Cancelaciones pequeñas y construcciones de Rips

Macarena Arenas (Cambridge)

Universidad de Buenos Aires

28/09/2022

Plan de la plática:

Parte I:

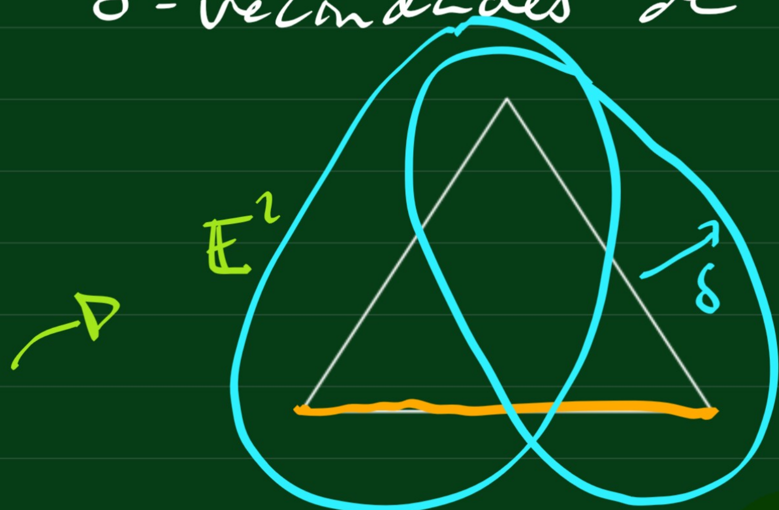
- Sobre grupos hiperbólicos y sus subgrupos
- Teoría (clásica) de cancelaciones pequeñas
- La construcción de Rips y sus aplicaciones

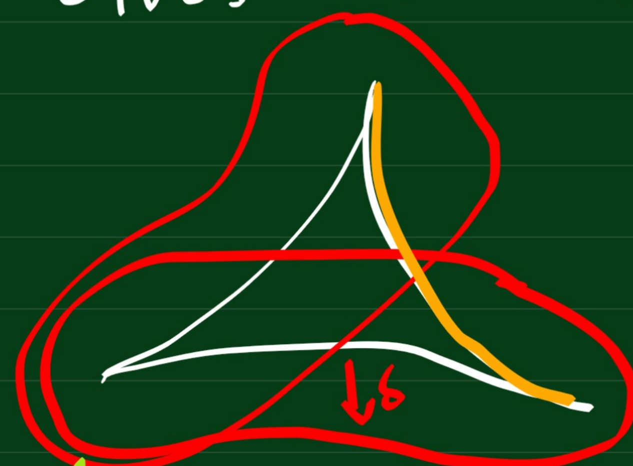
Parte II:

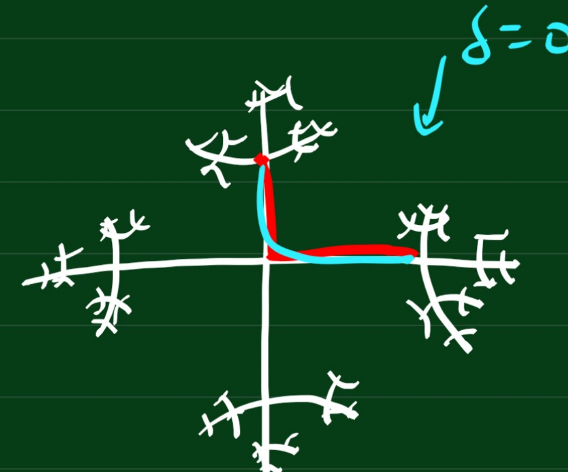
- Complejos cubulares
- Teoría cúbica de cancelaciones pequeñas
- Grupos hiperbólicos de dimensión alta
- Construcción cúbica de Rips

Sobre grupos hiperbólicos y sus subgrupos

Un Δ geodésico es **δ-delgado** si cada uno de sus lados está contenido en la unión de las δ-vecindades de los otros 2 lados:







Un grupo G es **hiperbólico** (δ-hiperbólico) si $\exists\ \delta \geq 0$ y $\langle S \rangle = G$ con $|S| < \infty$ tal que todos los Δ geodésicos en $\mathrm{Cay}(G,S)$ son δ-delgados.

<u>Nota</u>: "ser hiperbólico" no depende de S

Ejemplos:

- finitos
- libres
- grupos de superficies ($\neq S^2, P^2$)
- $\pi_1 M$ variedades cerradas neg curvadas
- grupos de cancelaciones pequeñas
- grupos de una relación con torsión

  $\langle S \mid r^n \rangle$

No-ejemplos:

- $\mathbb{Z}^n$ $n \geq 2$
- $BS(m,n) = \langle a, b \mid ab^m a^{-1} = a^n \rangle$
- no finitamente generados
- cualquier grupo que contenga $\mathbb{Z}^n$, $BS(m,n)$

Algunas propiedades

Si G es hiperbólico:

(1) es fin pres y es de tipo $F\infty$, F si es libre de torsión.

(2) problemas algorítmicos: $\left\{\begin{array}{l}\text{palabra}\\ \text{conjugación}\\ \text{isomorfismo}\end{array}\right.$ son decidibles

(3) satisface una desigualdad isoperimétrica lineal

(4) es automático ✓

(5) subgrupos: $\rightarrow$ cuasiconvexos $\longrightarrow$ hiperbólicos

$\rightarrow$ no-cuasiconvexos $\xrightarrow{?}$ pueden existir subgrupos no hiperbólicos

¿Cómo producir ejemplos?

→ La teoría de cancelaciones pequeñas trata sobre medir los traslapes entre relaciones en una presentación

→ Si los traslapes son pequeños ⇒ se cumplen buenos teoremas

Def $P = \langle S \mid R \rangle$ una presentación simetrizada finita. Una **pieza** p es una subpalabra que aparece de dos maneras distintas entre las relaciones $r \in R$.

ejemplos:

→ $\langle a, b, c \mid a^2b^2, a^2c^2 \rangle$

piezas: a, b, c, a^2

$\pi_1($  $)$ $\langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} \rangle$

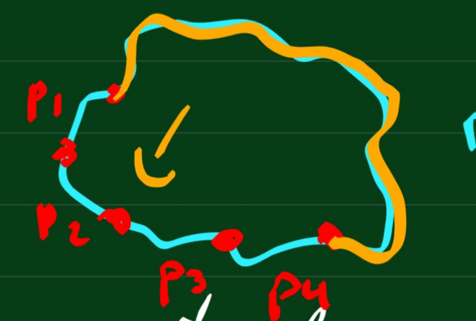
(superficie de género g)

a, b, c, d

letras son piezas

$\rightsquigarrow C'(\frac{1}{n})$: $\forall$ pieza p, si p aparece en $r \in R$
$|p| < \frac{1}{n}|r|$

$\rightsquigarrow C(n)$: Ninguna relación $r \in R$ es la concatenación de menos de n piezas.



<u>Obs</u>: $C'(\frac{1}{n}) \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} C(n+1)$

<u>Teorema</u> Si una presentación P para G satisface $C'(\frac{1}{6})$ o $C(7)$ $\Rightarrow$

(1) G es hiperbólico ✓

(2) $X(P)$ es asférico (si las relaciones no son potencias) ✓

(3) G estan cocompactamente cubulados (Wise) ✓

<u>Obs</u>: $C'(\frac{1}{6})$ son "genéricos" $\rightsquigarrow$ grupos <u>aleatorios</u> satisfacen $C'(\frac{1}{6})$

Pregunta muy general:

Sean:  = clase "bonita" de grupos

 = propiedad patológica

¿$\exists$ $G \in$  y $H \leq G$ tal que H tiene ?

 =
- hiperbólicos
- cubulados
- ~~propiedad (T)~~

 =
- tener problema generalizado de la palabra indecidible
- ser incoherente
- [tener problema del rango indecidible]

La construcción de Rips

Teo (Rips) Sea Q fin pres. y $\lambda \geq 1$ [$\lambda \geq 6$] $\Rightarrow \exists$ un grupo $C'(\frac{1}{\lambda})$ G hiperbólico y SEC:

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \xrightarrow{\varphi} Q \longrightarrow 1$$

donde N es fin gen.

Principio: Q que tiene , "levantar"  de Q a G vía φ.

Muy flexible: muchas variantes de la construcción de Rips

Aplicaciones

(1) $\exists$ G hiperbólico cuyo problema generalizado de la palabra es irresoluble: (para los grupos fp)

$Q = $ Fp + problema de la palabra irresoluble, aplicamos Rips

$\rightarrow$ G hiperbólico $\quad \underbrace{g \in N \trianglelefteq G}_{\text{irresoluble}} \iff \underbrace{g =_1 Q}_{\text{irresoluble}}$

(2) $\exists$ G hiperbólico incoherente $\quad Q = F_2 \times F_2$, aplicamos Rips

$\exists H \leq F_2 \times F_2$ fg pero no fp

$\varphi(H) \leq G$ es fg pero no fp

* todos los kernels en la construcción de Rips son incoherentes *

(3) $\exists$ G hiperbólico cuyo problema del rango es irresoluble

$\underbrace{Q}_{} = \underbrace{Q' \times Q' \times \cdots \times Q'}_{}$ n copias $\quad Q'$ Fp, aplicamos Rips

G hiperbólico, Q' no es decidible si es trivial o no

Demostración:

$$Q = \langle a_1, \dots a_n \mid r_1 \dots r_s \rangle$$

$$G = \langle a_1, \dots a_n, x, y \mid r_1 *, \dots, r_s *, \{a_i^{\pm 1} x a_i^{\mp 1} = *\} \{a_i^{\pm 1} x a_i^{\mp 1} = *\} \rangle$$

cada $*$ es distinto, es una palabra en x y y $\rightarrow$ ruido

$$*_1 = xyx^2yx^3y \dots x^{2002}$$

$$*_2 = x^{2002+1} y \dots x^{4002} \Rightarrow \text{satisface } C'\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$\vdots$

$$\langle x, y \rangle = N \trianglelefteq G \longrightarrow Q$$

$$x, y \longrightarrow 1$$

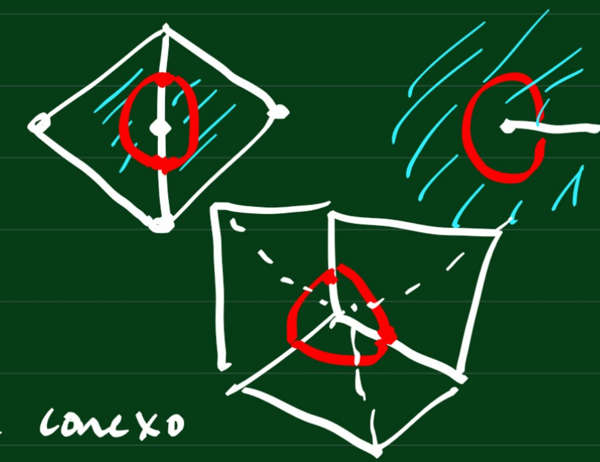
∎

Complejos cubulares

Un complejo cubular es no-positivamente curvado (npc) si las aureolas (link(v)) de todos sus vértices son complejos bandera

bandera → simplicial  ,

→ siempre que veamos el k-esqueleto de un simplejo ⇒ el k+1 simplejo esté en el complejo



Un cc es CAT(0) si es npc + simplemente conexo

⇒ cc CAT(0) son contraibles

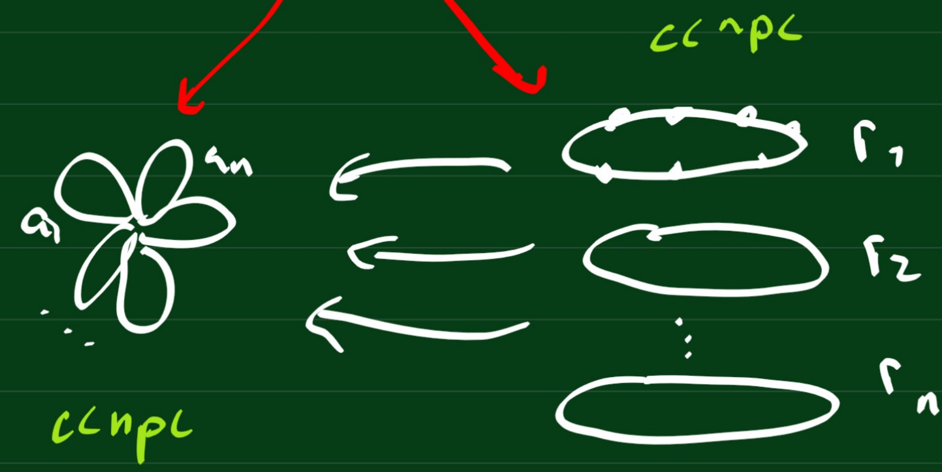
⇒ ccnpc son espacios clasificantes para sus π_1's.

Un grupo G está [cocompactamente] cubulado si actua propia y [cocompacta] en un complejo cubular CAT(0)

Presentaciones cubulares

$$\mathcal{P} = \langle S \mid R \rangle$$

$X^* =$



TSV: $\pi_1 X^* = (S \mid R)$

pieza: es un traslape entre ciclos

$C'(\frac{1}{n}), C(n)$ ✓

$\tilde{X}^*$

$$X^* = \langle \underset{\text{ccnpc}}{X} \mid \{ \underset{\text{a ccnpc}}{Y_i} \xrightarrow{\text{iso loc}} X \} \rangle$$

$$\underline{\pi_1 X^* = \pi_1 X / \langle\langle \pi_1 Y_i \rangle\rangle}$$

pieza: $\to \tilde{Y}_i \cap \tilde{Y}_j$

$\to \tilde{Y}_1 \cap R$ rectangulo

$C'(\frac{1}{n})$

$C(n)$

Teoría cubular de cancelaciones pequeñas (Wise)

Una presentación cubular X^* satisface la condición:

$C(n)$: X^* satisface $C(n)$ cúbica si $\forall$ camino esencial en X es la concatenación de a lo menos n caminos en piezas

$C'(\frac{1}{n})$: X^* = " $C'(\frac{1}{n})$ si para cada Y_i y para cada pieza p en Y_i $|p| < \frac{1}{n} |Y_i|$

Obs $C'(\frac{1}{n}) \Rightarrow C(n+1)$

Como en el caso clásico, $C'(\frac{1}{n})$ o $C(n)$ para n suficientemente grande $\Rightarrow$ buenos teoremas!

Teorema (Wise)

Si $\pi_1 X$ es hiperbólico y X^* es $C'(\frac{1}{14}) \Rightarrow$
$\pi_1 X^*$ es hiperbólico

Si $\pi_1 X$ es hiperbólico y X' es $C(9) + ☆ \Rightarrow$
$\pi_1 X'$ es hiperbólico

(Arenas–Jankewicz–Wise)

Teorema (Wise) Si X^* es $B(6) + ☆ \Rightarrow$ es cocompactamente cubulable

$C'(\frac{1}{2n}) \Rightarrow B(2n) \Rightarrow C(2n+1)$

Teorema (Futer–Wise) los cocientes aleatorios de grupos hiperbólicos son de nuevo hiperbólicos ~ porque satisfacen cúbica $C'(\frac{1}{14})$

Grupos hiperbólicos (de dimensión grande)

$\mathrm{cd}\, G \leq 2$	$\mathrm{cd}\, G > 2$ + finita
superficies	$\pi_1 M$ M variedades cerradas de curvatura negativa
libres	"algunas" gráficas de grupos hip.
grupos de cancelaciones pequeñas	dehn fillings → Mosher–Sageev → Fujiwara–Manning
algunos grupos de coxeter *	RACG hiperbólicos Januszkiewicz–Świątkowski, Osajda *
aleatorios	"aleatorios"
"patológicos" → aplicar Rips	? ? ? ?

Una construcción cubular de Rips

Teorema Si Q es fin pres y X es un complejo cubular **especial** con $\pi_1 X := G$ hiperbólico, $\Rightarrow \exists$ SEC:

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow \Gamma \longrightarrow Q \longrightarrow 1 \qquad \text{con:}$$

(1) $N \cong G/K \Rightarrow (f_g)$

(2) Γ es hiperbolico + cocompactamente cubulado

(3) $\max\{cd\, G, 2\} \geq cd\, \Gamma \geq cd\, G - 1$

Obs: (Agol) hiperbolico + cubulado $\Rightarrow$ virtualmente especial

Sobre la demostración

$Q = \langle a_1, \dots a_n \mid r_1 \dots r_s \rangle = P$

La estrategia es imitar la demostración del teorema original de Kips:

$$X^* = \langle \underbrace{X}_{} \vee B_n \mid \underbrace{\{Z_i \hookrightarrow X \vee B\}}_{} \rangle$$

elegimos X^* para que satisfaga $C'(\frac{1}{14}) + B(6)$

$\Rightarrow \pi_1 X^* =: P$ es hiperbólico y cubulable

$$X^* \longrightarrow X(P)$$
colapsa X

Cota inferior en cd: $\langle\langle \pi_i Z_i \rangle\rangle$ es libre

Cota superior: condición de Cohen-Lyndon

¡Gracias!