Isoperimetría e Hiperbolicidad

Macarena Arenas

54 Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana

1. Grupos hiperbólicos

2. El problema de la palabra e isoperimetría

3. Otros problemas algorítmicos y nociones generalizadas de isoperimetría

I:

Grupos Hiperbólicos

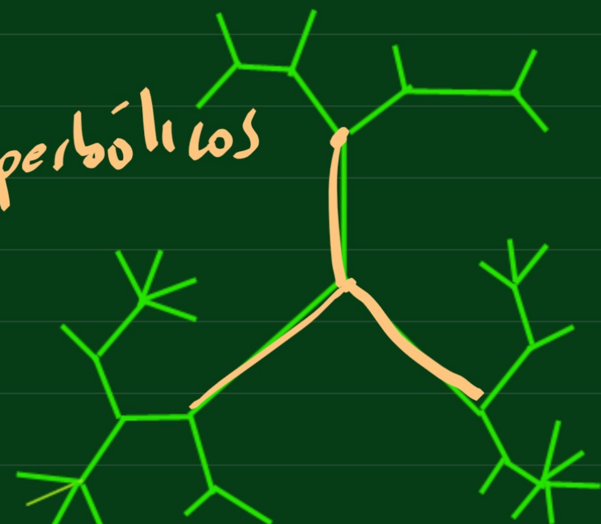
Def: Un triángulo es δ-fino si cada uno de sus lados está contenido en la unión de las δ-vecindades de los otros dos lados:

Def Un grupo G es hiperbólico si existe $\delta \geq 0$ y un conjunto finito de generadores S tal que todos los Δ's geodésicos en $\mathrm{Cay}(G,S)$ son δ-finos.

"δ-hiperbólico"

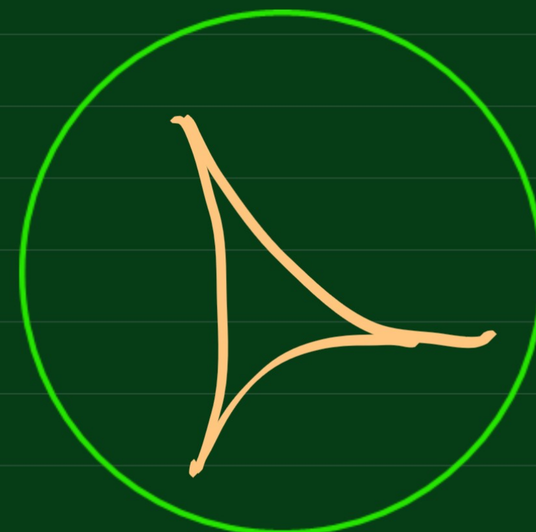
"Gromov-hiperbólico"

0-hiperbólicos



árbol

$\delta \geq 1$ funciona



$\mathbb{H}^2$

Observaciones:

→ La hiperbolicidad no depende de la presentación (aunque la constante sí). ✓

→ La hiperbolicidad es un invariante de cuasi-isometría. ✓

Ejemplos

Hiperbólicos:

- → Grupos finitos δ ? diametro
- → Grupos libres (f.g.) 0-hiperbólicos
- → $\pi_1(S)$, S superficie $\chi(S) < 0$
- → $\pi_1(M)$, M variedad hiperbólicas cerradas
- → Grupos de cancelaciones pequeñas $C'(\frac{1}{6})$, $C(7)$
- → Grupos aleatorios
- → Algunas gráficas de grupos

No hiperbólicos:

- → Grupos no finitamente generados
- → $\mathbb{Z}^n$ $(n \geq 2)$
- → $BS(1,2) = \langle a, b \mid aba^{-1} = b^2 \rangle$
- → Cualquier grupo que contenga a $\mathbb{Z}^n$ o $BS(1,2)$

II:

El problema de la palabra

y

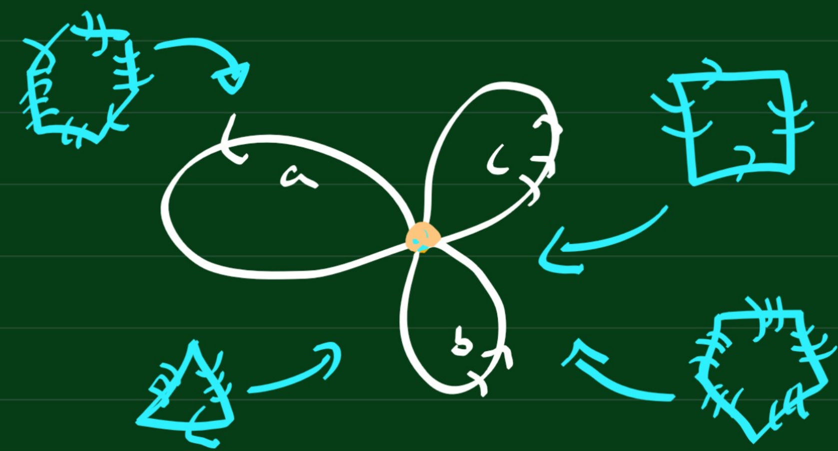
funciones isoperimétricas

a) El problema de la palabra: dado un grupo $G = \langle S | R \rangle$, ¿Existe un algoritmo que determine para cada palabra w si $w =_G 1$?

→ Si tal algoritmo existe, decimos que el problema de la palabra es soluble / decidible en G

→ Si G es finitamente presentado, la solubilidad del problema de la palabra no depende de la presentación.

Del álgebra a la geometría:

presentación de G $P = \langle S \mid R \rangle$	2-complejo "estandar" $\pi_1(X(P)) \simeq G$
Ej.: $S = \{a, b, c\}$ $R = \{[a,b],\ c^2a,\ c^5,\ (cba)^2\}$	
Palabra $w \in F(S)$	lazo $p \to X(P)$
$w =_G 1$	p nullhomotópico en $X(P)$
$(w =_G 1)$ área(w) = min # de relaciones que certifican que "$w =_G 1$"	área(p) = min # 2-celdas en un disco bordeado por p en X. (p nullhomotópico)

Sea G finitamente presentado, X CW-complejo con $\pi_1 X = G$.

Def $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es una función isoperimétrica para X si $\forall\ p \to X$ nullhomotópico, existe un disco $D \to X$ con $\partial D = p$ y:

$$\text{Area}(D) \leq f(|p|)$$

$\rightsquigarrow$ $\text{Dehn}(G)$ es la funcion isoperimétrica "óptima" para G.

$\rightsquigarrow$ El "tipo de crecimiento" de $\text{Dehn}(G)$ es un invariante del grupo

<u>Teorema</u> El problema de la palabra es soluble en G $\iff$ $\text{Dehn}(G)$ es recursiva.

Ejemplos:

→ Dehn(grupo CAT(0)) es a lo más cuadrática
($\mathbb{Z}^n$)

→ Dehn(grupo policíclico) es a lo más polinomial
(f.g)

→ Dehn(BS(1,2)) es $\sim 2^n$

→ Ejemplos con Dehn(G) crece más rápido que cualquier torre de exponenciales

Teorema Gromov: G es hiperbólico $\iff$ Dehn(G) es lineal

Teorema Bridson, Papasoglu, etc..: G es hiperbólico $\iff$ Dehn(G) es a lo más subcuadrática.

Obs: Este es el único "gap" en el espectro isoperimétrico

Teorema (Bridson-Brady) $IP = \{ d : n^d \sim \mathrm{Dehn}(G)$ para algún grupo $G\}$ es denso en $[2, \infty)$.

III:

Otros problemas algorítmicos y nociones generalizadas de isoperimetría

b) El problema de conjugación: dado un grupo $G = \langle S \mid R \rangle$, ¿Existe un algoritmo que determine para cada pareja w, w' si $w \sim_G w'$?

→ Si tal algoritmo existe, decimos que el problema de conjugación es soluble en G.

→ Si G es finitamente presentado, la solubilidad del problema de conjugación no depende de la presentación. ✓

Def: $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ es una función isoperimétrica anular para X si $\forall\, p\to X'$, $p'\to X'$ homotópicos, existe un anillo $A\to X$ con $\partial A = p\cup p'$ y:

$$\text{Area}(A)\leq f(|p|+|p'|)$$

- Salvo constantes, función isoperimétrica anular mínima es un invariante de G.
- No es un invariante de cuasi-isometría.
- $\text{Dehn}(G)$ es una cota inferior para func. isop. anular

Teorema G es hiperbólico $\iff$ tiene una función isop. anular lineal

Teorema Existen parejas (G, H) donde:

1. $[G:H] = 2$

2. El problema de conjugación es soluble en G pero no en H.

3. Y viceversa

c) El problema de la palabra homológico: decidir para cada palabra w, si $w =_{G^{ab}} 1$.

⤳ Es natural generalizar a grupos de homología superiores

Def $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{R})$ es una función isoperimétrica homológica (de dimensión k) para X si $\forall$ k-ciclo $c \to X$ existe $(k+1)$-cadena $D \to X$ con $\partial D = c$ y

$$(k+1)\text{-Volumen}(D) \leq f(k\text{-Volumen}(c))$$

(Gersten, Lang, Mineyev)

Teorema Si G es hiperbólico y libre de torsión $\Rightarrow$ satisface funciones isoperimetricas homologicas lineales $\forall\, k \geq 1$ y para $(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{R})$

Teorema Existen grupos para los cuales la función de Dehn crece más rapido que la funcion isop. homológica de dimensión 1.

d) Ecuaciones sobre grupos

Una ecuación sobre un grupo G es una expresión:

$$a_1 X_1 a_2 X_2 \cdots a_n X_n = 1 \quad * \qquad \in G * F(X)$$

donde $a_i \in G$ son "constantes" y $X_1 \ldots X_n$ son variables.
$\in F(X)$

Una solución para $*$ es una tupla $(g_1, \ldots g_n)$ tal que

$$a_1 g_1 a_2 g_2 \cdots a_n g_n = 1 \qquad g_i \in G$$

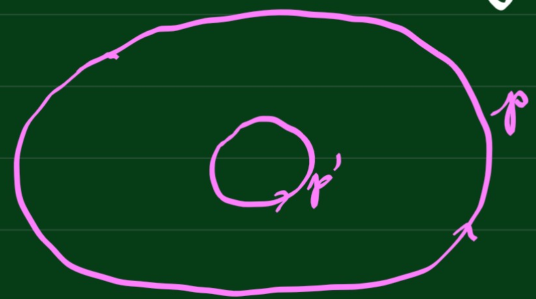
$$g_i \to x_i$$

Una ecuación es cuadrática si cada variable aparece exactamente dos veces

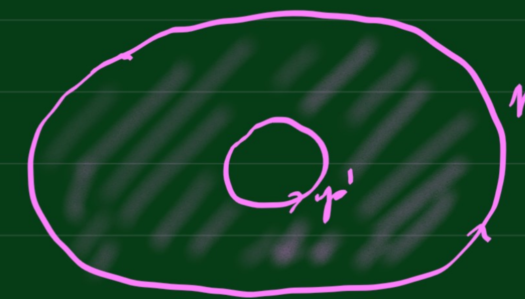
Ej: $xyx^{-1}y^{-1} = 1$ $\qquad z^2 x^2 y^2 = 1$

Diccionario:

- Problema de conjugación



Isoperimetría anular

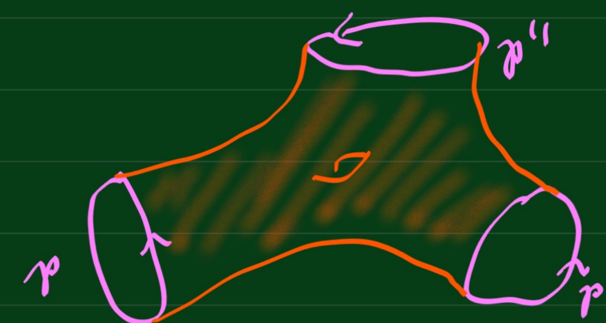


- Problema homológico de la palabra

Isoperimetría homológica

- Ecuaciones cuadráticas

Isoperimetría para superficies



Funciones isoperimétricas generalizadas

Def: g-Area de $\bigcup_i P_i$ es:

$$\mathrm{Area}_g\left(\bigcup_i P_i\right) = \inf\left\{ \mathrm{Area}(S) : S \to X,\ \text{género}(S) = g \text{ y } \partial S = \bigcup_i P_i \right\}$$

Def: $f_{gn} : \mathbb{N} \to [0, \infty]$ es una función (g,n)-isoperimétrica para X si:

$$f_{gn}(m) = \sup\left\{ \mathrm{Area}_g\left(\bigcup_{i=1}^{n} P_i\right) : \sum_{i=1}^{n} |P_i| \leq m \right\}$$

Teorema: (A-Wise) Si G es hiperbólico y libre de torsión, entonces satisface funciones (g,n)-isoperimétricas lineales $\forall\, g \geq 0$ $\forall\, n \geq 1$.