfeld level structure) と呼ぶのが一般的である．

定義は，$[\pi^m](X)$ の根（$\mathfrak{p}^m$-等分点）の集合に入る O_K 加群構造（$= O_K/\mathfrak{p}^m$ との O_K 同形），すなわち $\mathfrak{p}^m$-等分点の集合の O_K 加群としての生成元（その集合は $(O_K/\mathfrak{p}^m)^\times$-torsor）をモジュライすることになる．これを K_0 上で見ると，K_0 に Lubin-Tate 群 $\widetilde{\Sigma}_1 \otimes_W K_0$ の「原始」$\mathfrak{p}^m$-等分点たちを付加する（$= [\pi^m](X)$ の分解体を作る）ことになるわけである．

さて，われわれの興味は，このアフィンスキーム $\mathrm{Spec}\, A_m \otimes_W K_0$ を K_0 の代数閉包 $\overline{K}_0$ まで係数拡大したものの ℓ 進エタールコホモロジー群

$$H^i(\mathrm{Spec}\, A_m \otimes_W \overline{K}_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \tag{3.2}$$

にあるのだが，これを見るために，局所体上の代数多様体の ℓ 進エタールコホモロジーにおける Galois 表現について簡単に解説する．

4 消滅サイクルコホモロジー

一般に体 K 上の **Galois 表現**（ここでは，絶対 Galois 群 G_K の，標数 0 の代数閉体上の有限次元ベクトル空間への表現）を作るために最も広く使われている方法は，体 K 上の代数多様体（体 K 上の有限型スキーム）X を K の分離閉包 $\overline{K}$ まで係数拡大したものの ℓ 進エタールコホモロジー群

$$V = H^i(X_{\overline{K}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

（ℓ は K の標数と異なる素数）を考える方法である[7]．ここで $X_{\overline{K}}$ は $X \otimes_K \overline{K} = X \times_{\mathrm{Spec}\, K} \mathrm{Spec}\, \overline{K}$ の略記である．$X_{\overline{K}}$ には第二成分に G_K が作用するから，ℓ 進コホモロジー群の一般論により V は有限次元であり，自然に $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の Galois 表現 $G_K \to GL(V)$ が得られることになる．ここで G_K の元は，$X_{\overline{K}}$ に体 $\overline{K}$ 上の多様体としての射（幾何学的な射）として作用しているわけではないことに注意する．K が代数体または局所体の場合に，コホモロジー群への Galois 群の作用を，何らかの幾何学的な射の作用（群スキームの演算・虚数乗法・Hecke 対応など）に置き換えて理解するのが，円分体論・虚数乗法論以来の代数的整数論の一つの目標であるといっていいだろう．

例えば K が有限体 $\mathbb{F}_q$ の場合は，G_K は $\mathrm{Fr}_q : x \mapsto x^q$ で位相的に生成されるが，q 乗（相対）Frobenius 射 $F : X_{\overline{K}} \to X_{\overline{K}}$（これは $\overline{K}$ 上の多様体の射である）を考えると，$\mathrm{Fr}_q \circ F$ がエタールサイトの恒等射に自然同値な射（絶対 Frobenius）を引き起こすことから，$V = H^i(X_{\overline{K}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ への Fr_q の作用は F の作用の逆と一致する．この F の作用を Lefschetz の不動点公式で理解することにより，V への G_K の表現を理解するのが Grothendieck による方法である（Fr_q の作用の固有値が求まる）．

さて，X が局所体 K 上の多様体の場合を考えるときは，X を O_K 上の固有平坦スキームに延長して考えるのが有効である．ここで記号法を変更して，X を O_K 上の固有平坦スキームとし，その K への係数拡大を**生成ファイバー** (generic fiber) と呼び，$X_K = X \otimes_{O_K} K$ で表す．以下 X_K は完備非特異多様体であると仮定しよう．このとき O_K の剰余体への X の係数拡大を**特殊ファイバー** (special fiber) と言って $X_k = X \otimes_{O_K} k$ で表す．$\overline{O_K}$ を $\overline{K}$ における O_K の整閉包と

[7] 本節に現れる ℓ 進コホモロジーに関する基本的な定理はすべて [SGA4],[SGA4.1/2],[SGA7] において見つけることができる．

し，X_K, X, X_k の $\overline{O_K}$ への係数拡大をそれぞれ $X_{\overline{K}}, \overline{X}, X_{\overline{k}}$ で表し，ファイバーの包含射に次のように記号をつけよう：

$$\begin{tikzcd} X_{\overline{K}} \arrow[r, "\overline{j}"] \arrow[d] & \overline{X} \arrow[d] & X_{\overline{k}} \arrow[l, "\overline{i}"'] \arrow[d] \\ X_K \arrow[r, "j"] & X & X_k \arrow[l, "i"'] \end{tikzcd}$$

このとき，Leray スペクトル系列を

$$H^i(\overline{X}, R^j\overline{j}_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \Longrightarrow H^{i+j}(X_{\overline{K}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

という形に用い，また proper base change theorem を用いると，

$$H^i(\overline{X}, R^j\overline{j}_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong H^i(X_{\overline{k}}, \overline{i}^*R^j\overline{j}_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

となる．この $X_{\overline{k}}$ 上の ℓ 進エタール層 $\overline{i}^*R^j\overline{j}_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ を $R^j\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ で表し，**近接サイクル層** (nearby cycle sheaf) という[8]．このスペクトル系列を用いて，有限体上の多様体（の係数拡大）$X_{\overline{k}}$ 上の ℓ 進層のコホモロジーの計算に帰着するのが，$X_{\overline{K}}$ のコホモロジーの計算の基礎である．

さて，もし X が O_K 上滑らか（このとき X_k は k 上の完備非特異多様体）ならば

$$R^j\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell = \begin{cases} \overline{\mathbb{Q}}_\ell & (j=0) \\ 0 & (j \neq 0) \end{cases} \tag{4.1}$$

であることが示され (local acyclicity of smooth morphisms)，上のスペクトル系列は退化して，

$$H^i(X_{\overline{k}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong H^i(X_{\overline{K}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

となる (proper smooth base change theorem)．このとき左辺を全射 $G_K \to G_k$ によって G_K の表現とみなすと，両者は G_K の表現として同形である．このように $G_K \to G_k$ を経由する G_K の表現を**不分岐** (unramified) な Galois 表現という．

より興味深いのは X が O_K 上滑らかでない場合であり，このとき特殊ファイバー X_k は特異点をもつため，X_K は**悪い還元** (bad reduction) をもつ，という．対応する $V = H^i(X_{\overline{K}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ への Galois 表現は一般には分岐する，すなわち G_k を経由しないことになる．$G_K \to G_k$ の核，すなわち $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K_{ur})$ を K の**惰性群** (inertia group) といい I_K で表す：

$$1 \longrightarrow I_K \longrightarrow G_K \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_{ur}/K) \cong G_k \longrightarrow 1$$

さて，この場合に上で導入した近接サイクル層を用いたスペクトル系列

$$H^i(X_{\overline{k}}, R^j\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \Longrightarrow H^{i+j}(X_{\overline{K}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

を用いて右辺の Galois 表現を計算したい．$R^j\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ は $X_{\overline{k}}$ 上のエタール層だが，定義から惰性群 I_K の作用を持っているので，これによって $H^i(X_{\overline{K}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ の分岐した Galois 表現の情報を担って

[8] **消滅サイクル層** (vanishing cycle sheaf) は近接サイクル層とほぼ同じものを指す（R^0 のみが異なる）が，コホモロジーの名前としては，**消滅サイクルコホモロジー** (vanishing cycle cohomology) の方が一般的なようである．

いる．また，$R^j\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ はエタール層であるから局所的に計算することができ，上に述べたように $X_{\overline{k}}$ の点のうち，その近傍で X/O_K が滑らかであるような点では自明となるから，$X_{\overline{k}}$ の特異点における計算が特に重要になる．

それでは，$X_{\overline{k}}$ の幾何的点 x における近接サイクル層の茎 $(R^j\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_x$ とはどんなものだろうか．Zariski 位相の場合と同様に，エタール層の茎は局所環（この場合は強 Hensel 局所環）を用いて計算できる．つまり，x における $\overline{X}$ の強 Hensel 局所環の Spec を $\overline{X}_x$ とすると，これは O_K^{ur} 代数であり：

$$(R^j\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_x = (R^j\overline{j}_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_x = H^0(\overline{X}_x, R^j\overline{j}_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell) = H^j(\overline{X}_x \otimes_{O_K^{ur}} \overline{K}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

となる．これらはすべて I_K の表現としての同形である．これは，前節の末尾で見た形のエタールコホモロジー群に極めて近いことが分かるだろう．前節で現れたのは完備局所環の幾何的生成ファイバーのコホモロジーであった．ここで見たような O_K 上有限型スキームの強 Hensel 局所環 $\overline{X}_x$ の場合，その完備化の Spec を $\widehat{X}_x$ で表すと，これは $W = \widehat{O_K^{ur}}$ 代数であり，藤原-Gabber による近接サイクル層の formal invariance theorem ([Fu]) により，

$$H^j(\overline{X}_x \otimes_{O_K^{ur}} \overline{K}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong H^j(\widehat{X}_x \otimes_W \overline{K}_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

（$I_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_{ur}) \cong G_{K_0}$ の表現として同形）となるのである．

では，前節で導入した形式 O_K 加群の変形空間 $\mathrm{Spec}\, A_m$ は，O_K 上のある固有平坦スキーム X 上の幾何的点 x における強 Hensel 局所環の完備化になっているのであろうか？ 無論答えは然りであり，この X は Harris-Taylor によって構成されたユニタリ型志村多様体の整数環上のモデルであり，その超特異 Abel 多様体に対応する点 x を取るのである ([HT], Lemma III.4.1(1)).

5　非可換 Lubin-Tate 理論と志村多様体

さて，**非可換 Lubin-Tate 理論** (non-abelian Lubin-Tate theory) とは，3 節で定義した，$GL_n(O_K/\mathfrak{p}^m) \times I_K$ の作用をもつコホモロジー群：

$$H^i(\mathrm{Spec}\, A_m \otimes \overline{K}_0,\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

における $GL_n(O_K/\mathfrak{p}^m)$ および I_K の表現の対応から，尖点表現に対する局所 Langlands 対応が構成できることを予想するものであるが，本稿ではその構成法は省略する（それほど複雑なものではないので，是非 [Car] を参照されたい）．この予想は，おそらく Deligne および Drinfeld に端を発するものだが，もちろん適当に予想されたわけではない．その理由は，前節末尾に述べたように，このコホモロジーはある種の志村多様体の悪い還元の消滅サイクルコホモロジーとして自然に現れるものであり，代数体上の志村多様体のコホモロジーには大域 Langlands 対応が実現することが期待され（少なくともモジュラー曲線・志村曲線の場合には知られ）ていたからである．モジュラー曲線の場合（すなわち，$K = \mathbb{Q}_p$, $n = 2$ の場合）には，この幾何学的実現は Katz-Mazur による整数環上のモデルの構成によって確認される．これを簡単に見ておこう．

$SL_2(\mathbb{Z})$ のレベル N の主合同部分群 $\Gamma(N) = \{A \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid A \equiv 1_n \pmod N\}$ による上半平面の商空間 $\Gamma(N)\backslash\mathfrak{h}$ を尖点でコンパクト化したリーマン面は，自然に $\mathbb{Q}$ 上のモジュラー曲線

$X(N)$ の幾何学的連結成分の $\mathbb{C}$ 有理点の集合とみなせる．このモジュラー曲線は自然なモジュライ解釈を持ち（楕円曲線とそのレベル N 構造のモジュライ），自然に $\mathbb{Z}[1/N]$ 上の固有かつ滑らかなスキームに延長できる．これを N を割る標数にまで延長するためには，3 節に紹介した Drinfeld レベル構造を用いればよい．これを展開したのが Katz-Mazur[KM] であり，大まかに以下のように行う．$N = N'p^m$，$(p, N') = 1$ とし，$X(N')$ が精モジュライとなるように N' を充分大きく取っておく．$X(N')$ は固有かつ滑らかな $\mathbb{Z}_p$ 上のモデル X' を持つ．さて，楕円曲線のモジュライの完備局所環を考えることは，楕円曲線の変形空間を考えることであるが，これは Serre-Tate の定理により，楕円曲線の Barsotti-Tate 群（p-可除群）の変形を考えることと同値である．さらに，楕円曲線が超特異ならばその Barsotti-Tate 群は連結で，形式群の変形を考えることと同値になる．そこで，ある $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の超特異楕円曲線に対応する X' の特殊ファイバー上の幾何的点 x' を取ると，$\widehat{X'}_{x'}$ は高さ 2 の形式 $\mathbb{Z}_p$ 加群の変形空間 $\operatorname{Spec} A_0 = \operatorname{Spec} W[[T]]$ に同形である．さて，Katz-Mazur は，$X(N)$ の正則かつ $\mathbb{Z}_p$ 上固有なモデル X を，X' 上の普遍楕円曲線 E に対応する X 上の Barsotti-Tate 群のレベル p^m 構造のモジュライ空間として構成する．これを局所的に見ると，有限平坦被覆 $X \to X'$ による $\widehat{X'}_{x'}$ の逆像は $\operatorname{Spec} A_m$ に他ならない．Σ_2 に入るレベル p^m 構造は 0 のみであるから，x' の逆像は 1 点 $x \in X$ であり，$\operatorname{Spec} A_m \cong \widehat{X}_x$ となる．X を $\mathbb{Z}_p[\zeta_N]$ 上正規化しておく（[KM] の $\Gamma[N]^{\mathbb{Z}[\zeta_N]\text{-can}}$ 構造）と，特殊ファイバーの特異点は超特異楕円曲線に対応する点だけになり，その各点での消滅サイクルコホモロジーは，3 節で扱ったコホモロジー群となる．

さて，$\mathbb{Q}$ 上のモジュラー曲線のコホモロジー群

$$\varinjlim_N H^1(X(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

には Eichler-志村対応によって重み 2 の正則固有保型形式に対応する $GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の保型表現 $\pi = \otimes_v \pi_v$ と $G_\mathbb{Q}$ の 2 次元表現 ρ の間の大域 Langlands 対応が実現しているわけだが，その素数 p での局所的な対応，すなわち $\pi_p \longleftrightarrow \rho|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ の局所 Langlands 対応は，$X(N)_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ のコホモロジー群に実現している．これが前節の一般論が適用される対象であり，$N = N'p^m$ のときは $X(N)$ は p で悪い還元をもつから，$X(N)$ の Katz-Mazur モデル $X/\mathbb{Z}_p$ を用いてスペクトル系列

$$H^i(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}, R^j\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \Longrightarrow H^{i+j}(X(N)_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

を考えなくてはならない．これを具体的に書くと，完全系列

$$0 \longrightarrow H^1(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}, R^0\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow H^1(X(N)_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow H^0(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}, R^1\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow H^2(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}, R^0\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

を得るが，前段落の最後に述べたことから，$(R^1\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_x \neq 0$ となる点 x は超特異楕円曲線に対応する点だけである．よって，

$$H^0(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}, R^1\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \bigoplus_{x\,:\,\text{s.sing.}} (R^1\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_x = \bigoplus_{x\,:\,\text{s.sing.}} H^1(\operatorname{Spec} A_m \otimes \overline{K}_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \tag{5.1}$$

となり，(3.2) のコホモロジー群が，局所体上のモジュラー曲線のコホモロジーの一部を与えていることが分かる．さて，上のような完全系列は $N = N'p^m$ の m を動かしたときに可換図式を作っているから，

$$\varinjlim_m H^1(X(N'p^m)_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

から復元される局所 Langlands 対応において，$GL_2(\mathbb{Q}_p)$ のどの既約許容表現がどの部分に現れるかを考察することができる．さて，X の $\mathbb{Z}_p[\zeta_N]$ 上の正規化の特殊ファイバーの各既約成分（井草曲線）のラベルに注目すると，$H^1(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}, R^0\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ の部分から得られるのは $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ の放物型部分群から誘導される表現だけであることが分かる．このようにして，尖点表現に関する局所 Langlands 対応は，上で見た，(5.1) の部分に本質的に現れていると考えられるのである.（もちろん，大域 Langlands 対応が悪い素点において局所 Langlands 対応と互換性があることは自明なことでなく，大域的な議論を用いて GL_1（類体論）の場合に帰着しなくてはならない.）

これは本質的に，Deligne の手紙 [Del] において観察されていたことであり，後に Hilbert モジュラー形式（総実代数体上の志村曲線のコホモロジー）に拡張する形で Carayol[Car2] によって，またユニタリ型志村多様体のコホモロジーに拡張する形で Harris-Taylor[HT] に応用された議論である．本節で紹介したモジュラー曲線に関する議論から類推されるように，Harris-Taylor は，CM 体上のユニタリ型志村多様体のコホモロジーにおける大域 Langlands 対応と局所 Langlands 対応（任意の局所体 K 上の GL_n）との互換性を示し，局所体上の志村多様体のコホモロジーを Katz-Mazur 型モデルの特殊ファイバーの幾何学を用いて分解していくことで，尖点表現に関する局所 Langlands 対応は，超特異 Abel 多様体に対応する点の消滅サイクルコホモロジー，すなわち (3.2) から得られる部分に実現していなくてはならないことを示したのである．その意味では，非可換 Lubin-Tate 予想の「結果」は証明された．しかし，形式 O_K 加群のレベルつき変形空間という単純な局所的定義をもつ対象から局所 Langlands 対応が構成されることの本当の理由を洞察するためには，やはり純局所的な証明が待たれているというべきであろう.

6　$m = 1$ の場合：Deligne-Lusztig 理論を用いた局所的アプローチ

さて，この単純な定義を持つ形式 O_K 加群の変形空間 Spec A_m の消滅サイクルコホモロジー群であるが[9]，何とか大域的な方法を使わず，純局所的に計算できないものだろうか．ここでは，$m = 1$ の場合に数論幾何的な方法でこれを計算する方法を述べる.

まず，ここで得られる幾何学的な結果の表現論・整数論的な背景を述べよう．非可換 Lubin-Tate 理論においては $\varinjlim_m H^i(\mathrm{Spec}\, A_m \otimes \overline{K}_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を考える（とくに $i = n-1$ が最も重要である）が，この直極限を $GL_n(O_K)$ の表現と考えるならば，$H^i(\mathrm{Spec}\, A_m \otimes \overline{K}_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ は部分群 $1_n + M_n(\mathfrak{p}^m)$ に関する不変空間である．とくに，$m = 1$ の場合 Spec A_1 のコホモロジーには，$1_n + M_n(\mathfrak{p})$-不変ベクトルを持つような $GL_n(K)$ の尖点表現の，$1_n + M_n(\mathfrak{p})$-不変空間への $GL_n(O_K/\mathfrak{p}) = GL_n(k)$ の表現が見えるはずである．このような $GL_n(K)$ の尖点表現は，**深さ 0** (depth 0) の尖点表現と呼ばれ，$GL_n(k)$ の尖点表現（放物型部分群からの誘導表現の部分商として現れないような既約表現）を $GL_n(O_K)$ に引き戻してから $GL_n(K)$ にコンパクト誘導して得られるものであるから，$H^i(\mathrm{Spec}\, A_1 \otimes \overline{K}_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ には $GL_n(k)$ の尖点表現が現れることが期待される．$GL_n(k)$ の尖点表現は Green によって 50 年代に分類されており，k の n 次拡大 $k_n = \mathbb{F}_{q^n}$ の乗法群 $k_n^\times$（$GL_n(k)$ の中のトーラス）の generic[10]指標 $\chi : k_n^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ の $\mathrm{Gal}(k_n/k)$-軌道 $\{\chi, \chi^q, \ldots, \chi^{q^{n-1}}\}$ と 1 対 1 に対応す

[9] 単純ではない，難解だという意見もありそうだが，$GL_n(K)$ の尖点表現の具体的な構成の複雑さを考えると，すべての尖点表現を生み出す力があることは驚くべきことだと思われる.

[10] ここでは，指標が generic であるとは，その $\mathrm{Gal}(k_n/k)$-軌道が n 個の相異なる元をもつことである.

る（MacDonald 対応）．この対応で χ に対応する尖点表現 π_χ は，$GL_n(k)$ の Steinberg 表現（Borel 部分群の自明表現からの誘導に含まれる非自明な既約表現）St を用いると，$\pi_\chi \otimes \mathrm{St} \cong \mathrm{Ind}_{k_n^\times}^{GL_n(k)} \chi$ で特徴づけられる．

一方，この場合に局所 Langlands 対応：

$$\{GL_n(K)\ の既約尖点表現\} \longleftrightarrow \{W_K\ の既約\ n\ 次元表現\}$$

を考える．ここで W_K は $G_K \to G_k \cong \widehat{\mathbb{Z}}$ による $\mathbb{Z}$ の逆像（K の **Weil 群** Weil group）である[11]．GL_n 側を不分岐指標によるひねりについて同一視する（$\chi : K^\times \to K^\times/O_K^\times \cong \mathbb{Z} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ に対して，π と $\pi \otimes (\chi \circ \det)$ を同一視する）と，対応する W_K の既約表現の I_K への制限が一意に定まるはずである．これは，上の MacDonald 対応から容易に想像されるように，$k_n^\times$ の generic 指標を経由するような I_K の**馴分岐** (tamely ramified) 指標[12]$\chi : I_K \to k_n^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ の $\mathrm{Gal}(k_n/k)$-軌道の直和に他ならない．これが W_K の既約 n 次元表現の I_K への制限になっている理由は次の通りである．K の n 次不分岐拡大 L を取ると，$I_K = I_L$ の $k_n^\times$ の generic 指標を経由する馴分岐指標 χ を，W_L の指標 $\tilde{\chi}$ に延長でき[13]，$\mathrm{Ind}_{W_L}^{W_K} \tilde{\chi}$ が W_K の既約 n 次元表現を与える．W_K の馴分岐な既約表現はこの形のもので尽くされる．

以上のことから期待される結果は,

Theorem 9. $GL_n(k) \times I_K$ の表現として，

$$H^{n-1}(\mathrm{Spec}\, A_1 \otimes \overline{K}_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \Big(\bigoplus_\chi \pi_\chi \otimes \chi\Big) \oplus \rho$$

となる．ここで χ はすべての $I_K \to k_n^\times$ の generic 指標を走り，$GL_n(k)$ の尖点表現および $I_K \to k_n^\times$ の generic 指標は ρ には現れない．

というものであり，これは局所的な数論幾何学によって，Deligne-Lusztig 理論 [DL]（有限体 k 上の簡約代数群 G の表現に関する MacDonald 対応を，$\overline{k}$ 上の滑らかなアフィン多様体のコンパクト台エタールコホモロジーの中に実現する理論）に帰着して示すことができるのである ([Y])．その概要を以下に説明する．これは，5 節で概観した，志村多様体の消滅サイクルコホモロジーとそれに現れる表現の分析の手法を，より局所的な状況に応用するものである．

$X = \mathrm{Spec}\, A_m$ のような局所 W 代数の消滅サイクルコホモロジー $H^i(X \otimes \overline{K}_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を計算するためには，その良いモデルを作ればよい．ここで，W 上のスキーム X の**モデル**とは，固有射 $f : X' \to X$ で，生成ファイバーへの制限 $X' \otimes_W K_0 \longrightarrow X \otimes_W K_0$ は同形射となるものを指す．$x \in X$ を閉点，$f^{-1}(x) = Y \subset X'$ とすると，proper base change theorem によって

$$H^i(Y, R^j\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \Longrightarrow (R^{i+j}\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_x = H^{i+j}(X \otimes \overline{K}_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

---

[11]離散位相を入れた $\mathbb{Z}$ への全射が連続となるように，G_K からの誘導位相よりも強い位相を入れる．

[12]I_K の最大 pro-p 部分群 P_K（**暴惰性群** wild inertia group）による商は**馴惰性群** (tame inertia group) と呼ばれ，$I_K/P_K \cong \varprojlim_{n,} k_n^\times$（$n' \mid n$ に対するノルム写像 $N_{k_n/k_{n'}}$ に関して逆極限をとる）である．馴分岐指標はある n に対して $k_n^\times$ の generic 指標をを経由する．

[13]局所類体論により $W_L^{ab} \cong L^\times$ で，$(O_L/\mathfrak{p}_L)^\times \cong k_n^\times$．

というスペクトル系列ができ，X' が充分に幾何学的に単純であれば，Y 上の $R^j\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ が計算できることがある．例えば，X' が**一般半安定還元** (generalized semistable reduction) をもつ，すなわち特殊ファイバー $X'_{\overline{k}} = X' \otimes_W \overline{k}$ の任意の点 $x \in X'_{\overline{k}}$ に対して x における完備局所環が

$$W[[T_1, \dots, T_n]]/(\pi - T_1^{e_1} \cdots T_d^{e_d}), \quad (p, e_i) = 1 \ \ (1 \leq i \leq d)$$

に同形であるときは，次のような定理を用いることができる（モデル X' が W 上の有限型スキームから来ることを仮定する）：

Theorem 10. （斎藤毅 [Sa], Prop. 6）一般半安定還元を持つ X' に対し，$X'_{\overline{k}}$ の既約成分の集合を $\{Y_i\}_{i\in I}$，Y_i の $X'_{\overline{k}}$ における重複度を d_i とする．I の有限部分集合 J に対して $Y_J = \bigcap_{i\in J} Y_i$，$Y_J^0 = Y_J \setminus \bigcup_{i\notin J} Y_i$ とおき，$\{d_i\}_{i\in J}$ の最大公約数を d とおく．このとき $R^j\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{Y_J^0}$ は階数 $d \cdot \binom{|J|-1}{j}$ の滑らかな $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-層であり（$j > |J|-1$ のときは $\binom{|J|-1}{j} = 0$ とおく），I_K の作用は，$I_K \to \mu_d$ を経由する．さらに，$|J| \neq 1$ ならば，$R^j\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{Y_J^0}$ の交代和は 0 である：

$$\sum_j (-1)^j [R^j\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{Y_J^0}] = 0.$$

ここで交代和は I_K の作用をもつ滑らかな $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-層の Grothendieck 群で考える．

さて，$\mathrm{Spec}\, A_1$ の良いモデルの構成は以下のように行う．レベル $\mathfrak{p}$ 構造の定義式 (3.1) の最初の係数（X の係数）に注目し，Prop. 7 による A_1 の正則パラメータ $X_1, \dots, X_n$ の定義を用いると，A_1 において，

$$\pi = u \cdot \prod_{\underline{a}\in k^n\setminus\{\underline{0}\}} \big([a_1](X_1) +_{\widetilde{\Sigma}} \cdots +_{\widetilde{\Sigma}} [a_n](X_n)\big), \qquad u \in A_1^\times$$

という関係式があることが分かる．ここで，$\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$，$\underline{0} = (0, \dots, 0)$ であり，$[a_i]$ および $+_{\widetilde{\Sigma}}$ は普遍形式加群 $\widetilde{\Sigma}_n$ の演算を表す．これによって，適当な $\widetilde{\Sigma}_n$ の $W[[\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n]]$ への持ち上げを用いると，A_1 を

$$A_1 \cong W[[\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n]]/(\pi - P(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n))$$

という形に書くことができる．ここで P は W 上の形式的ベキ級数で，$a_i \in k$ を $\widetilde{a}_i \in \mu_{q-1} \cup \{0\} \subset O_K$ に持ち上げておくと，

$$P(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n) = u \cdot \prod_{\underline{a}\in k^n\setminus\{\underline{0}\}} \big(\widetilde{a}_1\widetilde{X}_1 + \cdots + \widetilde{a}_n\widetilde{X}_n + (\text{高次の項})\big), \qquad u \in W[[\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n]]^\times \quad (6.1)$$

の形に書ける．この具体的な表示から出発してモデルの構成を行うのだが，方程式の形から，$\mathrm{Spec}\, A_1$ の特殊ファイバーには $(a_1 : \cdots : a_n) \in \mathbb{P}^{n-1}(k)$ に対応して既約成分が $(q^n-1)/(q-1)$ 個あり，各成分は重複度 $q-1$ を持つことが分かる．そこで閉点 x を一度ブローアップすると重複度 q^n-1 の新しい既約成分 $\mathbb{P}^{n-1}/\mathbb{F}_q$ が現れ，これに $(\widetilde{X}_1 : \cdots : \widetilde{X}_n)$ で定まる射影座標を考えると，他の既約成分は $\mathbb{P}^{n-1}$ と各 $\mathbb{F}_q$-有理的な超平面で交わっていることが分かる．また，$X_1, \dots, X_n$ と $GL_n(k)$ の作用の定義から，$GL_n(k)$ は射影座標に線形変換で作用する．これらの交わりをさ

らにブローアップしていくことによって一般半安定還元モデルを作ることができ，これに上記 Theorem 10 を適用する．そうすると，他の既約成分の重複度が q^k-1 $(k<n)$ であることから，

$$Y_0=\mathbb{P}^{n-1}\setminus\bigcup\{\text{ すべての }\mathbb{F}_q\text{-有理的な超平面 }\}$$

の上を除くと，(1) $R^j\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ の交代和は 0 であり，また (2) $R^j\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ に $I_K\to k_n^\times\cong\mu_{q^n-1}$ の generic 指標は現れないことが分かる．また，$\mathbb{F}_q$-有理的なアフィン部分空間上の $R^j\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ には $GL_n(k)$ の放物型部分群が作用し，$\mathbb{P}^{n-1}\setminus Y_0$ 上のコホモロジーは $GL_n(k)$ の放物型誘導表現であることから，(3) $GL_n(k)$ の尖点表現も $H_c^i(Y_0,R^j\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$（コンパクト台コホモロジー）にしか現れないことが分かる．

残るのはこの $H_c^i(Y_0,R^j\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ の計算であるが，この Y_0 の部分は，W の q^n-1 次馴分岐拡大 $W_n=W(\pi_n)$（$\pi_n=\pi^{1/(q^n-1)}$) まで係数拡大して正規化すると W 上滑らかになり，特殊ファイバーが $\overline{\mathbb{F}}_q$ 上の $n-1$ 次元非特異アフィン多様体になるのである．この計算は大まかには次の通りである．方程式 $\pi-P(\widetilde{X}_1,\dots,\widetilde{X}_n)=0$ に $\widetilde{X}_i=\pi_nX'_i$ という変数変換を行い，(6.1) を用いると，

$$\pi-\pi_n^{q^n-1}\cdot\prod_{\underline{a}\in k^n\setminus\{\underline{0}\}}(a_1X'_1+\cdots+a_nX'_n)+(\pi_n^{q^n}\text{で割れる部分})=0$$

という形になり，$\pi_n^{q^n-1}$ で割って mod π_n すると，

$$1-\prod_{\underline{a}\in k^n\setminus\{\underline{0}\}}(a_1X'_1+\cdots+a_nX'_n)=0$$

という $\overline{\mathbb{F}}_q$ 上の非特異アフィン多様体の定義方程式を得る．このアフィン多様体を DL と表しておくと，もともとの馴惰性群 $I_K\to k_n^\times=\mu_{q^n-1}\cong\mathrm{Gal}(W_n/W)$ の作用：

$$\pi_n\longmapsto\zeta\pi_n\quad(\zeta\in\mu_{q^n-1},\quad I_K\to\mu_{q^n-1})$$

は，DL の座標環に対する $X'_i\longmapsto\zeta^{-1}X'_i$ という幾何的な作用に置き換えられ，DL への $GL_n(k)$ の作用は列ベクトル ${}^t(X'_1,\dots,X'_n)$ に対する線形変換である．この W_n 上のモデルの近接サイクル層は特殊ファイバーの DL の部分では自明 (4.1) であり，DL は $(X'_1,\dots,X'_n)\longmapsto(X'_1:\cdots:X'_n)$ によって Y_0 上の Galois エタール被覆（Galois 群は $k_n^\times$）になっているから，$j\neq0$ に対しては $R^j\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{Y_0}=0$ で，$H_c^i(Y_0,R^0\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\cong H_c^i(DL,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ となる．以上によって，コホモロジーの交代和を，$GL_n(k)\times k_n^\times$ の $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の有限次元表現のなす Grothendieck 群において

$$H^*(\mathrm{Spec}\,A_1\otimes\overline{K}_0)=\sum_i(-1)^i[H^i(\mathrm{Spec}\,A_1\otimes\overline{K}_0,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)],\quad H_c^*(DL)=\sum_i(-1)^i[H_c^i(DL,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)]$$

とおくとき，

Theorem 11. $H^*(\mathrm{Spec}\,A_1\otimes\overline{K}_0)=H_c^*(DL)$.

このような幾何学的操作によって，問題は DL のコホモロジー群への $GL_n(k)\times k_n^\times$ の作用に帰着されるが，Deligne-Lusztig[DL] によって $H_c^{n-1}(DL,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ に MacDonald 対応が実現し，さらに $H_c^i(DL,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ $(i\neq n-1)$ には $GL_n(k)$ の尖点表現が現れないことが示されており，Theorem 9 は Deligne-Lusztig 理論から直接に従うのである．

参考文献

[Car] H. Carayol, *Non-abelian Lubin-Tate theory*, in: *Automorphic Forms, Shimura Varieties, and L-functions* (Academic Press, 1990), pp.15-39.

[Car2] H. Carayol, *Sur les représentations ℓ-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sci. E.N.S. **19** (1986), 409-468.

[Del] P. Deligne, *Letter to Piatetski-Shapiro* (1973).

[DL] P. Deligne, G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, Ann. of Math. **103** (1976), 103-161.

[Dr] V. Drinfeld, *Elliptic modules*, Math. USSR Sbornik **23-4** (1974), 561-592.

[Fu] K. Fujiwara, *Theory of tubular neighborhoods in etale topology*, Duke Math. J. **80-1** (1995), 15-57.

[H] M. Harris, *On the local Langlands correspondence*, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Beijing 2002, Vol II, 583-597.

[HT] M. Harris, R. Taylor, *The Geometry and Cohomology of Some Simple Shimura Varieties*, Ann. of Math. Studies 151, Princeton Univ. Press, Princeton-Oxford, 2001.

[Iw] K. Iwasawa, *Local Class Field Theory*, Oxford Univ. Press, 1986.

[KM] N. Katz, B. Mazur, *Arithmetic Moduli of Elliptic Curves*, Ann. of Math. Studies **108**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1985.

[Sa] T. Saito, *ε-factor of a tamely ramified sheaf on a variety*, Invent. Math. **113** (1993), 389-417.

[SGA4] A. Grothendieck, et al., *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4)*, Lecture Notes in Math. **269**,**270**,**305**, Springer, 1972/73.

[SGA4.1/2] P. Deligne, et al., *Cohomologie Etale (SGA 4.1/2)*, Lecture Notes in Math. **569**, Springer, 1977.

[SGA7] A. Grothendieck, et al., *Groupes de Monodromie en Géometrie Algébrique (SGA 7)*, Lecture Notes in Math. **288**,**340**, Springer, 1972/73.

[Y] T. Yoshida, *On non-abelian Lubin-Tate theory via vanishing cycles*, Ph.D. thesis, University of Tokyo, math.NT/0404375, 2004.