

吉田輝義 (YOSHIDA Teruyoshi)

A. 研究概要

私の研究上の興味は代数的整数論とその数論幾何学的手法による拡張と深化にあり、現在はとくに類体論の高次元化・非可換化を研究している。今年度は局所体・代数体上の代数多様体の類体論（アーベル的エタール被覆の理論）について研究を行い、局所体上の場合にいくつかの新結果を得たので2つの論文を執筆し ([1],[2])、これらを修士論文とした。以下、局所体 K とは剰余体 F が標数 p の有限体であるような完備離散付値体を意味する。

1. 局所体上の代数多様体の類体論における有限性定理。本論文では、局所体 K 上の完備非特異代数多様体 X のアーベル基本群 $\pi_1^{ab}(X)$ の幾何的部分 $\pi_1^{ab}(X)^{geo}$ に関する有限性定理を示す。この群 $\pi_1^{ab}(X)^{geo}$ はいわば X の幾何的に連結なアーベル的エタール被覆を分類する基本群であり、有限性定理は次のことを主張する：

1. $\pi_1^{ab}(X)^{geo}$ のねじれ部分は有限群である。
2. ねじれ部分による商は \mathbb{Z} の副有限完備化上の有限生成自由加群である。
3. この自由部分の階数は X の Albanese 多様体の Néron モデルの特異ファイバーの F 階数（極大な F -split トーラスの階数）に等しい。

とくに、 X が potentially に良還元を持つ場合には $\pi_1^{ab}(X)^{geo}$ は有限群となる。上の定理は過去に、 X が曲線の場合に S.Bloch および齋藤秀司によって考察されていた。本論文では、局所体上の Abel 多様体の monodromy filtration の技術を用いて、Bloch の方法を良還元を持たない場合に拡張し、さらに最近 de Jong によって確立された p 可除群の理論を用いて K が正標数の場合にも証明した。この手法は一般次元にも通用し、最も一般的な上の形の有限性定理を与える。また、Bloch および齋藤の局所体上の曲線の不分岐類体論の主定理において、 K が正標数の場合の p -primary 部分のみが未完成であったが、上の有限性定理の応用としてこの場合の証明が可能となり、主定理の一般形が完成された。

2. 局所体上の代数曲線のアーベル的エタール被覆とそのモジュラー曲線への応用。本論文では、 X が曲線の場合の $\pi_1^{ab}(X)^{geo}$ のねじれ部分

について、さらに詳細な考察を加える。とくに、最も捉えにくい部分である、特異ファイバーの上では完全分岐するようなアーベル的エタール被覆を分類する部分群 $\pi_1^{ab}(X)_{ram}^{geo}$ （特異ファイバーの幾何的アーベル基本群への自然な射の核として定義される）の大きさを、 X の Jacobi 多様体 J の幾何学的な情報を用いて制御することができた。主定理は次の通りである（ X の K 有理点の存在を仮定する）：

1. 有限群 $\pi_1^{ab}(X)_{ram}^{geo}$ の双対の p と素な部分から、 J の Néron モデルの特異ファイバーの component group に自然な単射が存在する。
2. $\pi_1^{ab}(X)_{ram}^{geo}$ の p べき部分は、 K の標数が0かつ絶対分岐指数が $p-1$ より小であり X が半安定還元をもつとき消滅する。

この定理の証明は、 J の monodromy filtration に対して論文1で行った考察をより詳細に追求することで得られる。とくに2.にはRaynaudの有限群スキームの理論が用いられる。

この結果によって、モジュラー曲線 $X_0(p)$ （楕円曲線の $\Gamma_0(p)$ 構造の粗モジュライ空間）に対して $\pi_1^{ab}(X_0(p)/\mathbb{Q}_p)^{geo}$ を完全に決定することが可能となった。とくに、 $\pi_1^{ab}(X_0(p)/\mathbb{Q}_p)^{geo}$ のねじれ部分の全体を占める $\pi_1^{ab}(X_0(p)/\mathbb{Q}_p)_{ram}^{geo}$ はちょうど Jacobi 多様体の component group Φ に等しいことが示される。これは、Mazur による代数体上の結果「 $\pi_1^{ab}(X_0(p)/\mathbb{Q})^{geo} \cong \Phi$ 」の局所体上の対応物と考えられる。

My research interest is focused on algebraic number theory and its extensions by using the method of arithmetic geometry, and currently I am working on higher dimensional or non-abelian version of class field theory. This year I investigated the abelian étale coverings of algebraic varieties over local/global fields and obtained some new results in the local fields case, which are described in two papers ([1],[2]) which constitute my master's thesis. In the following, a local field K is understood to be a complete discrete valuation field with a finite residue field F of characteristic p .

1. Finiteness theorem in class field theory of varieties over local fields. In this paper a finiteness theorem concerning the geometric part $\pi_1^{ab}(X)^{geo}$ of the abelian étale funda-

mental group $\pi_1^{ab}(X)$ of an proper smooth algebraic variety X over a local field K . This group $\pi_1^{ab}(X)^{geo}$ (roughly) classifies the geometrically connected abelian étale coverings of X , and the finiteness theorem claims that :

1. The torsion part of $\pi_1^{ab}(X)^{geo}$ is finite.
2. The quotient by the torsion part is a finite free module over the profinite completion of \mathbb{Z} .
3. The rank of this free part is equal to the F -rank (the rank of the maximal F -split torus) of the special fiber of the Néron model of the Albanese variety of X .

In particular, if X has potentially good reduction $\pi_1^{ab}(X)^{geo}$ is a finite group. This theorem was considered by S.Bloch and S.Saito in the case when X is a curve in the past. In this paper the method of Bloch is generalized to the case of bad reduction using the technique of monodromy filtration of abelian varieties over local fields, and also to the positive characteristic case using the recent results on p -divisible groups by de Jong. This method can be applied to the higher dimensional case, giving the most general form of finiteness theorem as above. As an application, the main theorem of the unramified class field theory of curves over local fields by Bloch and S.Saito is completely proven, in which the p -primary part in the positive characteristic case had remained unproven.

2. Abelian étale coverings of curves over local fields and its application to modular curves. In this paper, the torsion part of $\pi_1^{ab}(X)^{geo}$ in the curve case is further investigated. In particular, the size of the most difficult part $\pi_1^{ab}(X)_{ram}^{geo}$, which classifies the abelian étale covering which ramifies completely over the special fiber, is controlled by the geometric information of the jacobian variety J of X . The main theorem is stated as follows (We assume the existence of K -rational point of X) :

1. The prime-to- p part of the dual of the finite group $\pi_1^{ab}(X)_{ram}^{geo}$ injects to the component group of the special fiber of the

Néron model of J .

2. The p -primary part of $\pi_1^{ab}(X)_{ram}^{geo}$ vanishes in the case where K has characteristic 0 and its absolute ramification index does not exceed $p - 1$ and X has semistable reduction.

It is proven by elaborating the considerations on the monodromy filtration of J in the preceding paper. The theory of finite group schemes by Raynaud is used in the proof of 2.

This result enables us to determine the group $\pi_1^{ab}(X_0(p)/\mathbb{Q}_p)^{geo}$ for the modular curve $X_0(p)$ (the coarse moduli space of the $\Gamma_0(p)$ -structures on elliptic curves). In particular, $\pi_1^{ab}(X_0(p)/\mathbb{Q}_p)_{ram}^{geo}$, which is the whole of the torsion part of $\pi_1^{ab}(X_0(p)/\mathbb{Q}_p)^{geo}$, is isomorphic to the component group Φ of the Jacobian. This is considered as the local analogue of the Mazur's global result $\pi_1^{ab}(X_0(p)/\mathbb{Q})^{geo} \cong \Phi$.

B. 発表論文

1. *Finiteness theorem in class field theory of varieties over local fields*, Preprint, University of Tokyo, 2002.
2. *Abelian étale coverings of curves over local fields and application to modular curves*, Preprint, University of Tokyo, 2002.

C. 口頭発表

1. Class field theory of curves over local fields and applications, in : Advanced Course on Modular Forms and p -adic Hodge Theory, Centre de Recerca Matemàtica, Barcelona, Spain, July 2001.
2. On class field theory of curves over local fields, Algebra Seminar at University of South California, USA, November 2001.
3. Finiteness theorem in class field theory of varieties over local fields, Arithmetic Seminar at University of Michigan, USA, November 2001.