

CENTRALISATEURS DE PRODUITS DE $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ - MODULES EN q RACINE DE L'UNITÉ

Charles Senécal
Université de Montréal
(en collaboration avec Yvan Saint-Aubin)

23 septembre 2023

$q \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\}$ et on pose $\ell \in \mathbb{N}$
minimal t.q. $q^{2\ell} = 1$.

L'extension de Lusztig
du groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

$\mathcal{LU}_q(\mathfrak{sl}_2)$

Def: $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ est la $\mathbb{C}$ -algèbre
assoc. & unifiée engendrée par
 $\{1, K, K^{-1}, E, F\}$ avec les relations

$$KEK^{-1} = q^2 E, \quad KFK^{-1} = q^{-2} F,$$

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \quad [E, F] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$$

$$[k]_q = \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}}, \quad [k]_q! = [k]_q [k-1]_q \dots [1]_q$$

En ajoutant les
puissances divisées

$$E^{(k)} = \frac{E^k}{[k]_q!}$$

$$F^{(k)} = \frac{F^k}{[k]_q!}$$

Comme générateurs, on
obtient l'extension de
Lusztig $\mathcal{LU}_q(\mathfrak{sl}_2)$.

$$q^{2l} = 1$$

la théorie de la
représentation de

$$U_q(\mathfrak{sl}_2)$$

* (si q n'est pas une racine de l'unité, $\text{mod } U_q(\mathfrak{sl}_2)$ est semisimple.)

* sinon, $\text{mod } U_q(\mathfrak{sl}_2)$ est non semisimple et trois familles importantes de modules :

$$\bullet i$$

Simplex
 $L(i)$

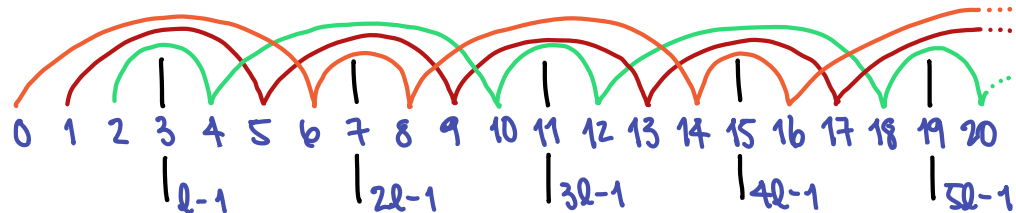
$$\begin{array}{c} \bullet i \\ | \\ \bullet d_i \end{array}$$

Weyl
 $\Delta(i)$

$$\begin{array}{ccc} & \bullet i & \\ & / \quad \backslash & \\ g_i \bullet & & \bullet d_i \\ & \backslash \quad / & \\ & \bullet i & \end{array}$$

Projectifs
 $P(i)$

Exemple : $l=4$



$$q^{2l} = 1$$

la théorie de la
représentation de

$$U_q(\mathfrak{sl}_2)$$

* $\Delta(i)$ est simple ssi $i < l$
ou $i \equiv -1 \pmod{l}$.

$$* L(i) \simeq \Delta(i) / \text{rad } \Delta(i)$$

* $P(i) \simeq \Delta(i) \simeq L(i)$ si $i \equiv -1 \pmod{l}$.

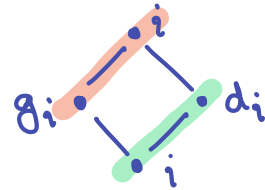
Si non, $0 \rightarrow \Delta(i) \rightarrow P(i) \rightarrow \Delta(i) \rightarrow 0$.

$\bullet i$

Simple
 $L(i)$

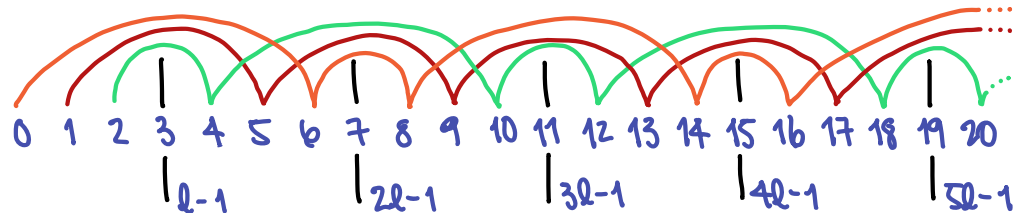
$\bullet i$
 $\vdots$
 $\bullet d_i$

Weyl
 $\Delta(i)$



Projectifs
 $P(i)$

Exemple: $l=4$



$$q^{2\ell} = 1$$

$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ est une algèbre de Hopf.

* coproduit $\Delta: U_q(\mathfrak{sl}_2) \longrightarrow U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes U_q(\mathfrak{sl}_2)$

$$K \longmapsto K \otimes K$$

$$E^{(k)} \longmapsto \sum_{m=0}^k q^{m(k-m)} E^{(k-m)} K^m \otimes E^{(m)}$$

$$F^{(k)} \longmapsto \sum_{m=0}^k q^{-m(k-m)} F^{(m)} \otimes K^{-m} F^{(k-m)}$$

* pour M, N des $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules, Δ donne une structure de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module à $M \otimes N$.

$$q^{2l} = 1$$

$\mathcal{C}$ (modules de dimension finie et de type 1)
 $\cap$

~~mod $U_q(\mathfrak{sl}_2)$~~ est une catégorie monoïdale tressée.

* matrice R universelle

$$R = e^{\frac{\hbar}{2} H \otimes H} \sum_{n=0}^{\infty} [n]_q! q^{\frac{1}{2}n(n+1)} (1 - q^{-2})^n F^{(n)} \otimes E^{(n)}$$

* mène à des isomorphismes

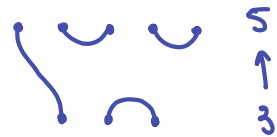
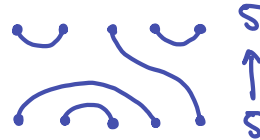
$$\check{R}_{M,N} : M \otimes N \xrightarrow{\sim} N \otimes M$$

ALGÈBRE DE TEMPERLEY-LIEB

$$q^{2l} = 1$$

Def: La catégorie de Temperley-Lieb $\mathcal{TL}(\beta)$:

- Objets : $\mathbb{N} \geq 0$
- Morphismes :



composition :

$$= \beta$$

Def: L'algèbre de Temperley-Lieb est $TL_n(\beta) := \text{End}_{\mathcal{TL}(\beta)}^{(n)}$.

Def 2: $TL_n(\beta) = \langle e_i, 1 \leq i \leq n-1 \mid e_i^2 = \beta e_i, e_i e_{i \pm 1} e_i = e_i, e_i e_j = e_j e_i \text{ } |i-j| > 1 \rangle$

DUALITÉ DE SCHUR-WEYL

$$q^{2\ell} = 1$$

* $V := \Delta(1) = L(1)$ la représentation fondamentale (de dim. 2) de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$.

$$U_q(\mathfrak{sl}_2) \hookrightarrow V^{\otimes n} \hookrightarrow CB_n$$

coproduit Δ

groupe de tresses de type A

$$\langle \sigma_i, 1 \leq i \leq n-1 \mid$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \mid i-j| \geq 1$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle$$

$$\sigma_i \mapsto \check{R}_i, \text{ où } \check{R}_i := \text{id}_V^{\otimes i-1} \otimes \check{R}_{V,V} \otimes \text{id}_V^{\otimes n-i-1}$$

$$\begin{array}{c} V \otimes \dots \otimes V \otimes V \otimes \dots \otimes V \\ | \qquad \qquad \qquad \cup \qquad \qquad \qquad | \\ V \otimes \dots \otimes V \otimes V \otimes \dots \otimes V \\ \qquad \qquad \qquad i \quad i+1 \end{array}$$

Thm :

$$\cancel{TL_n} CB_n \xrightarrow{\sim} \text{End}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}(V^{\otimes n})$$

$$U_q(\mathfrak{sl}_2) \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\cancel{TL_n} CB_n}(V^{\otimes n})$$

On peut faire mieux :

$$\psi : TL_n(q+q^{-1}) \rightarrow \text{End}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}(V^{\otimes n})$$

$$u_i \mapsto q - q^{1/2} \check{R}_i$$

NOTRE PROBLÈME

$$q^{2l} = 1$$

Question : que peut-on dire à propos des produits de la forme $M \otimes V^{\otimes n}$, où $M = P(i), L(i), \Delta(i), \dots$?

① Structure de $\text{End}_{\text{LU}_q(\text{sl}_2)}(P(i) \otimes V^{\otimes n})$

* $P(i)$ est un sommand direct de $V^{\otimes d_i}$

↪ il existe un idempotent de $\text{TL}_{d_i}(q+q^{-1})$ qui projette sur $P(i)$.

* Ce sont les idempotents de (l, p) -Jones-Wenzl

$$P = \sum_{l=0}^{\infty} J W_n \in \text{TL}_n(q+q^{-1})$$

- Burrrull, Libedinsky & Sentinelli
- Martin & Spencer
- Sutton, Tubbenhauer, Wedrich & Zhu

$$q^{2\ell} = 1$$

Thm: Pour $\infty_l \text{JW}_{d_i} \in \text{TL}_{d_i}(q+q^{-1}) \simeq \text{End}_{\text{LU}_q(\mathfrak{sl}_2)}(V^{\otimes d_i})$,
 $\text{Im}(\infty_l \text{JW}_{d_i}) \simeq P(i)$.

Alors, pour étudier $\text{End}_{\text{LU}_q(\mathfrak{sl}_2)}(P(i) \otimes V^{\otimes n})$,

1. Commencer avec $V^{\otimes d_i} \otimes V^{\otimes n}$
2. $\infty_l \text{JW}_{d_i} \in \text{TL}_{d_i+n}(q+q^{-1})$ projette sur $P(i) \otimes V^{\otimes n}$
3. Alors $\text{End}_{\text{LU}_q(\mathfrak{sl}_2)}(P(i) \otimes V^{\otimes n}) \simeq \infty_l \text{JW}_{d_i} \cdot \text{TL}_{d_i+n} \cdot \infty_l \text{JW}_{d_i}$
 (YSA, CS)

- Flores & Peltola
- Morin-Duchesne,
- Rasmussen & Ridout,
- Spencer

→ algèbre de Temperley-Lieb
valencée
 ou algèbre à
couture

$$q^{2l} = 1$$


②

$$\mathrm{LH}_q(\mathfrak{sl}_2) \hookrightarrow L(i) \otimes V^{\otimes n} \hookrightarrow \underline{\mathbb{C}\Gamma_n}$$

oi

$$\begin{array}{ccccccc} L(i) \otimes V & \otimes & \dots & \otimes & V & \otimes & V & \otimes & \dots & \otimes & V \\ \downarrow & & & & \searrow & & \swarrow & & & & \downarrow \\ L(i) \otimes V & \otimes & \dots & \otimes & V & \otimes & V & \otimes & \dots & \otimes & V \\ & & & & \underbrace{\hspace{1cm}}_{k} & & \underbrace{\hspace{1cm}}_{k+1} & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} L(i) \otimes V & \otimes & V & \otimes & V & \otimes & \dots \otimes V \\ \downarrow & & & & & & \\ L(i) \otimes V & \otimes & V & \otimes & V & \otimes & \dots \otimes V \end{array}$$

$$\langle \xi, \sigma_i, 1 \leq i \leq n-1 \rangle$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad |i-j| \geq 1$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

$$\xi \sigma_1 \xi \sigma_1 = \sigma_1 \xi \sigma_1 \xi$$

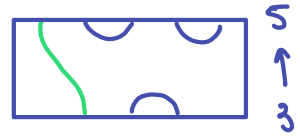
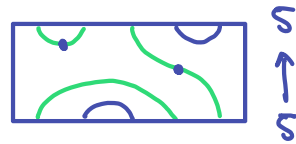
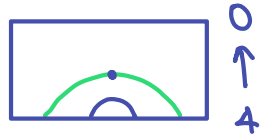
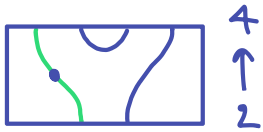
$$\xi \sigma_i = \sigma_i \xi \quad i \neq 1$$

ALGÈBRE BLOB

$$q^{2l} = 1$$

Def: La catégorie blob $\mathcal{TLB}(\beta, \beta_0, \beta_1)$:

- Objets : $\mathbb{N} \geq 0$
- Morphismes :



composition : comme pour $\mathcal{TL}$, mais

$$\bigcirc = \beta, \quad \downarrow = \beta_0 \downarrow, \quad \bigcirc \bullet = \beta_1$$

Def: L'algèbre blob est $\mathcal{TLb}_n(\beta, \beta_0, \beta_1) := \text{End}_{\mathcal{TLB}}(n)$.

ALGÈBRE BLOB

$$q^{2l} = 1$$

Déf 2: $TLb_n(\beta, \beta_0, \beta_1) = \langle e_i, 0 \leq i \leq n-1 \mid e_i^2 = \beta e_i, i \geq 1$

$$e_i = \left[\dots \mid \overset{i+1}{\cup} \mid \dots \right], \quad i \geq 1$$

$$e_0 = \left[\dots \mid \mid \mid \mid \dots \right]$$



$$e_i e_{i+1} e_i = e_i, \quad i, i+1 \geq 1$$

$$e_i e_j = e_j e_i, \quad |i-j| > 1$$

$$\rightarrow e_0^2 = \beta_0 e_0$$

$$\rightarrow e_1 e_0 e_1 = \beta_1 e_1 \quad \rangle$$

Déf: Les projecteurs de Jones-Wenzl (de type $\hat{S}_n(-n)$) de $TLb_n(\beta, \beta_0, \beta_1)$ sont définis par récurrence

$$\hat{p}_1^- = e_0, \quad \hat{p}_i^- = \underset{\mathbb{C}^n}{c_1^i} \hat{p}_{i-1}^- + \underset{\mathbb{C}^n}{c_2^i} \hat{p}_{i-1}^- e_{i-1} \hat{p}_{i-1}^-, \quad i=2, \dots, n.$$

ACTION!

$$q^{2\ell} = 1$$

Prop: $\rho: \text{TLb}_n(q+q^{-1}, [i+1]_q, [i]_q) \rightarrow \text{End}_{\text{LU}_q(\text{sl}_2)}(L(i) \otimes V^{\otimes n})$

$$e_0 \mapsto \frac{1}{1-q^{-2}}(q^i - \check{R}_0^2)$$

$$e_k \mapsto q - q^{1/2} \check{R}_k$$

est un morphisme d'algèbres.

2 mauvaises nouvelles: en général,

* ρ n'est pas injectif...

* ... ni surjectif.

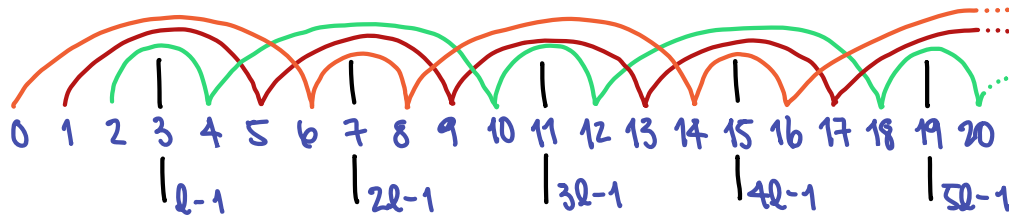
↳ on se concentre maintenant sur
l'algèbre $R_{i,n} := \text{Im}(\rho)$.

LE NOYAU

$$q^{2l} = 1$$

Thm (YSA, CS): $i = rl + s$, $r \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, $0 \leq s \leq l-2$. Alors,

$$\mathcal{R}_{i,n} \simeq \frac{\text{TL}b_n(q+q^{-1}, [i+1]_q, [i]_q)}{\langle \hat{p}_{s+1}^- \rangle}$$



Thm: $i = rl + s$.

$$L(i) \otimes L(1) \simeq \begin{cases} L(i+1) & s=0 \\ L(i-1) \oplus L(i+1) & 0 < s < l-1 \\ P(i-1) & s=l-1 \end{cases}$$

LE NOYAU

$$q^{2l} = 1$$

$$i = rl + s, \quad 0 \leq s < l-1 \quad L(1)$$

Idée: soit $\text{pr} \in \text{End}(L(i) \otimes V)$ la projection sur $L(i+1)$.

Alors $\text{End}_{\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)}(L(i+1) \otimes V^{\otimes n}) \simeq \text{pr} \circ \text{End}_{\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)}(L(i) \otimes V^{\otimes n+1}) \circ \text{pr}$.

Thm: $i = rl + s$.

$$L(i) \otimes L(1) \simeq \begin{cases} L(i+1) & s=0 \\ L(i-1) \oplus L(i+1) & 0 < s < l-1 \\ P(i-1) & s=l-1 \end{cases}$$

LE NOYAU

$$q^{2l} = 1$$

$$i = rl + s, \quad 0 \leq s < l-1 \quad L(1)$$

Idée: soit $\text{pr} \in \text{End}(L(i) \otimes V)$ la projection sur $L(i+1)$.

$$\text{Alors } \text{End}_{\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)}(L(i+1) \otimes V^{\otimes n}) \simeq \text{pr} \circ \text{End}_{\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)}(L(i) \otimes V^{\otimes n+1}) \circ \text{pr}.$$

$\swarrow \text{pr} \otimes \text{id}_V^{\otimes n}$

Prop: $i = rl \quad (s=0)$. $\mathcal{R}_{i,n} \simeq \frac{\text{TLb}_n(q+q^{-1}, [i+1]_q, [i]_q)}{\langle \hat{p}_i^- \rangle} \simeq \text{TL}_n(q+q^{-1})$

* $\pi = 1 - \frac{e_0}{[i+1]_q} \in \text{TLb}_{n+1}(q+q^{-1}, [i+1]_q, [i]_q)$ est t.q. $\rho(\pi) = \text{pr}$.

Prop: $\psi : \text{TLb}_n(q+q^{-1}, [i+2], [i+1]) \xrightarrow{\sim} \pi \text{TLb}_{n+1}(q+q^{-1}, [i+1], [i]) \pi$

$$E_0 \mapsto [i+1] \pi e_1 \pi$$

$$E_k \mapsto \pi e_{k+1} \pi \quad k \geq 1$$

LE NOYAU

$$q^{2l} = 1$$

$$\text{TLb}_n(q+q^{-1}, [i+2], [i+1]) \xrightarrow[\varphi]{\sim} \pi \text{TLb}_{n+1}(q+q^{-1}, [i+1], [i]) \pi$$



Thm (YSA, CS): $\curvearrowright$



$$\text{End}_{\mathbb{L}q(\mathbb{L}_2)}(\mathbb{L}(i+1) \otimes V^{\otimes n}) \simeq \text{pr} \circ \text{End}_{\mathbb{L}q(\mathbb{L}_2)}(\mathbb{L}(i) \otimes V^{\otimes n+1}) \circ \text{pr}$$

Alors on a fini si $\varphi(\langle \hat{P}_{s+2}^- \rangle) = \langle \hat{P}_{s+1}^- \rangle$. Thm: $\checkmark$

Thm (YSA, CS): $i = rl + s$, $r \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, $0 \leq s \leq l-2$. Alors,

$$\mathcal{R}_{i,n} \simeq \frac{\text{TLb}_n(q+q^{-1}, [i+1]_q, [i]_q)}{\langle \hat{P}_{s+1}^- \rangle}$$

RETOUR À $\text{End}_{\text{LU}_q(\mathfrak{sl}_2)}(L(i) \otimes V^{\otimes n})$

$$q^{2l} = 1$$

* ... ni surjectif.

$R_{i,n} \neq \text{End}_{\text{LU}_q(\mathfrak{sl}_2)}$ en général.

Exemple :

$$\begin{aligned} * \underline{l=2} : L(2) \otimes L(1)^{\otimes 3} &\simeq L(1) \oplus 2L(3) \oplus L(5) \\ &\Rightarrow \dim \text{End}(L(2) \otimes L(1)^{\otimes 3}) = 6, \text{ mais } \dim \frac{\overset{\text{TL}_3}{\parallel} \text{TL}b_3}{\langle \hat{p}_1 \rangle} = 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \underline{l=3} : L(3) \otimes L(1)^{\otimes 5} &\simeq \dots \simeq L(2) \oplus L(4) \oplus L(8) \oplus 4P(4) \\ &\Rightarrow \dim \text{End}(L(3) \otimes L(1)^{\otimes 5}) = 43, \text{ mais } \dim \frac{\overset{\text{TL}_5}{=} \text{TL}b_5}{\langle \hat{p}_1 \rangle} = 42. \end{aligned}$$