

吉田輝義 (YOSHIDA Teruyoshi)

A. 研究概要

私の研究上の興味は代数的整数論とその数論幾何学的手法による拡張と深化にあり、類体論の非可換化・高次元化を中心に研究している。今年度は非可換 Lubin-Tate 理論への局所的アプローチについて研究を行い、新しく得た結果について博士論文をまとめた ([3])。なお、2001 年度に研究した局所体上の代数多様体の類体論 (アーベル的エタール被覆の理論) についての論文を出版した ([2])。

1. 非可換 Lubin-Tate 理論への局所的アプローチ。類体論の非可換化は現在 Langlands 対応として定式化されており、非可換局所類体論にあたる局所 Langlands 対応は一般線形群の場合に大域的な手法を用いて近年証明された (Harris-Taylor, Henniart, 1999) が、局所体上の理論として十分に理解されたとは言いがたい。この理論への純局所的アプローチの研究を以下に要約する。本年度は主に Drinfeld によって定義されたレベルつき形式加群の変形環を研究した。これは Harris-Taylor によって詳しく研究されたタイプのユニタリ志村多様体の悪い素点での特殊ファイバーの特異点における完備局所環として現れるものである。この変形環の ℓ 進消滅サイクルコホモロジーには、局所体上の一般線形群の supercuspidal 表現と既約 Galois 表現の間の局所 Langlands 対応が実現される (非可換 Lubin-Tate 理論)。Harris-Taylor による局所 Langlands 対応の証明の過程で、大域 Langlands 対応を用いた手法でこのコホモロジーの交代和は明らかになったが、コホモロジー群にこのように興味深い表現が現れることの局所的な幾何学的説明は知られていない。本年度の私の研究によって、レベルが最も低い (レベル π) 場合に、特異点をブローアップしたモデルの特殊ファイバーに Deligne-Lusztig 多様体が見れることがわかり、生成ファイバーのコホモロジーにおける局所 Langlands 対応の実現がこの場合には純粋に局所的な手法で説明されたため、この成果について博士論文を執筆した ([3])。この場合の Deligne-Lusztig 多様体は、その ℓ 進コホモロジーに有限体上の一般線形群の cuspidal 表現 (局所体の最低レベルの supercuspidal 表現を誘導する) がすべて現れるような有限体上の非特異代数多様体であり、Deligne-Lusztig 理論における、

non-split torus の指標と cuspidal 表現の間の対応が、この場合の Galois 表現と supercuspidal 表現の間の Langlands 対応を誘導している。また、この場合変形環の一般半安定モデルを得たため、非可換 Lubin-Tate 理論が Deligne-Lusztig 理論と本質的に等価になることが示された。またこの研究において、一般のレベルの変形環のべき級数を用いた明示的な定義方程式を得たため、局所 Langlands 対応のさまざまな関手性の幾何学的な理解を研究中であり、局所 Langlands 対応を大域的理論を用いずに局所体上の数論幾何学として構成するための試みともいえる。たとえば、生成ファイバーの連結成分を決定するだけでもいくつかの応用があることが知られている。

2. ユニタリ型志村多様体の悪い還元について。上の研究はユニタリ型志村多様体の数論幾何学にいくつかの新しい理解をもたらしている。まず、レベル π の場合の変形環のブローアップによる一般半安定還元構成は対応するユニタリ型志村多様体の一般半安定還元を与えることが示され、この場合には原理的に Deligne-Lusztig 理論によって局所体上の志村多様体のコホモロジーが計算できる。また、局所環の定義方程式の決定は、一般のレベル構造 ($\Gamma_0(N), \Gamma_1(N)$ 構造の一般化) に対応するユニタリ志村多様体の整数環上のモデルの構成・理解に応用できる。これはモジュラー曲線の場合の Katz-Mazur の研究を一般次元に拡張するものであり、大域的な代数的整数論へのさまざまな応用が期待される。とくに岩堀部分群に対応する半安定還元の場合に、モノドロミー作用素に関する大域 Langlands 対応と局所 Langlands 対応の間の compatibility への応用を Richard Taylor と共同で研究している。

My research interest is focused on algebraic number theory and its extensions by the methods of arithmetic geometry, and currently I am working on higher dimensional or non-abelian version of class field theory. This year I studied a local approach on non-abelian Lubin-Tate theory and wrote the Ph.D. thesis on newly obtained result ([3]). Also, I published a paper on the class field theory of varieties (the theory of abelian etale coverings) over local fields, which I studied in 2001 ([2]).

1. A local approach to the non-abelian Lubin-Tate theory .

The non-abelianization of class field theory is formulated as the Langlands correspondence, and the local Langlands correspondence for general linear groups (the non-abelian local class field theory) was proven recently using global methods (Harris-Taylor, Henniart, 1999), but it is hard to be said that we have thorough understanding as a theory over local fields. We give a summary on the study of a purely local approach to this theory in the following. This year I studied mostly the deformation rings of formal module with level structures, originally defined by Drinfeld. This ring appears as a complete local ring at the singular points of the special fiber of the bad reduction of unitary Shimura varieties of the type studied in detail by Harris-Taylor. On the ℓ -adic vanishing cycle cohomology groups of this deformation ring, the local Langlands correspondence between supercuspidal representations of general linear groups over local fields and irreducible Galois representations is realized (non-abelian Lubin-Tate theory). In the work of Harris-Taylor, in the course of the proof of the local Langlands correspondence, its alternating sum of cohomology groups was clarified using global methods, but we do not have a local geometric explanation of the reason why we see these interesting representations inside the cohomology groups. In my work this year, we showed that, in the lowest level (level π) case, a Deligne-Lusztig variety for GL_n appears in the special fiber of a model obtained by blowing up the singularity, therefore giving the local proof of the realization of the local Langlands correspondence inside the cohomology of the generic fiber, and I wrote the Ph.D. thesis on this subject ([3]). The Deligne-Lusztig variety in this case is a smooth variety over the finite field such that the cuspidal representations of GL_n over the finite field (which induce supercuspidal representations of the lowest level over the local field) are realized inside its ℓ -adic cohomology groups, and the correspondence in the Deligne-Lusztig theory between the characters of non-split torus and the cuspidal represen-

tations will induce the Langlands correspondence between the Galois representations and the supercuspidal representations in this particular case. Also, in this case we obtain a generalized semistable model of the deformation ring, which shows that the non-abelian Lubin-Tate theory in this case is essentially equivalent to the Deligne-Lusztig theory. As we obtained explicit defining equations in terms of power series of the deformation rings of arbitrary levels in this study, I am trying to understand various functorialities of the local Langlands correspondence, as an attempt to construct the local Langlands correspondence in terms of the local arithmetic geometry without global methods. For example, it is known that determining the geometric connected components of the generic fiber will have some applications.

2. On the bad reduction of unitary Shimura varieties .

Above study sheds some new light on the arithmetic geometry of unitary Shimura varieties. First, the construction of the generalized semistable model of the deformation ring by blow-ups gives the generalized semistable model of the corresponding unitary Shimura variety by a similar process, which in turn enables us to compute the cohomology of Shimura varieties over local fields using Deligne-Lusztig theory. Also, the determination of the defining equation of the local ring can be applied to the study of integral models of unitary Shimura varieties corresponding to more general level structures (generalizations of $\Gamma_0(N), \Gamma_1(N)$ structures). This generalizes the work of Katz-Mazur in the modular curve case to general higher dimensions, and applications to global algebraic number theory are expected. In particular, in the semistable case corresponding to the Iwahori subgroup level structure, I am studying the compatibility between global and local Langlands correspondences concerning the monodromy operators (collaboration with Richard Taylor).

B. 発表論文

1. *Abelian étale coverings of curves over local fields and application to modular curves,*

Preprint, University of Tokyo, 2002.

2. *Finiteness theorems in the class field theory of varieties over local fields*, J. of Number Theory **101-1** (2003) 138-150, 2003.
[http://dx.doi.org/10.1016/S0022-314X\(03\)00018-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0022-314X(03)00018-0)
3. *On non-abelian Lubin-Tate theory via vanishing cycles*, Ph.D. thesis, University of Tokyo, 2004.
9. Non-abelian Lubin-Tate theory and Deligne-Lusztig theory, 整数論シンポジウム, 早稲田大学, March 2004.

C. 口頭発表

1. Class field theory of curves over local fields and applications, Advanced Course on Modular Forms and p -adic Hodge Theory, Centre de Recerca Matemàtica, Barcelona, Spain, July 2001.
2. On class field theory of curves over local fields, Algebra Seminar, University of South California, USA, November 2001.
3. Finiteness theorem in class field theory of varieties over local fields, Arithmetic Seminar, University of Michigan, USA, November 2001.
4. Class field theory for curves over local fields and $X_0(p)$ over \mathbb{Q}_p , Modular Curves and Modular Forms Seminar, Harvard University, USA, March 2002
5. 局所体上の代数曲線の類体論と modular curve, 代数学コロキウム, 東京大学数理学研究科, June 2002
6. Class field theory for curves over local fields, Algebraic & Complex Geometry / Number Theory Seminar, Johns Hopkins University, USA, October 2002.
7. Non-abelian Lubin-Tate theory and Deligne-Lusztig theory, 数論幾何学シンポジウム, 北海道大学, November 2003.
8. Non-abelian Lubin-Tate theory and Deligne-Lusztig theory for GL_n , Number Theory Seminar, Harvard University, USA, February 2004.