

L'ALGÈBRE ET LA TOPOLOGIE : UN NOEUD-REUX MÊLANGE

La naissance du polynôme de Jones

Charles Senécal

Clubmath de l'Université de Montréal
5 avril 2023

VAUGHAN JONES (1952-2022)



George M. Bergman / Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach

- * Spécialité : analyse fonctionnelle et algèbres de von Neumann
- * Remarque un lien entre ces algèbres et les groupes de tresses, menant au développement d'un invariant de noeuds, maintenant appelé polynôme de Jones.

* 1989 : Edward Witten trouve un lien entre le polynôme de Jones et la théorie quantique des champs.

* 1990 : Witten & Jones obtiennent la médaille Fields.



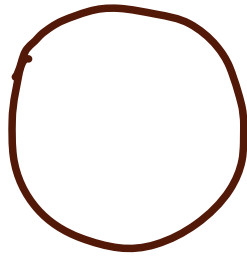
Source : ICM 1990 Nippon Hyoronsha Co., Ltd. Publishers

PARTIE 1 : LA THÉORIE DES NOEUDS

Une introduction ⚡

C'EST QUOI UN NOEUD?

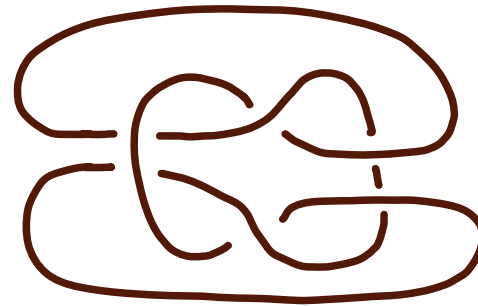
Définition 1: Un noeud est un bout de corde dont on a joint les deux extrémités.



noeud
trivial



noeud de
trèfle

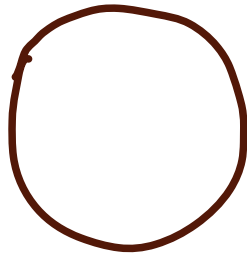


noeud plat

Définition 2 (si ça vous parle): Un noeud K est l'image d'un homéomorphisme $f: S^1 \rightarrow K \subseteq \mathbb{R}^3$.

C'EST QUOI UN NOEUD?

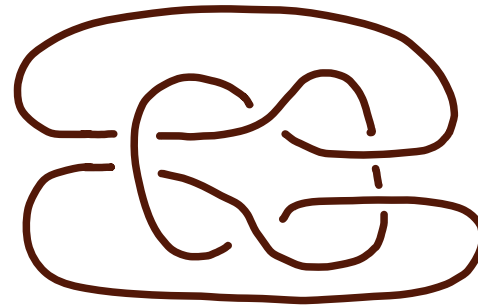
Définition: Deux noeuds sont **équivalents** s'ils peuvent être déformés l'un dans l'autre de façon continue.



noeud
trivial



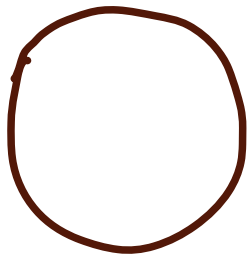
noeud de
trèfle



noeud plat

C'EST QUOI UN NOEUD?

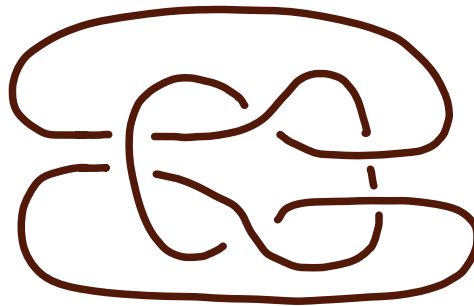
Définition: Deux noeuds sont **équivalents** s'ils peuvent être déformés l'un dans l'autre de façon continue.



noeud
trivial



noeud de
trèfle



noeud plat



noeud
trivial

Problème (difficile): Soient K_1, K_2 deux noeuds. Déterminer si K_1 et K_2 sont équivalents. Justifier votre réponse.

ÉQUIVALENCE DE NOEUDS

On veut considérer les noeuds à déformation continue (= isotopie ambiante) près.

MOUVEMENTS DE REIDEMEISTER :

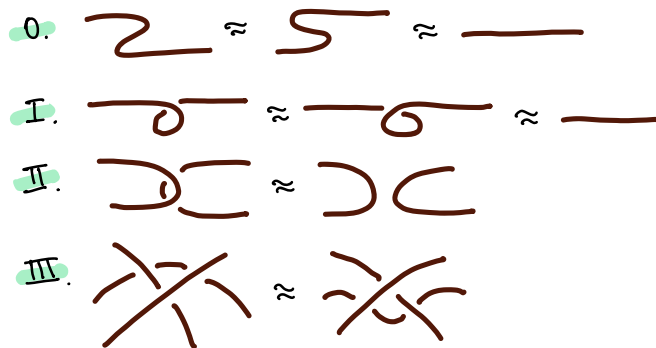


Thm (Reidemeister):

Deux noeuds sont équivalents ssi on peut passer du diagramme de l'un au diagramme de l'autre par des mouvements de Reidemeister.

ÉQUIVALENCE DE NOEUDS

Exemple :



INVARIANTS DE NOEUDS

Définition : Un **entrelacs** est un ensemble de noeuds dans l'espace.

On cherche des outils pour nous aider à déterminer si deux noeuds ou entrelacs sont équivalents.

Bon moyen : construire des invariants

quantité qui est identique pour des noeuds ou entrelacs équivalents.

INVARIANTS DE NOEUDS

Nombre minimal
de croisements dans
le dessin en 2D



Nombre de noeuds
dans un entrelacs



entrelacs de
Hopf

invariants

quantité qui est
identique pour des
noeuds ou entrelacs
équivalents.

Invariants polynomiaux

* polynôme d'Alexander (1923) / Conway - Alexander (1969)

★ polynôme de Jones (1984)

* polynôme HOMFLY-PT (1985-1987)

POLYNÔME DE JONES : 1^{RE} APPROCHE

Méthode de Kauffman pour le calcul du polynôme de Jones d'un noeud ou d'un entrelacs K :

- ① On calcule le polynôme crochet de K , $\langle K \rangle$. Ce dernier est obtenu algorithmiquement à partir des 2 règles :

$$1. \langle \text{X} \rangle = A \langle \text{X} \rangle + A^{-1} \langle \text{X} \rangle$$

$$2. \langle \text{O} \rangle = (- (A^2 + A^{-2}))^{n-1}, \text{ où } n \text{ est le nombre de noeuds triviaux non liés.}$$

- ② On pose $\mathcal{L}_K(A) := (-A^3)^{-w(K)} \langle K \rangle$, où $w(K) \in \mathbb{Z}$ est la torsion de K

- ③ Le polynôme de Jones est

$$V_K(t) = \mathcal{L}_K(t^{-1/4})$$

→ on va y revenir...

POLYNÔME DE JONES : 1^{RE} APPROCHE

Exemple :

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Diagram 1} \rangle &= A \langle \text{Diagram 2} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle \\
 &= A (A \langle \text{Diagram 4} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 5} \rangle) + A^{-1} \langle \text{Diagram 6} \rangle \\
 &= A (A (A \langle \text{Diagram 7} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 8} \rangle) \\
 &\quad + A^{-1} (A \langle \text{Diagram 9} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 10} \rangle)) \\
 &\quad + A^{-1} \langle \text{Diagram 11} \rangle
 \end{aligned}$$

$$1. \langle \text{Crossing} \rangle = A \langle \text{Arc} \rangle + A^{-1} \langle \text{Arc} \rangle$$

$$2. \langle \text{N-component unlink} \rangle = (- (A^2 + A^{-2}))^{n-1}$$

POLYNÔME DE JONES : 1^{RE} APPROCHE

Exemple :

$$\begin{aligned}
 \langle \text{trefoil} \rangle &= A \langle \text{trefoil} \rangle + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle \\
 &= A(A \langle \text{trefoil} \rangle + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle) + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle \\
 &= A(A(A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle) \\
 &\quad + A^{-1}(A \langle \text{trefoil} \rangle + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle)) \\
 &\quad + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle
 \end{aligned}$$

$$1. \langle \text{crossing} \rangle = A \langle \text{cup} \rangle + A^{-1} \langle \text{cap} \rangle$$

$$2. \langle \text{n-component unlink} \rangle = (- (A^2 + A^{-2}))^{n-1}$$

POLYNÔME DE JONES : 1^{RE} APPROCHE

Exemple :

$$\begin{aligned}
 \langle \text{trefoil} \rangle &= A \langle \text{trefoil} \rangle + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle \\
 &= A(A \langle \text{trefoil} \rangle + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle) + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle \\
 &= A(A(A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1}) \\
 &\quad + A^{-1}(A \langle \text{trefoil} \rangle + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle)) \\
 &\quad + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle
 \end{aligned}$$

$$1. \langle \text{crossing} \rangle = A \langle \text{cup} \rangle + A^{-1} \langle \text{cap} \rangle$$

$$2. \langle \text{n-component unlink} \rangle = (- (A^2 + A^{-2}))^{n-1}$$

POLYNÔME DE JONES : 1^{RE} APPROCHE

Exemple :

$$\begin{aligned}
 \langle \text{trefoil} \rangle &= A \langle \text{trefoil} \rangle + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle \\
 &= A(A \langle \text{trefoil} \rangle + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle) + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle \\
 &= A(A(A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1}) \\
 &\quad + A^{-1}(A + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle)) \\
 &\quad + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle
 \end{aligned}$$

$$1. \langle \text{crossing} \rangle = A \langle \text{positive crossing} \rangle + A^{-1} \langle \text{negative crossing} \rangle$$

$$2. \langle \text{n-component unlink} \rangle = (- (A^2 + A^{-2}))^{n-1}$$

POLYNÔME DE JONES : 1^{RE} APPROCHE

Exemple :

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Diagram 1} \rangle &= A \langle \text{Diagram 2} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle \\
 &= A (A \langle \text{Diagram 4} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 5} \rangle) + A^{-1} \langle \text{Diagram 6} \rangle \\
 &= A (A (A (-A^2 - A^{-2}) + A^{-1}) \\
 &\quad + A^{-1} (A + A^{-1} (-A^2 - A^{-2}))) \\
 &\quad + A^{-1} \langle \text{Diagram 7} \rangle
 \end{aligned}$$

$$1. \langle \text{Diagram 8} \rangle = A \langle \text{Diagram 9} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 10} \rangle$$

$$2. \langle \text{Diagram 11} \rangle = (- (A^2 + A^{-2}))^{n-1}$$

POLYNÔME DE JONES : 1^{RE} APPROCHE

Exemple :

$$\begin{aligned}\langle \text{Diagram 1} \rangle &= A \langle \text{Diagram 2} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle \\ &= A(A \langle \text{Diagram 4} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 5} \rangle) + A^{-1} \langle \text{Diagram 6} \rangle \\ &= -A^5 - A^{-3} + A^{-1} \langle \text{Diagram 7} \rangle \\ &= \dots \\ &= -A^5 - A^{-3} + A^{-1}(A^{-6}) \\ &= -A^5 - A^{-3} + A^{-7}\end{aligned}$$

1. $\langle \text{Diagram 8} \rangle = A \langle \text{Diagram 9} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 10} \rangle$

2. $\langle \text{Diagram 11} \rangle = (- (A^2 + A^{-2}))^{n-1}$

POLYNÔME DE JONES : 1^{RE} APPROCHE

OK... Mais comment sait-on que c'est un invariant ?

RAPPEL: mouvements de Reidemeister

0. $\curvearrowright \approx \curvearrowleft \approx \text{---}$ ✓

I. $\text{---} \circ \text{---} \approx \text{---} \circ \text{---} \approx \text{---}$

II. $\text{---} \cap \text{---} \approx \text{---} \cup \text{---}$ $\rightarrow \langle \text{---} \cap \text{---} \rangle = A \langle \text{---} \cup \text{---} \rangle + A^{-1} \langle \text{---} \cap \text{---} \rangle$

III. $\text{---} \times \text{---} \approx \text{---} \times \text{---}$... ✓

$$= A(A \langle \text{---} \cup \text{---} \rangle + A^{-1} \langle \text{---} \cap \text{---} \rangle) + A^{-1}(A \langle \text{---} \cup \text{---} \rangle + A^{-1} \langle \text{---} \cap \text{---} \rangle)$$

$$\langle \text{---} \cap \text{---} \rangle = A \langle \text{---} \cup \text{---} \rangle + A^{-1} \langle \text{---} \cap \text{---} \rangle$$

$$= (A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1}) \langle \text{---} \rangle$$

$$= (-A^3) \langle \text{---} \rangle$$

$$= (A^2 + (-A^2 - A^{-2}) + A^{-2}) \langle \text{---} \rangle + \langle \text{---} \cap \text{---} \rangle$$

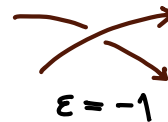
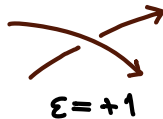
$$= \langle \text{---} \cap \text{---} \rangle \quad \checkmark$$

② On pose $\mathcal{L}_K(A) := (-A^3)^{-w(K)} \langle K \rangle$

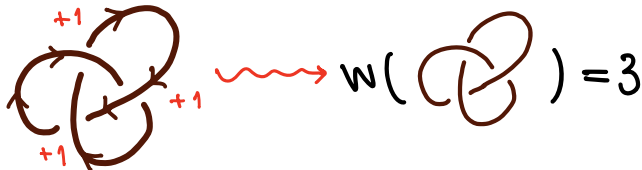
INTERMÈDE : LA TORSION

On a besoin de tenir le compte du nombre de croisements et du sens de ces croisements.

Définition : Soit K un entrelacs orienté. La torsion de K est $w(K) = \sum_p \varepsilon(p)$ où p parcourt tous les croisements de K et ε est le signe du croisement :



Exemple :



Exemple :

$$w(\text{positive crossing}) = 1 + w(\text{strand})$$

$$w(\text{negative crossing}) = 1 + w(\text{strand})$$

Thm :

$\mathcal{L}_K(A) = (-A^3)^{-w(K)} \langle K \rangle$ est invariant sous isotopie ambiante.

POLYNÔME DE JONES : 1^{RE} APPROCHE

Exemple :

$$\begin{aligned} \langle \text{trefoil} \rangle &= A \langle \text{trefoil} \rangle + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle \\ &= A(A \langle \text{trefoil} \rangle + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle) + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle \\ &= -A^5 - A^{-3} + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle \\ &= \dots \\ &= -A^5 - A^{-3} + A^{-1}(A^{-6}) \\ &= -A^5 - A^{-3} + A^{-7} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{\text{trefoil}}(A) = (-A^3)^{-3} (-A^5 - A^{-3} + A^{-7}) = A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}$$

$$\text{Donc } V_{\text{trefoil}}(t) = \mathcal{L}_{\text{trefoil}}(t^{-1/4}) = t^1 + t^3 - t^4$$

POLYNÔME DE JONES : 1^{RE} APPROCHE

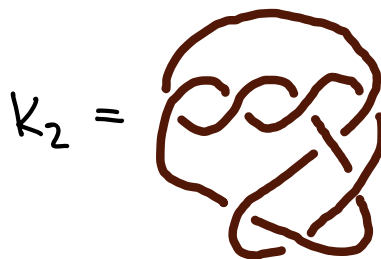
À quel point le polynôme de Jones est-il un bon invariant ?

Définition : Un invariant est dit **complet** s'il prend des valeurs différentes pour des entrelacs différents.

V_K n'est pas un invariant complet...

Exemple :

Soient



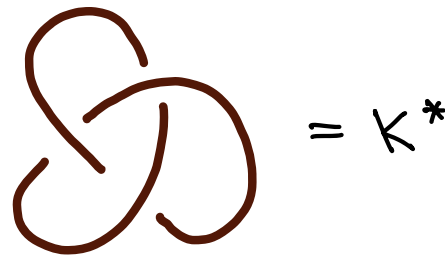
Alors $K_1 \neq K_2$ mais $V_{K_1}(t) = V_{K_2}(t) = (t^{-2} - t^{-1} + 1 - t - t^2)^2$.

INTERMÈDE : LA CHIRALITÉ

Étant donné un nœud K , on note K^* son image par un miroir. Par exemple,



$$V_K(t) = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}$$



$$V_{K^*}(t) = t + t^3 - t^4$$

Thm :

$V_{K^*}(t) = V_K(t^{-1})$. En particulier, V_K détecte la chiralité.

CONJECTURE 4. If L is not amphicheiral, $V_{L^*} \neq V_L$.

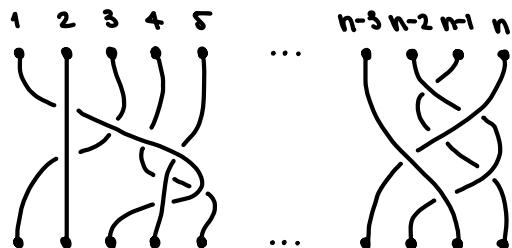
There is some evidence for this conjecture, but only \$10 hangs on it.

... c'est faux. Mais il est quand même pas pire.

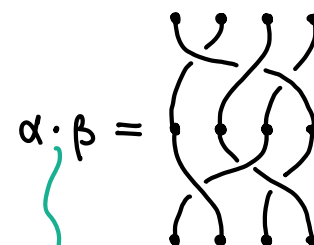
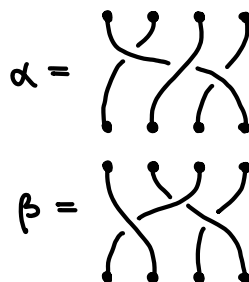
PARTIE 2 : « ON M'AVAIT PROMIS DE L'ALGÈBRE ! »

LE GROUPE DE TRESSES

Une tresse :

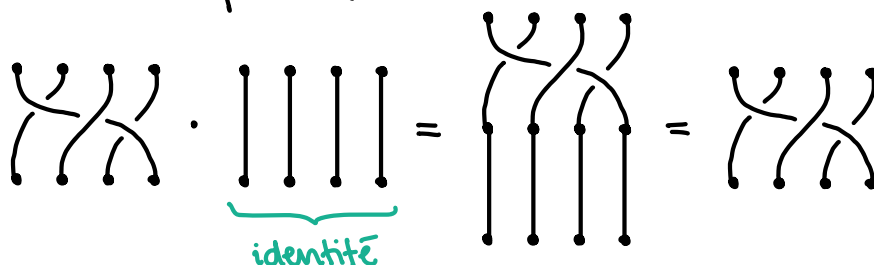


Deux tresses :

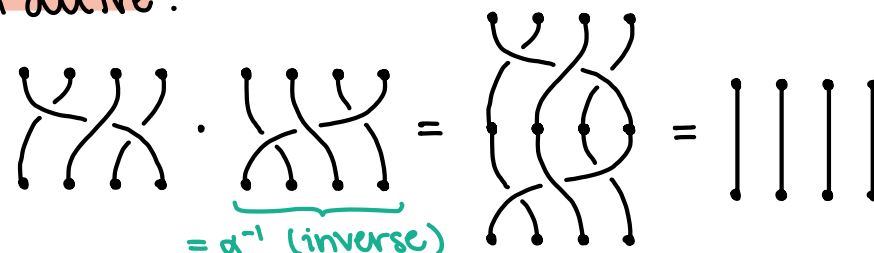


opération binaire
 $\{tresses\} \times \{tresses\} \rightarrow \{tresses\}$

Un élément spécial :



Un autre :



Def. : Un groupe $(G, \cdot)$ est un ensemble G muni d'une opération binaire

$\cdot : G \times G \rightarrow G$ t.q.

1. $\cdot$ est associative

2. $\exists e \in G$ t.q. $e \cdot g = g \cdot e = g$

$\forall g \in G$

3. $\forall g \in G \exists g^{-1} \in G$ t.q.

$gg^{-1} = g^{-1}g = e$

LE GROUPE DE TRESSES

Le groupe de tresses à n brins est noté B_n . Considérons

$$\sigma_i := \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & & i & i+1 & n-1 & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \in B_n$$

Alors les σ_i , $i = 1, \dots, n-1$ engendrent B_n .

$$B_n = \{ \sigma_{i_1}^{\pm 1} \sigma_{i_2}^{\pm 1} \dots \sigma_{i_m}^{\pm 1} \mid 1 \leq i_k \leq n-1 \}$$

$$\sigma_i^{-1} := \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & & i & i+1 & n-1 & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \in B_n$$

LE GROUPE DE TRESSES

Le groupe de tresses à n brins est noté B_n . Considérons

$$\sigma_i := \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & & i & i+1 & \dots & n-1 & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ | & | & | & \dots & | & | & & | & | \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \end{array} \in B_n$$

Alors les σ_i , $i = 1, \dots, n-1$ engendrent B_n .

$$B_n = \{ \sigma_{i_1}^{\pm 1} \sigma_{i_2}^{\pm 1} \dots \sigma_{i_m}^{\pm 1} \mid 1 \leq i_k \leq n-1 \}$$

Exemple :

$$\alpha = \begin{array}{c} \text{Diagram of three crossings: } \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_3^{-1} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram of four strands with crossings } \sigma_1^{-1}, \sigma_2, \sigma_3^{-1} \end{array} = \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_3^{-1}$$

LE GROUPE DE TRESSES

Le groupe de tresses à n brins est noté B_n . Considérons

$$\sigma_i := \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & & i & i+1 & n-1 & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ | & | & | & \dots & | & \times & | & \dots & | & | \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \downarrow \end{array} \in B_n$$

Alors les σ_i , $i = 1, \dots, n-1$ engendrent B_n .

$$B_n = \{ \sigma_{i_1}^{\pm 1} \sigma_{i_2}^{\pm 1} \dots \sigma_{i_m}^{\pm 1} \mid 1 \leq i_k \leq n-1 \}$$

Relations :

$$\begin{array}{ccccccc} | & | & | & \dots & | & | & | & \dots & | & | \\ | & | & | & \dots & | & | & | & \dots & | & | \\ | & | & | & \dots & | & | & | & \dots & | & | \end{array} = \begin{array}{ccccccc} | & | & | & \dots & | & | & | & \dots & | & | \\ | & | & | & \dots & | & | & | & \dots & | & | \\ | & | & | & \dots & | & | & | & \dots & | & | \end{array}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i-j| \geq 2 = \begin{array}{ccccccc} | & | & | & \dots & | & | & | & \dots & | & | \\ | & | & | & \dots & | & | & | & \dots & | & | \\ | & | & | & \dots & | & | & | & \dots & | & | \end{array}$$

LE GROUPE DE TRESSSES

le groupe de tresses à n brins est noté B_n . Considérons

$$\sigma_i := \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & & i & i+1 & n-1 & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ | & | & | & \dots & | & | & | & | \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \in B_n$$

Alors les σ_i , $i = 1, \dots, n-1$ engendrent B_n .

$$B_n = \{ \sigma_{i_1}^{\pm 1} \sigma_{i_2}^{\pm 1} \dots \sigma_{i_m}^{\pm 1} \mid 1 \leq i_k \leq n-1 \}$$

Relations :

- $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ si $|i-j| \geq 2$

$$\begin{array}{c} \sigma_i \\ \sigma_{i+1} \\ \sigma_i \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \sigma_{i+1} \\ \sigma_i \\ \sigma_{i+1} \end{array}$$

$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$

LE GROUPE DE TRESSSES

Le groupe de tresses à n brins est noté B_n . Considérons

$$\sigma_i := \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & & i & i+1 & & n-1 & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & & & & \times & & & \end{array} \in B_n$$

Alors les σ_i , $i = 1, \dots, n-1$ engendrent B_n .

$$B_n = \{ \sigma_{i_1}^{\pm 1} \sigma_{i_2}^{\pm 1} \dots \sigma_{i_m}^{\pm 1} \mid 1 \leq i_k \leq n-1 \}$$

Relations :

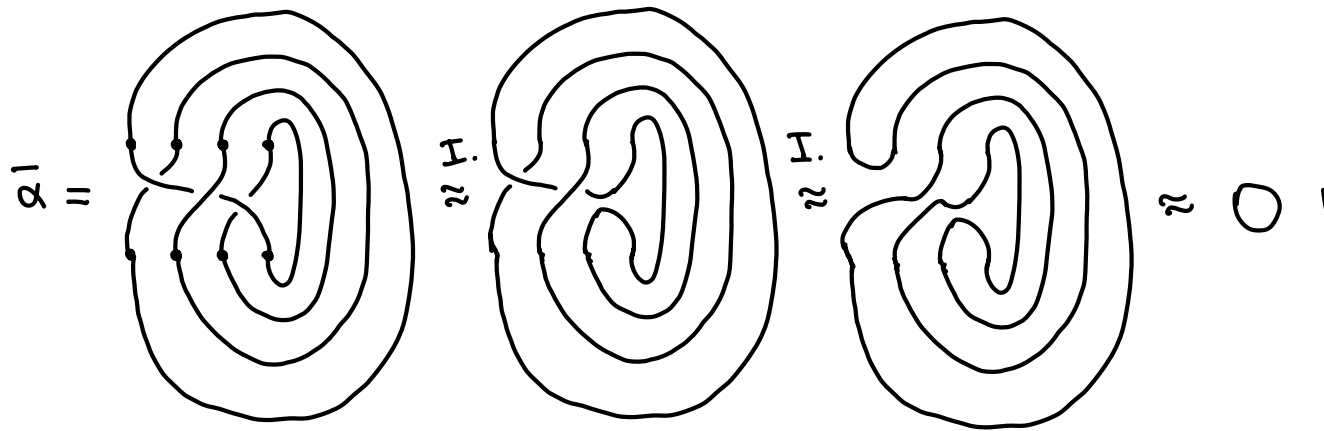
- $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ si $|i-j| \geq 2$
- $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$

Thm (Artin):

$$B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i-j| \geq 2, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \end{array} \rangle$$

est une présentation par générateurs et relations du groupe de tresses.

TRESSES ET NOEUDS



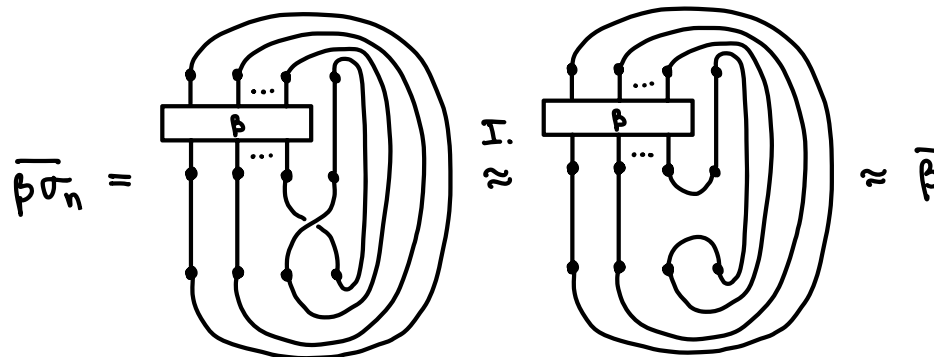
Thm (Alexander):

Tout entrelacs est équivalent à un entrelacs obtenu par la fermeture d'une tresse.

Si $\beta \in B_n$, alors

$\beta \sigma_n \in B_{n+1}$ et

«mouvement de Markov»



TRESSES ET NOEUDS

Thm (Alexander):

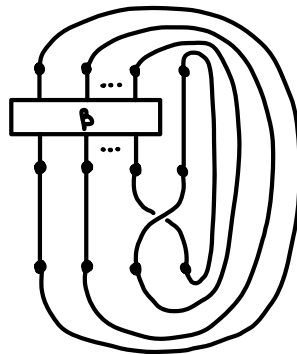
Tout entrelacs est équivalent à un entrelacs obtenu par la fermeture d'une tresse.

Si $\beta \in B_n$, alors

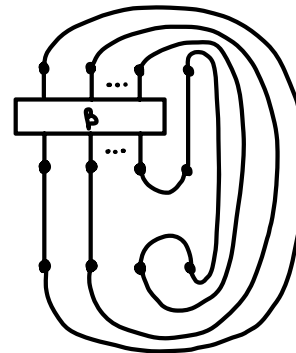
$\beta \sigma_n \in B_{n+1}$ et

« mouvement de Marker »

$\overline{\beta \sigma_n} =$



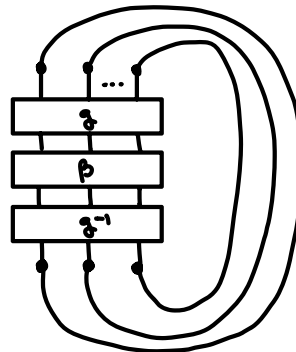
$\approx$



$\approx$

$\overline{\beta}$

Si $\beta, g \in B_n$, alors $\overline{g \beta g^{-1}} = \overline{\beta}$.



TRESSES ET NOEUDS

Thm (Alexander):

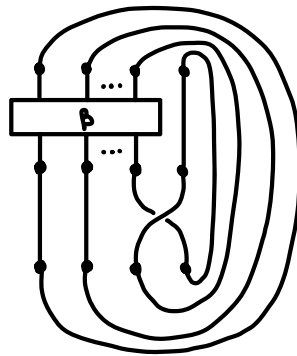
Tout entrelacs est équivalent à un entrelacs obtenu par la fermeture d'une tresse.

Si $\beta \in B_n$, alors

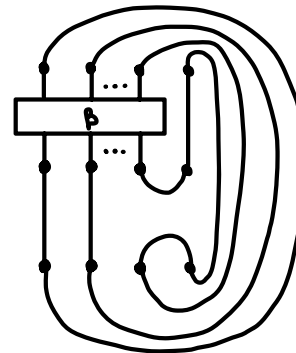
$\beta \sigma_n \in B_{n+1}$ et

« mouvement
de Markov »

$\overline{\beta \sigma_n} =$



$\approx$



$\approx \overline{\beta}$

Si $\beta, g \in B_n$, alors $\overline{g \beta g^{-1}} = \overline{\beta}$.

Thm (Markov):

Soient $\beta_n \in B_n$ et $\beta'_m \in B_m$. Alors $\overline{\beta_n} \approx \overline{\beta'_m}$ si et seulement si β'_m peut être obtenu de β_n par une série de

1) conjugaisons dans un groupe de tresses

2) mouvements de Markov ($\beta \in B_n \leftrightarrow \beta \sigma_n^{\pm 1} \in B_{n+1}$).

CONSTRUCTION D'INVARIANTS

Supposons qu'on ait des fonctions $J_n: B_n \rightarrow R$ pour $n=1,2,\dots$ telles que

↳ par exemple,
anneau de
polynômes

1. $\forall g, b \in B_n, J_n(gbg^{-1}) = J_n(b)$

2. $\exists \alpha \in R$ (indépendant de n) t.q. si $b \in B_n$,

$$J_{n+1}(b\sigma_n) = \alpha J_n(b)$$

$$J_{n+1}(b\sigma_n^{-1}) = \alpha^{-1} J_n(b)$$

Définition: On appelle $\{J_n\}$ une trace de Markov sur $\{B_n\}$.

On peut définir un invariant d'entrelacs en posant, pour L un entrelacs avec $L \approx \bar{b}$, $b \in B_n$,

$$J_L = \alpha^{-w(\bar{b})} J_n(b)$$

L'ORIGINE DU POLYNÔME DE JONES

Jones étudiait des algèbres de von Neumann A_n , de dimension finie, engendrées par n projections $e_1, \dots, e_n$ t.q.

$$(I) e_i^2 = e_i, e_i^* = e_i$$

$$(II) e_i e_{i+1} e_i = \tau(t) e_i$$

$$(III) e_i e_j = e_j e_i \text{ si } |i-j| \geq 2$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i-j| \geq 2$$

Ces algèbres A_n possèdent une trace $\text{tr} : A_n \rightarrow \mathbb{C}$ t.q.

$$(IV) \text{tr}(ab) = \text{tr}(ba)$$

$$(V) \text{tr}(w e_{n+1}) = \tau(t) \text{tr}(w) \text{ si } w \in A_n$$

$$(VI) \text{tr}(a^* a) > 0 \text{ si } a \neq 0$$

$$J_n(g b g^{-1}) = J_n(b)$$

$$J_{n+1}(b \sigma_n) = \alpha J_n(b)$$

$$J_{n+1}(b \sigma_n^{-1}) = \alpha^{-1} J_n(b)$$

On peut définir un morphisme $r_t : B_n \rightarrow A_n$. Alors,

si $L = \overline{b}$, $b \in B_n$, $V_L(t) := (-\sqrt{\tau(t)})^{-(n-1)} \text{tr}(r_t(b)) \in \mathbb{Z}[\sqrt{t}, \sqrt{t}^{-1}]$

est un invariant d'entrelacs.