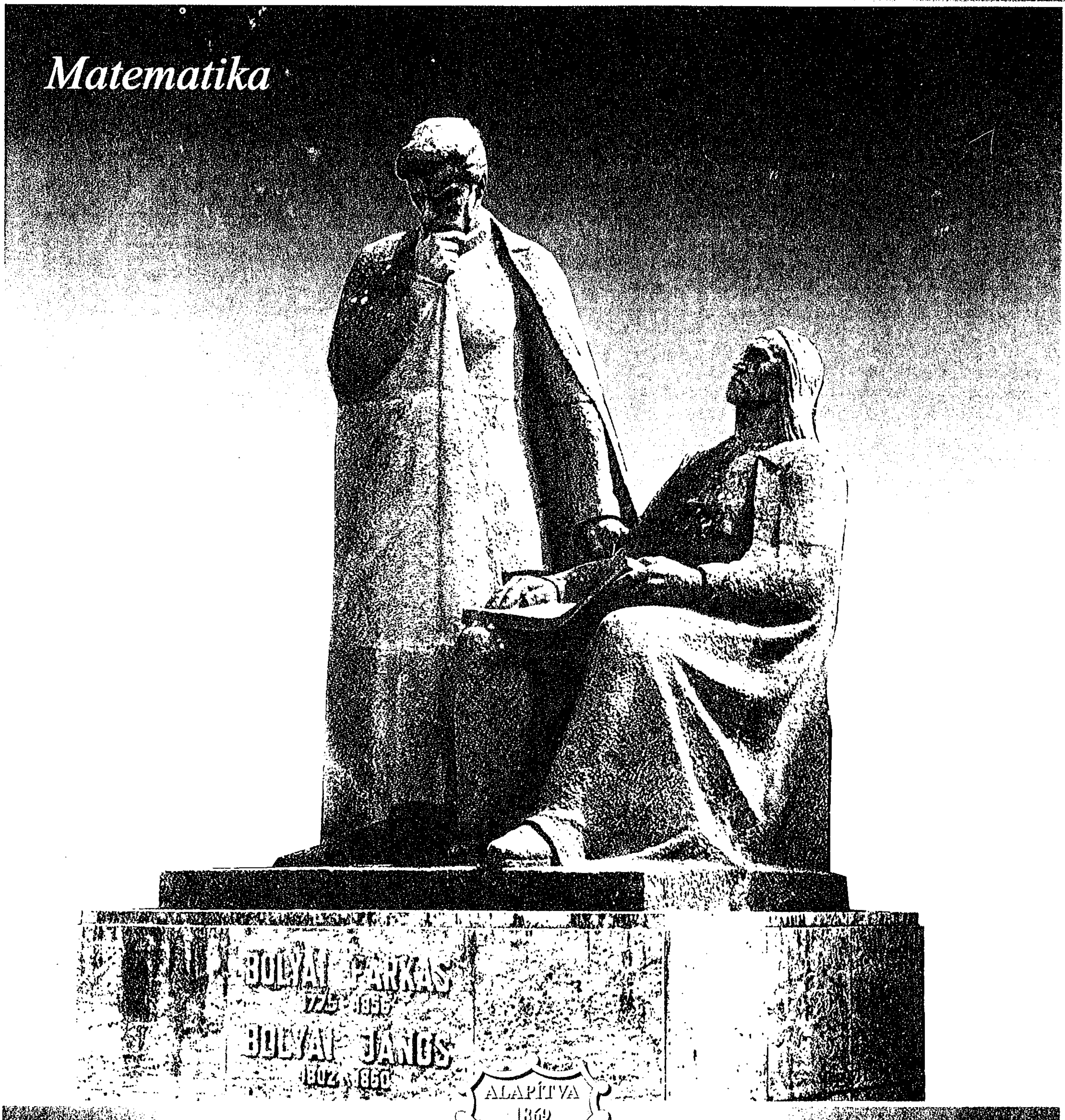
Természet Világa

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KÖZLÖNY • 129. ÉVF. • 1998. III. KÜLÖNSZÁM ÁRA 560 Ft

Matematika



ALAPÍTVA 1869

Természet Világa

ALAPÍTVA 1869

A TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT ÉS A MAGYAR HIVATALOS KÖZLÖNYKIADÓ FOLYÓIRATA

Megindította 1869-ben SZILY KÁLMÁN

A TERMÉSZETTUDOMÁNYI KÖZLÖNY 129. ÉVFOLYAMA

Matematika (1998. III. különszám)

Megjelent a Természet–Tudomány Alapítvány támogatásával, valamint a Soros Alapítvány hozzájárulásával

Főszerkesztő: STAAR GYULA

Szerkesztőség: Budapest, Somogyi Béla utca 6. 1085
Telefon, fax: 318-7506
Levélcím: 1444 Budapest 8., Pf. 256
E-mail: termvil@mail.datanet.hu
Internet-címünk: http://www.kfki.hu/~cheminfo/TermVil/ vagy: http://www.ch.bme.hu/chemonet/TermVil/

Felelős kiadó: NYÉKI JÓZSEF vezérigazgató

Kiadja a Magyar Hivatalos Közlönykiadó
1085 Budapest, Somogyi Béla utca 6.
Telefon: 266-9290, 266-9294
Hirdetésfelvétel a szerkesztőségben

Magyar Hivatalos Közlönykiadó Nyomdája, Lajosmizse
98 2014

Igazgató: BURJÁN NORBERT

INDEX 25 807
HU ISSN 0040–3717

Előfizethető: a Magyar Hivatalos Közlönykiadónál 1085 Budapest, Somogyi Béla u. 6. 1394 Bp. 62. Pf. 357
Előfizetésben terjeszti: a Fáma Rt. (1085 Budapest, Somogyi Béla u. 6.) Telefon: 318-8557, 266-6567
Árusításban megvásárolható: a Közlönyboltban (1085 Budapest, Somogyi Béla utca 6.) A Hírker Rt., a NHRT és a regionális terjesztők árushelyein.

Előfizetési díj: fél évre 1176 Ft, egy évre 2352 Ft

TARTALOM

Címképünk: A két Bolyai szobra a marosvásárhelyi Református Kollégium előtt
Borítólapunk második oldalán: Matematikusok – megörökítve
Borítólapunk harmadik oldalán: A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok legjobb feladatmegoldói (válogatás)
Borítólapunk negyedik oldalán: Névjegyképletek

A különszám összeállítója: STAAR GYULA

Szakmai őre: CSÁSZÁR ÁKOS

Szerkesztők: DÜRR JÁNOS, KAPITÁNY KATALIN, NÉMETH GÉZA

Tervezőszerkesztő: FÜLÖP LAJOS

A borítóoldalak KOVÁCS ATTILA munkái

A. R. D. MATHIAS

Bourbaki tévútjai[1]

A szerző,
A. R. D. Mathias Walesben, vidéken nőtt fel. A cambridge-i Trinity College-ban tanult matematikát, és itt szerezte PhD-fokozatát halmazelméletből. Később visszatért Cambridge-be, és a következő 20 évben az ottani Peterhouse kollégiumban tanított és kutatott. 1991 tavaszán vendégprofesszor volt Berkeley-ben, majd 1991–92-ben a varsói egyetemen, 1992–93-ban a németországi Oberwolfachban (közben szakmai utakat tett Bonnba, Caen-be és Berkeley-be), 1993–96-ban a Barcelona melletti Centre de Recercea Matematica de l'Institut de'Estudis Catalans-ban, 1996–97-ben Walesben (tiszteletbeli tagja az aberyswythi University College of Walesnek) és végül 1997–98-ban Stanford Professor of Mathematical Logic a bogotai Universidad de los Andes egyetemen. Szeretett volna visszatérni Walesbe, ezért egy időben welsziül tanult. Disszertációjában kidolgozta az ún. Mathias-féle valós számok elméletét, és ennek segítségével sikerült bebizonyítania, hogy ha a halmazelmélet axiómarendszere ellentmondástalan marad az elérhetetlen számosság létezését kimondó axióma hozzávételével (egy számosság „elérhetetlen", ha a szokásos halmazképzési műveletekkel „alulról" nem érhető el, tehát egyrészt nagyobb, mint kevesebb számú, nála kisebb számosság uniójának számossága, másrészt nagyobb, mint bármely nála kisebb számosság hatványhalmazának számossága. – A ford.), akkor még tovább bővíthető ellentmondástalanul az $\omega\to(\omega)^\omega$ ún. partíciórelációval (Itt „ω" a természetes számokat jelöli a szokásos rendezéssel. A partíciórelációk a kombinatorikából jól ismert skatulyaelv különféle általánosításai rendezett végtelen halmazokra. – A ford.). Szeretné, ha majdan ezt a formulát vésnék a sírkövére. Előadóművészként időről időre rábírja barátait, hogy az ő előadásában hallgassák meg Bach, Chopin, Liszt és Beethoven műveit, és néha maga is ír zeneműveket.

A matematika történetében a lázas alkotás, a versengő eszmék gyors kibontakozásának korszakai után mindig eljön a kétely ideje. A nemrég még oly divatos elméletekről kiderül, hogy pontatlanok, zavarosak, néha még ellentmondásosak is. Az ezután következő időszakokban kibontakoznak a törekvések az elért eredmények szilárd alapokra helyezésére.

Azt írtam, hogy „A matematika története", pedig a matematika bonyolult társadalmi jelenség, amely különböző területein, különböző országokban, egyetemeken másképp és más sebességgel fejlődik. Néha a nemzeti érdekek védelmezői úgy érzik, hogy országukban a matematika rossz irányba halad. Például Hardy *„Pure Mathematics"* c. műve későbbi kiadásainak előszavában leírja, hogy könyvével a századfordulói angol matematikának a 19. századi francia matematikától való elszigeteltségét kívánta megszüntetni.

Valóban, 1910-ben Franciaország joggal lehetett büszke matematikusainak egész sorára, hiszen Legendre, Laplace, Lagrange, Fourier, Cauchy, Galois, Hadamard, Poincaré kiemelkedő tudósok voltak.

Az I. világháború után azonban ez a vélekedés megváltozott Franciaországban. A fiatal matematikusok úgy érezték, hogy a francia matematika hullámvölgybe került. A zászlóvivő szerepét átvette Németország, ahol Riemann, Frobenius, Dedekind, Kummer, Kronecker, Minkowski, Cantor munkásságát olyan kiemelkedő tudósok folytatták, mint Klein, Hilbert, Weyl, Artin, Noether, Landau és Hausdorff.

Így történt, hogy 1935-ben fiatal francia matematikusok egy csoportja[2] úgy döntött, visszaállítja a francia matematika tekintélyét. Elhatározták, hogy az elméleti matematika általuk legfontosabbnak tekintett területeit a francia szellemhez illő műgonddal kodifikálják, és ezzel párhuzamosan munkájuk eredményét könyvsorozatban adják közre. Közös álnevükként a Nicolas Bourbakit választották.

Ebben az időben a matematikai pontosság annál is fontosabb volt, mivel Russell a század elején alapvető hibát fedezett fel Frege osztályelméletében. Frege minden $\Phi\ (y)$ tulajdonsághoz tekintette az ezen tulajdonságú elemek $\{\Phi(y)\}$ osztályát, és ugyanakkor minden ilyen osztályt is úgy tekintett, mint bármely másik osztály egy lehetséges elemét. Ha „$a\in b$"-vel jelöljük azt, hogy „a eleme b"-nek és „$a\notin b$"-vel azt, hogy „a nem eleme b"-nek, akkor Frege általános elvét az alábbi módon fejezhetjük ki. Jelöljük $\{\Phi(y)\}$-t C-vel; ekkor minden a elemre teljesül, hogy $a\in C$ pontosan akkor igaz, ha $\Phi(a)$. Cantor módszerét felhasználva Russell észrevette, hogy ha az $y\notin y$ tulajdonságot (tehát azt, hogy valami nem eleme saját magának) jelöljük $\Phi\ (y)$-nal, akkor ellentmondást kapunk. Legyen ugyanis B azon elemek halmaza, amelyek nem elemei saját maguknak, azaz $B=\{y\,|\,y\notin y\}$. Ekkor minden y-ra fennáll, hogy $y\in B$ pontosan akkor igaz, ha $y\notin y$, ami az $y=B$ esetben azt az ellentmondást adja, hogy $y\in y$ pontosan akkor igaz, ha $y\notin y$.

Jó néhányan voltak – főleg Kronecker, Poincaré, Brouwer és Hermann Weyl neve említendő közülük –, akik ezen ellentmondás megszüntetése érdekében ki akarták iktatni a matematikából annak a végtelen fogalmára épülő spekulatív részeit, különösen Cantor számosságait és rendszámait.

Hilbert volt a vezéralakja azoknak, akik ellene voltak egy ilyen nagymérvű csonkításnak. Úgy vélték, hogy a matematika nyelve, axiómái, következtetési szabályai stb. formalizálásával nyert rendszerről már minden kétséget kizáróan be lehet bizonyítani, hogy ellentmondásmentes.

Azonban nem volt világos, hogy a matematika mely területeit lehetne vagy kellene formalizálni. Hilbert természetesen meg akarta őrizni Cantor rendszámelméletét, hiszen ennek köszönhette ismertté válását. Első híres eredménye a *bázistétel* volt, amely mai megfogalmazásban azt állítja, hogy ha egy R kommutatív gyűrű minden ideálja végesen generált, akkor ugyanez igaz az R feletti többváltozós polinomok gyűrűjére is. Hilbert bizonyításában felhasználta az ω^ω rendtípus jól rendezettségét. (Egy rendezett halmaz jól rendezett, ha nincs benne végtelen csökkenő sorozat. – *A ford.*) Ma már tudjuk, hogy a két állítás valójában ekvivalens.[3]

Így Hilbert szállóigéje a halmazelméletről, mint a Cantor teremtette édenkertről több volt puszta dicséretnél. Felismerte, hogy ez a szellemi élettere a transzfinit indukciónak, és ennek révén az algebrai geometria továbbfejlődésének.

Russell elképzelései a paradoxonok elkerüléséről elágazó típuselméletében nyertek végleges formát. Elmélete azonban áttekinthetetlen volt, és a század első évtizedében Zermelo leegyszerűsítette. Az ő halmazelméleti axiómarendszerét a 30-as években Fraenkel és Skolem tette hatékonyabbá a pótlás axiómájával; ez a Zermelo-Fraenkel axiómarendszer, rövidítve a „ZF". A Zermelo által bevezetett kiválasztási axiómának fontos szerep jutott a funkcionálanalízisben és az absztrakt algebrában. A kiválasztási axiómával és Neumann János regularitási axiómájával kiegészített „ZFC" azóta sokszorosan bebizonyította hasznosságát.[4]

Hilbert programja egy kreatív és egy kritikai részből állt: az elsőben javasolt egy rendszert, a másodikban megpróbálta igazolni, hogy rendszere megfelelő és ellentmondástalan. A Bourbaki-csoport természetesen tudatában volt az eshetőségnek, hogy lehetnek a matematikában ellentmondások és eltökélte, hogy könyvsorozata ezektől mentes lesz. Az egyik korai kötet – *La Théorie des Ensembles („Halmazelmélet")* – célja éppen az alapok lefektetése volt a későbbiek számára.

Nemrégiben elhatároztam, hogy beleolvasok.

Meg voltam döbbenve. Úgy tűnt, hogy a szerző olvasta Hilbert–Ackermann *Grundzüge der Mathematik („A matematika alapjai")* c. művét és Sierpinskitől a *Leçons sur les nombres transfinis*-t *(„Előadások a végtelen számosságokról")*, de azóta semmit, holott mindkettő 1928-ban jelent meg.

Érthetetlennek tartottam Bourbaki felfogását az alapokról és a halmazelméletről. Utánanéztem: a 30-as és a 40-es években a bourbakisták többször is kifejtették a csoport véleményét. Henri Cartan és Jean Dieudonné saját neve alatt is írt a matematika alapjairól. A világháború után a csoport, azaz maga Nicolas Bourbaki is az amerikai Association for Symbolic Logic-hoz fordult, és kifejtette véleményét a *Journal of Symbolic Logic*-ban. Ezenkívül még egy tanulmányt írt *„L'architecture des mathématiques"* („A matematika felépítése") címmel, amely az *American Mathematical Monthly*-ban jelent meg angol fordításban.

Ezek a tanulmányok nagyon hasonlítanak egymásra: egyfelől mindegyik elfogadja Zermelo rendszerét (fontos, hogy nem a Zermelo–Fraenkel axiómarendszert!), mint amely megfelelő a matematika egésze számára. Másrészt ami a próbát, az ellenőrzést illeti, világosan mutatják Hilbert ún. formalista programjának hatását. Figyelemre méltó, hogy Gödelt egyikük sem említi, így ezen a ponton érdemes kitérni a nemteljességi tételre.

Hilbert 1930. január 23-án visszavonult göttingeni egyetemi tanszékéről. Szeptember 30-án Königsberg (ma Kalinyingrád) városa tiszteletbeli polgárává fogadta. Ebből az alkalomból tartotta híres és nagy hatású *„Naturkennen und Logik"* című előadását, amelyben kifejtette credóját, mely szerint megoldhatatlan problémák nincsenek.[5] Előadását ezzel a kérlelhetetlen csatakiáltással fejezte be:

Wir müssen wissen;
Wir werden wissen.

(„Kell, hogy mindent megismerjünk; Biztos, hogy mindent megismerünk.") A történelem fintora, hogy egy nappal azelőtt Gödel tartott előadást Königsbergben. Hilbert nem volt a hallgatóság tagjai között,[6] de Neumann János igen. Gödel itt ismertette nemteljességi tételét, és bemutatta annak alkalmazását a Peano-aritmetikára és a Zermelo–Fraenkel-axiómarendszerre.[7]

Azt várhatnánk, hogy mindez a szenzáció erejével hatott. Hiszen Hilbert érdemi választ adott a halmazelméleti paradoxonokra, és programját követve tanítványai, így Herbrand megválaszolták az eldöntési probléma bizonyos eseteit – most pedig Gödel kimutatta Hilbert tervének korlátozott mivoltát![8] Bebizonyította, hogy minden, bizonyos minimális feltételeknek eleget tevő axiómarendszer (pl. legyen algoritmikusan eldönthető bármely formuláról, hogy axióma-e vagy sem) csak a matematika egy részét képes megragadni, és minden ilyen rendszer ellentmondás-mentességének bizonyítása csak olyan rendszerben végezhető el, amely nagyobb eséllyel tartalmaz ellentmondást, mint az eredeti.

Ennek az eredménynek döntő hatása volt a matematika alapjaira. Neumann János és mások is egyből reagáltak Gödel eredményeire. Természetes tehát a kérdés, hogy mindez milyen hatással volt a bourbakistákra: Annál furcsább, hogy írásaikban nem említik Gödelt. Akár azt is mondhatnánk, hogy szándékosan nem vettek róla tudomást. Csak néhány írásuk stílusa mutatja, hogy a történtek zavarba hozták őket és egyúttal azt is, hogy szeretnének úgy tenni, mintha mégse történt volna semmi. Mintha felfedezték volna, hogy együtt élnek egy sárkánnyal egy szigeten és elhitették volna magukkal, hogy ha nem adnak neki nevet, akkor nem is létezik.

Így például Henri Cartan *„Sur le fondement logique des mathématiques"* („A matematika logikai megalapozása")[9] című írásában ismerteti Zermelónak – a kiválasztási axiómát is tartalmazó – axiómarendszerét. (Ezen axióma kimondja, hogy ha adott halmazok egy összessége, akkor létezik egy reprezentánshalmaz is, tehát amely minden szereplő halmazból tartalmaz – „kiválaszt" – egy elemet. Az axiómát lépten-nyomon használjuk a matematika klasszikus ágaiban is, csak nem vesszük észre. Például ez biztosítja, hogy egy függvény folytonosságának kétfajta definíciója, tehát a környezetes és a pontsorozatos ekvivalensek. – *A ford.*) Kifejti, hogy Zermelo rendszere nem kielégítő, mert nem szerepel pl. a rendezett pár definíciója. Említést tesz Fraenkel módosításairól, de kihagyja a legfontosabbat, a pótlás axiómáját. (Az axióma előírja, hogy ha egy függvény értelmezési tartományát – alapértelmezésben a „világot" – leszűkítjük valamely halmazra, akkor ezen halmaznak a függvény általi képe is létezik, mint halmaz, tehát ott van ZF bármely modelljében – *A ford.*) Ugyanakkor láthatóan nincs tisztában Gödel hangsúlyos különbségtételeivel, hiszen rendre „igazat", „hamisat", illetve „kétségest" ír, miközben az adott szövegkörnyezetben a jelentésük „bizonyítható", „cáfolható", illetve „eldöntetlen".

Cartan az ellentmondásos elméletekről értekezik, és azt állítja, hogy egy elmélet ellentmondásosságának bizonyítása, illetve cáfolata az *eldöntésproblémára* vezet, azaz általános módszer megtalálására annak eldöntésére, hogy egy adott reláció (azaz formula) logikai azonosság-e (azaz tétel). Azzal folytatja, hogy ez a probléma csak speciális esetekben van megoldva; általánosságban a megoldás nem ismeretes. Majd hozzáteszi: „Bármennyire fontosak is ezen problémák, nem tartoznak témánkhoz".

Említést tesz Herbrand téziséről (Herbrand itt a Hilbert formalista programjában szabadon felhasználható ún. konstruktív eljárásokat kívánta meghatározni, más szóval azokat, amelyek semmiképpen sem okozhatnak ellentmondást. – *A ford.*), Sierpinski fent említett könyvéről, majd kifejti saját véleményét, amelyet eredetileg Dieudonnénak tulajdonít. Megjegyzi, hogy ezek a nézetek – habár 1939-ben publikálták őket – 1938-ból származnak. Kijelenti:

„Egy matematikai elmélet nem más, mint egy axiómarendszerrel meghatározott logikai elmélet [...] ebből következően az elmélet entitásait az axiómarendszer definiálja, ez hozza létre mindazt, amire az igaz állítások vonatkozhatnak. Ami a logikai elméletből a matematika illetékességi körébe tartozik, az ezen létezők definiálása, megnevezése, a relációk és tételek rájuk való alkalmazása."

Szó esik Cantorról, Kroneckerről, Zermelóról, Brouwerről, szerepel továbbá Skolem paradoxona a halmazelmélet megszámlálható modelljeiről, Poincaré, Lebesgue, *de Gödel nem!*

Cartan nyilvánvalóan a matematika alapjaira gondolt. Miért nem említi tehát Gödel eredményeit? Beszéltem több francia anyanyelvűvel, akik eltérően vélekedtek az alábbi idézetben szereplő *„est tout idéal" („teljesen kielégítő")* 1942-es jelentéséről, és ezért abban sem értettek egyet, hogy Cartan tisztában volt-e a nemteljességi tételek jelentőségével és ha igen, szándékában állt-e ezt az olvasó tudomására hozni. Íme a kérdéses részlet:

„Annak eldöntése, hogy egy elmélet egy állítása igaz-e, arra vezet, hogy egy adott reláció logikai azonosság-e. Ugyanez a helyzet egy elmélet ellentmondás-mentességének eldöntésével. Így ezek a kérdések az eldöntésproblémára vezetnek. Ennek értelmében keresendő egy általános módszer, amellyel bármely explicite meg-

adott relációról eldönthető, hogy logikai azonosság-e. Ez a probléma jelenleg csak speciális esetekben van megoldva.

Így egyelőre az előbb említett 3 csoportra való felosztás (igaz, hamis, illetve kétséges állítások) teljesen kielégítő: egy ellentmondásmentes elméletnek vannak bizonyítottan igaz tételei, bizonyítottan hamis tételei (az előbbiek tagadásai) és vannak állításai, amelyekről sem azt nem tudjuk, hogy igazak, sem azt, hogy hamisak. Sőt, annál inkább elképzelhető, hogy nem tudjuk bebizonyítani egy adott elmélet egészének ellentmondás-mentességét."

Hasonlóan kétértelmű Dieudonné is a Cartan által idézett 1939-es cikkében („A modern axiomatikus módszerek és a matematika alapjai"). Úgy számol be Cantor eredményeiről, amelyeket Hilbert oly hasznosnak tekintett, hogy *„egyszerűen megdöbbentőek a józan ész számára".* Úgy véli, hogy a matematika alapjai század eleji válságának véget vetett Hilbert formalista módszere: a matematika egy ágának helyes felépítése vagy egy eredményének helyessége azon múlik, hogy bizonyos szabályok be vannak-e tartva és nem az értelmezésén. Értékelése szerint:

„A formalista módszer fő érdeme az, hogy szétoszlatta a matematikai gondolkodásra nehezedő homályt."

Hozzáteszi:

„Természetesen még bizonyításra szorul, hogy Hilbert elképzelése megvalósítható."

Megint csak nem említi név szerint Gödelt, de egy utalásban megfogalmazza az eredményei által kiváltott kételyt:

A legújabb eredmények alapján úgy tűnik, hogy Hilbert meggyőződésével ellentétben a matematika ellentmondás-mentességének bebizonyításához szükséges metamatematikai törvények épp annyira elvontak, mint maguk a matematika törvényei, és ez nagymértékben csökkenti egy esetleges 'bizonyítás' horderejét.

Néhány évvel később a Hilbert halálára írt nekrológban még nyomatékosabban ad hangot kételyeinek, de most sem szánja rá magát a félelmetes név leírására [l. (M9)]:

Úgy tűnik, hogy ezen alkalommal Hilbertet intuíciója kissé túlzott reményekkel töltötte el és ma már minden okunk megvan arra, hogy kételkedjünk egy ilyen [ellentmondás-mentességi] 'bizonyítás' lehetőségében.

Nicolas Bourbaki [„A matematika alapjai a matematikai gyakorlatban",[10] l. (M2), (M3) és (M4)] című írásában újra ismerteti Zermelo halmazelméletét és a kiválasztási axiómát. Ez a végkövetkeztetése:

„Azt állítom, hogy a mai matematika egészét fel tudom építeni ezeken az alapokon. Ha ebben bármi újdonság van, az nem több annál, hogy nem elégszem meg pusztán ennek kijelentésével, hanem be is fogom ezt bizonyítani, mégpedig pontosan úgy, ahogy Diogenész bizonyította be a mozgás létezését. Ahogy művem kibontakozik, úgy lesz a bizonyításom is egyre teljesebb."

Az olvasó nyilván már sejti, hogy Gödel nincs említve, még utalás sincs rá, holott eredményei 1948-ban már 17 éve hozzáférhetők voltak. Bourbaki másik esszéjében („L'architecture des mathématiques") sem ejt szót Gödelről, de ezúttal már utal a „nehézségekre".

A továbbiakban azzal szeretnék foglalkozni, hogy:

Miért nem tett említést Bourbaki Gödelről?

továbbá:

Miért nem értette meg Bourbaki, hogy halmazelmélete – Zermelo rendszere a kiválasztási axiómával kibővítve – nem felel meg a matematika aktuális igényeinek?

Ezek a kérdések a Bourbaki-csoport akkori nagy befolyása miatt fontosak. Nem vonom kétségbe sem műveik értékeit, sem teljesítményük jelentőségét. Mégis, a logikáról és a halmazelméletről vallott és a matematikusok fiatalabb generációjára átörökített[11] felfogásuk hibás, mert akadályozza a matematika mibenlétére irányuló gondolkodásunk megújítását. Talán nem túlzás azt állítani, hogy ha Bourbaki már halott – ahogy egyesek vélik –, akkor felfogásának terméketlensége lett a veszte.

Mielőtt a fenti kérdésekre megpróbálnék – szükségszerűen spekulatív – választ adni, szeretném még folytatni a bourbakisták nézeteinek elemzését.

Bourbaki a „L'architecture des mathématiques"-ban gondosan megkülönbözteti az általa elvetett logikai formalizmust és a magáénak vallott axiomatikus módszert:

Az axiomatikus módszer fő törekvése éppen az, amire a logikai formalizmus önmagában nem képes, nevezetesen a matematika egészének érthetővé tétele.

Tehát számára az axiomatikus módszer nem a matematika egészét átfogó deduktív rendszert jelent, hanem pusztán egyes ágainak képzeletbeli lehántását, amíg a csupasz vázak már látni engedik a hasonlóságokat, és lehetővé teszik az elméletek átültetését.

„(Az axiomatikus módszer) egyesítette a matematikát, de ez nem a formális logika védőszárnyai alatt történt, ez az egység nem egy élettelen csontváz részeinek összeillesztése.

Sok matematikus nem hajlandó mást látni az axiomatikában, mint logikai szőrszálhasogatást, ami nem képes egy elmélet megtermékenyítésére.

Semmi sem áll távolabb az axiomatikus módszertől, mint egy megmerevedett tudományfelfogás. Nem akarjuk azt a hitet kelteni az olvasóban, hogy egyszer és mindenkorra meghatároztuk, hol tart és meddig juthat el a tudomány.

Nagyon valószínű, hogy a matematikában növekedni fog az alapvető struktúrák száma és ezáltal nyilvánvalóvá válik új axiómák és axiómacsoportok bevezetésének hasznossága."

André Weil diplomatikusabban fogalmazza meg a logikáról mint a matematika nyelvtanáról vallott bourbakista nézetet.[12]

„Igaz ugyan, hogy a matematikus higiénéje a logika, de nem az látja el; mindennapi kenyeréről a nehéz problémák gondoskodnak."

Ezzel megtagadja meggyőződésüket, amely szerint a logikában már minden tisztázva van. Habár nem említi Gödelt, utal arra, hogy a logikában talán még nincs kimondva az utolsó szó:

„Könnyen megtörténhet, hogy utódaink egy napon olyan következtetési módokat kívánnak bevezetni a halmazelméletbe, amelyeket mi nem engedünk meg."

Ezt a fontos kijelentést, ami emlékeztet a fenti Bourbaki-idézet utolsó bekezdésére, érdemes egybevetni a későbbi megkövesedett véleménnyel, miszerint „a halmazelmélet megfelelően ki van dolgozva".[13]

Bourbaki nagyon világosan fogalmaz manifesztumában:

„Vezérelvem a struktúrák egymásra épülése lesz, az egyszerűtől a bonyolultig, az általánostól az egyediig.

[...] a csoportelmélet, [...] a rendezett (és ezen belül a jólrendezett) halmazok elmélete, [...] a topologikus struktúrák elmélete..."

Megjegyzendő azonban, hogy ezen kifogásolhatatlan megállapítások között szerepel egy olyan is, amely magyarázat híján félrevezető lehet:

Az első axiomatizálások (Dedekind–Peano aritmetikája, Hilbert–Eukleidész geometriája) olyan elméletekre vonatkoztak, amelyek axiómarendszere teljes és egyértelműen meghatározza az elméletet, nem úgy, mint például a csoportelméleté.

Az igaz, hogy a 2-és 3-dimenziós euklideszi geometriát Hilbert axiómarendszere teljesen meghatározza, tehát ha egy síkgeometriai állításnak van (pl. térgeometriai) bizonyítása, tehát *igaz* a síkon, akkor van a síkgeometria axiómáin kívül másra nem támaszkodó bizonyítása is. Viszont Gödel óta tudjuk, hogy a Peano- vagy bármely más axiómarendszerrel definiált aritmetika nem ilyen. Sőt, furcsa módon a 2-dimenziós projektív geometria sem ilyen, csak a Désargues-tétel axiómaként való hozzávételével válik kategorikussá.[14] Amikor Bourbaki a Peano-axiómarendszer egyértékűségéről beszél, valószínűleg a mindannyiunk által ugyanolyannak elképzelt természetes számok, az ún. standard modell valamely *másodrendű* jellemzésére gondol, és ezzel természetesen elkendőzi a lényeget. (Itt arról van szó, hogy Bourbaki példái félrevezetőek. Egy axiómarendszer teljessége azt jelenti, hogy bármely állítás vagy minden modelljében igaz vagy minden modelljében hamis. A Peano-axiómarendszer azonban csak akkor ilyen, ha a matematikai indukciót egyetlenegy, de akkor szükségszerűen nem elsőrendű axiómával fejezzük ki. Hilbert axiómarendszere a folytonossági axióma miatt szintén nem elsőrendű, mert az abban szereplő változók értékei az axiómarendszer valamely modellje alaphalmazának nemcsak *elemei*, hanem – egy egyenes – *részhalmazai* is lehetnek. A geometriát, azaz például a síkgeometriát lehet elsőrendűen is axiomatizálni, sőt van teljes axiómarendszere is, de nem igaz, hogy ez kategorikus – Dieudonné terminológiájával egyértékű – lenne, más szóval vannak nemizomorf (például eltérő számosságú) modelljei. A szerző magyarázatában a térgeometriának az a köze a síkgeometriához, hogy Gödel teljességi tétele értelmében, ha egy elsőrendű elmélet egy állítása az elmélet minden modelljében igaz, akkor van formális bizonyítása is. Ennek egyik esete az, amikor az elmélet teljes – mint például a síkgeometria most említett axiómarendszere –, és egy állítását sikerül valamely modelljében – például a térben megadott síkban – igazolni, a konkrét esetben térgeometriai úton – hiszen ekkor a teljesség miatt az állítás minden modellben igaz, tehát alkalmazható a teljességi tétel. – *A ford.*)

Az eddigi idézetek alapján az a véleményem, hogy Bourbaki kellően értékelte Hilbert és követői munkásságát és helyeselte a törekvést, hogy a matematika megbízhatóságának kérdése szabályok együttesére legyen visszavezetve. Ugyanakkor fenntartotta azon nézetét, hogy a logikát és a halmazelméletet sorozatának első kötetében egyszer és mindenkorra kifejtette, annak ellenére és azután, hogy Gödel eredményei megmutatták Hilbert programjának befejezhetetlenségét.

Bourbaki könyveinek későbbi kiadásai már említik Gödelt, a függetlenségi eredményeket, és szerepel a pótlás axiómája is. De az érdeklődésemet felkeltő Gödel előtti gondolkodásmód megmaradt. A szerzők a jelenkori matematika enciklopédiáját írták meg, de a matematikai logikára vonatkozó nézeteik 1929-ből származnak.

Szeretnék visszatérni első kérdésemhez:

A bourbakisták miért nem módosították nézeteiket, miért nem vették figyelembe Gödelnek a matematika alapkérdéseire vonatkozó döntő jelentőségű eredményeit?

Az alapismeretek terén miért nem tartott lépést Bourbaki ezen matematikai alapok fejlődésével?

A kérdésre egyszerre többfajta válasz is elképzelhető, szociológiai, pszichológiai, vagy éppen matematikai. Nemzeti érzelmei is befolyásolhatták Bourbakit. Tanulságos ebből a szempontból az összevetés Alexander Koyré elemzésével,[15] miszerint:

„Hegelről 100 éven át nem vettek tudomást Franciaországban. Ennek nemcsak követhetetlen stílusa, a karteziánus és a kantiánus filozófiai hagyomány, Hegel protestantizmusa voltak az okai, hanem mindenekfelett a francia hitetlenség a 'logikai szintézis és a történeti fejlődés' Hegel általi 'következetes azonosításával' szemben. A francia racionalizmus szemszögéből a történelemben nem volt semmi közös a rációval vagy logikával, mely utóbbiakat öröktől fogva létezőnek, időn kívülinek tekintette."

Az intellektuális sovinizmus éppen annyira jelen van Franciaországban, mint bárhol másutt. Emlékezetes előfordulásai a párizsi egyetem évszázados ellenállása Paracelsus nézeteinek,[16] vagy Leibniz infinitezimálisainak Descartes-ot követő elutasítása.[17]

Azonban a 30-as évek második felében a francia matematikusok között már voltak, akik jól ismerték, sőt sokakkal megismertették Gödel munkásságát. Közéjük tartozott Albert Lautman és Jean Cavaillès: (l. az előbbitől a „Les schémas de genèse" / „A genezis mintái", az utóbbitól pedig a „La problème du fondement des mathématiques" és a „La non-contradiction de l'arithmétique" („A matematika megalapozása" és az „Az aritmetika ellentmondás-mentessége") c. tanulmányokat.[18] Így tehát a Gödel-ellenesség bármilyen nacionalista felhangja valószínűleg csak a Bourbaki-csoportnak volt sajátja.

Érdekes módon Cavaillès 1929-et tekinti a modern logika fejlődésében az átmenet évének az általa *naivnak*, illetve *kritikusnak* nevezett időszakok között. A bourbakisták a naiv felfogásban nőttek fel, és sok európai matematikus osztotta lelki ellenállásukat ezen felfogás feladásával szemben.

A bourbakisták logikához való viszonya kialakulásában valószínűleg Poincaré hatása volt a meghatározó, aki gúnnyal fogadta Cantor és Russell munkásságát. Igaz, hogy *„Utolsó esszék"* c. tanulmánykötetében már megértőbbé vált ellenfeleivel szemben, sőt *„Az erkölcsi szövetség"* címmel, halála előtt három héttel mondott beszédében kölcsönös megértést sürgetett mindazok között, akik bár különböző módokon és módszerekkel, de közös célokat követnek. Mindezek a békítő gesztusok azonban nem tehették meg nem történtté korábbi, bár szellemes, de egyúttal lekicsinylő és alaptalannak bizonyult bírálataival a logika fejlődésére gyakorolt visszahúzó hatást.

Herbrand *„Écrits logiques"* c. könyvének 1968-as francia kiadása előszavában Heijenoort magyarázatot keres a logika áldatlan franciaországi állapotára. Leírja, hogy Poincaré káros hatását felerősítette sok logikával foglalkozó matematikus korai halála. Couturat teherautó-baleset áldozata lett az 1914-es mozgósításkor, Nicod 1924-ben 31 évesen tébécében halt meg, Herbrand 23 éves volt, amikor 1931-ben hegymászás során elszenvedett baleset áldozata lett, Cavaillès és Lautman 41, ill. 36 évesek voltak, amikor az ellenállásban való részvételükért a németek 1944-ben kivégezték őket. Ez a két utóbbi veszteség része egy szélesebb körű jelenségnek, Európa lemaradásának. Az Európából, Hitler elől menekülő matematikai logikusok Amerikában és Izraelben váltak sikeres iskolateremtőkké.[19]

Lehetséges, hogy a bourbakistákra megtévesztően hatott Hilbert, aki kezdetben nehezen tudta megemészteni Gödelnek a saját programjától annyira eltérő eredményeit. Hilbert azonban sokkal hamarabb volt képes alkalmazkodni az új helyzethez, mint jóval fiatalabb francia követői, ezért az ő viselkedésükre más magyarázatot kell találnunk. Mint sok más tudóst, talán őket is gúzsba kötötték saját elképzeléseik, és ezért nem tudták felmérni az ismert fejlemények horderejét.

Bármilyen természetűek voltak is a bourbakisták belső gátlásai, szemlátomást nem tudtak megbékélni a lehetőséggel, amit Gödel munkássága tárt fel. Elképzelhető, hogy a matematika *nem* alapozható meg Hilbert tervei és a bourbakisták ezekhez igazodó elvárásai alapján. Lehetséges, hogy *nincs* a matematikának logikai, osztályelméleti vagy bármilyen más olyan alapvetése, amelynek csak bizonyos alapfogalmakat kellene magában foglalnia és azokból már minden egyértelműen következne. Vannak ugyan alapkérdések, de úgy tűnik, hogy végleges megválaszolásukra nem elég a nagy könyv első fejezete, mert a matematika egészét áthatják.

A második kérdésem ez volt:

Miért nem vette észre a Bourbaki-csoport, hogy az általuk választott halmazelmélet nem alkalmas a matematika megalapozására?

Abban látom az okot, hogy csak a matematika azon ágai érdekelték őket, amelyek felépítéséhez Zermelo rendszere elégséges. Ez a széles értelemben vett geometriát jelentette, szemben az aritmetikával.[20]

Leibniz írja, hogy az elme gyakran téveszt irányt két nevezetes útvesztőben. Egyikük a szabadság–szükségszerűség problémája, a másikban pedig a folytonosság és a végtelenség rejtőzködik. Ha elfogadjuk a kihívást, amit ezen utóbbi labirintus megtestesít, akkor felvetődik a kérdés, hogy a matematika mely kettősségéről van szó valójában. Szerintem ez a kettősség nem más, mint két ősi intuíció – az aritmetikai és a geometriai – feszültsége.[21]

Ez a feszültség szórakoztató formában érzékeltethető az alábbi feladvánnyal:

Hogyan lehet mutogatás nélkül elmagyarázni, hogy mi a csigalépcső?

A feladat talán azért nehéz, mert a szavak időbeliek és így aritmetikaiak, a csigavonal viszont térbeli. A nehézség bizonyára pszichológiai eredetű, hiszen egyre több kísérleti megfigyelés[22] bizonyítja, hogy bal agyféltekénk kezeli időfogalmainkat, míg a másik a térfogalmainkat.[23]

Bourbaki tudatában van a geometriának az aritmetikához való viszonyából fakadó problémáknak. Tisztában van nagyon korai eredetükkel, tudja, hogy már az eleaták foglalkoztak velük. A „L'Architecture des mathématiques"-ben ezt írja:

„Valóban, ha eltekintünk a matematika gyakorlati felhasználásaitól, akkor tartósan fennállt egyfajta ellentét, legalábbis az elemi szinteken, a kibontakozó geometria és aritmetika között. Az utóbbi a diszkrét mennyiségek

tudománya volt kezdetben, ezzel szemben az előbbi mindig is folytonos kiterjedésű alakzatokkal foglalkozott. Ez a két nézőpont két olyan szemléletmódhoz vezetett, amelyek az irracionális számok felfedezése óta szemben álltak egymással. Valójában pontosan ez a felfedezés hiúsította meg a tudományok egységbe foglalására tett első kísérletet, nevezetesen a pitagoreusok által tervbe vett aritmetizálást (»minden számokból áll«)."

Száz évvel korábban de Morgan ezt írta:

„A geometriai okoskodásnak éppúgy megvan a saját szerepe, mint az aritmetikainak, ezért közös tanításuk az elemi oktatásban gátolja bármelyikük alapos elsajátítását."

További 1300 évvel visszafelé haladva az időben, Boethius a hét szabad művészetből négyet összefogó kvadríviumában a matematikát aritmetikára, geometriára, zenére és asztronómiára osztja fel. Valójában ez nem négyes, hanem ismét csak kettős felosztás, mert az utóbbi kettőt az első kettő alkalmazott változatának tekintette. Ezzel szemben J. J. Sylvester 1854. december 4-én tartott egyetemi tanári pályázati előadásában („A probationary lecture on geometry"[24]) így vélekedett:

„A matematikának három nagy gondolatkör a természetes közege, más szóval három uralkodó eszme hatja át ezt a tudományt, olyannyira, hogy minden eredménye ilyen vagy olyan arányban ezekre hivatkozik. Ez a három alapfogalom a szám, a tér és a rend.

Az aritmetika a számok absztrakt tulajdonságaival foglalkozik. Az algebrában, mint a műveletek tudományában a meghatározó elv a rend. A geometria illetékességi körébe tartozik a tér és a térben létező testek tulajdonságai és viszonyai [...].

A metafizikával foglalkozó filozófus illetékes arra, hogy vizsgálja a tér természetét, önmagában és az emberi intellektus szemszögéből egyaránt. A geométer földhözragadtabb, de eredményesebb figyelmének tárgya a tér, mint objektív valóság [...]

A kúpszeletek Platónnak tulajdonított felfedezése [...] ha nem történt volna meg [...] akkor az általános tömegvonzás törvénye [...] még a mai napig sem lenne ismert. [...] Persze Platón évszázadokkal korábban élt annál, hogy felismerhesse :[...] a nyelv, melynek szabályait megfogalmazta, a világegyetem törvényeinek nyelve. [...]

Aki elmélyedt a geometriában, annak bátran folytatnia kell felfedező útját, el kell sajátítania a geométerként való gondolkodást és geométernek kell tekintenie magát..."

Mindazonáltal Sylvester hármas felosztása redukálható kettősre, ha a rendet tekintjük az elsődleges struktúrának a másik két alapfogalomhoz képest, és innen már csak egy lépés egy újabb és egyúttal végső redukció létezésének felvetése.[25] Tény azonban, hogy az emberi agy a fiziológiai szinten szétválasztja tér- és időképzetei feldolgozását, és ezt újabb bizonyítékaként tekintem azon nézetnek, hogy a matematika teljes egységesítése nem lehetséges.

Ezért hasznos lesz közelebbről megvizsgálnunk a fent említett aritmetikai és geometriai intuíciót.

Valójában a két intuíció nem válik szét teljesen. Mindkettőnek a fogalmi nyelve elég gazdag ahhoz, hogy teret engedjen a másik lefordításának. A halmazelméleten belül megkaphatjuk a számegyenes mását a racionális számokból kiindulva például Dedekind-szeletekkel, a számegyenesen belül pedig megkaphatjuk az egész számokat egymástól egyenlő távolságú pontok kijelölésével. Az ilyen átmásolások azonban könnyen vezethetnek paradoxonokhoz, mert nem az alapul szolgáló intuíciók, hanem a formális tulajdonságok átfordításai.

A pitagoreusok nem akarták elveszíteni hitüket abban, hogy minden kifejezhető számokkal, és emiatt nem tudtak belenyugodni a négyzet oldala és átlója összemérhetetlenségének felfedezésébe. Íme egy egyszerű geometriai konstrukció, amely aritmetikailag átfogalmazva már paradoxon.

Stifel (1487–1567) fogalmazta meg a kérdést, hogy mik az irracionálisok. Úgy vélte, hogy a geometria számára hosszúságként elfogadhatók, de számként nem, hiszen „az irracionális számok nem valósak, mert eltakarja őket a végtelenség ködfátyla". Nem hitt a $\sqrt{2}$ létezésében.

A másik oldalról ismert a Banach–Tarski-paradoxon. Eszerint bármely gömb szétdarabolható véges sok részre, amelyekből eltolásokkal és elforgatásokkal már két ugyanakkora gömb állítható össze. A konstrukció kiindulópontja a Schröder–Bernstein-féle gondolatmenet (ezzel szokás bizonyítani a számosságok egyik alaptulajdonságát: ha az A halmaz azonos számosságú a B halmaz egy részhalmazával és hasonlóan a B is A egy részhalmazával, akkor a két halmaz számossága megegyezik. – *A ford.*), felhasználja továbbá a kiválasztási axiómát, amelynek hiányában a paradoxon nem is vezethető le.

Ebben az esetben természetes halmazelméleti konstrukciók vezetnek geometriai paradoxonokhoz. Ez a jelenség felidézi a 13. században élt Fibonacci egy eredményét, aki megadott egy harmadfokú egyenletet, amelynek egyik gyöke mint hosszúság euklideszi értelemben nem szerkeszthető.

Bourbakinak a geometria és az aritmetika viszonyáról kialakított felfogása még ma is aktuális, amit mutat, hogy Saunders Mac Lane, a kiváló amerikai matematikus nemrégiben javasolta a matematika filozófiájára vonatkozó vita felelevenítését. Felszólításában élesen támadta a „Matematika Grandiózus Halmazelméleti Megalapozását", mert:

„A grandiózus halmazelméleti megalapozás elhibázott és egyoldalú képet ad a matematikáról; a halmazelmélet nagyrészt érdektelen a matematikai gyakorlat szempontjából; a logicizmust, formalizmust és a platonizmust gúzsba kötötte a halmazelmélet és a deduktív szigor."

Ehhez csatlakozik Thom és mások kritikája:

„A jelek szerint a halmazelmélet elnyomja a geometriát", mindezek előtt pedig Skolem 1922-es tanulmányának *Schlussbemerkung*-ja, amely hevenyészett fordításban is gyöngyszem:

„A fenti eredmények közül a legfontosabb a halmazelmélet fogalmainak relativitása. Ezt egy beszélgetésben említettem F. Bernstein professzornak Göttingenben 1915/16 telén. Mostanáig semmit sem publikáltam erről, amire két okom is volt: egyrészt egyéb tennivalóim voltak azóta, másrészt oly nyilvánvalónak tekintettem, hogy a matematikusok többsége nem vesztegeti idejét az axiomatizált halmazelméletre, mivel az nem alkalmas a matematika végső megalapozására. Meglepetésemre azonban újabban nagyon sokan a matematika ideális alapját látják a halmazelméletben, és ezért elérkezett az idő véleményem nyilvánosságra hozatalára."[26]

Véleményem szerint ezek a támadások most azért újultak meg, mert Bourbaki 1929-es[27] állapotában mumifikálta a matematikai logikát. Mac Lane-nek jobb áttekintése van a logikáról, mint a bourbakistáknak, hiszen 1930-tól 1933-ig Bernays tanítványa volt Göttingenben. Most azokat a nézeteket támadja, amelyektől a logikusok több mint 60 éve folyamatosan távolodnak, de amelyeket a többi matematikus azóta is képvisel.

Nem ez a megfelelő alkalom Mac Lane „Mathematics: Form and Function" („Forma és tartalom a matematikában") c. könyve erényeinek és hiányosságainak részletes elemzésére, de néhány megjegyzés ide kívánkozik.

Skolemmel szemben úgy gondolom, hogy végső megalapozása nincsen a matematikának, de ugyanakkor a halmazelmélet magában foglalja annak jelentős részét. Egyetértek Thommal és Mac Lane első megjegyzésével, amelyekhez kapcsolódva úgy vélem, hogy a halmazelmélet inkább tartozik a matematika aritmetikai oldalához, mint a geometriaihoz. Mac Lane második megjegyzését abban a formában fogadom el, hogy a halmazelméletnek nincs túl nagy jelentősége a geometria gyakorlata számára, viszont annál fontosabb a legszélesebben értelmezett aritmetika szemszögéből.

Habár Mac Lane harmadik bírálatával nagyrészt egyetértek, nem tudom elfogadni a *„halmazelmélet és deduktív szigor"* kifejezést. Mac Lane szerint összetartoznak és nem fogadja el, hogy magukra öltsék a végső megoldás álruháját. Ezzel szemben én különválasztom őket. A logikával a nyelvhasználatot vizsgáljuk,[28] a halmazelmélettel pedig a matematika megalapozását és nem a halmazok képzését, ahogy Mac Lane véli.

Ez az alapvető különbség Zermelo–Fraenkel és Zermelo között. Zermelo halmazelmélete – pontosabban az a része, amit akár Mac Lane-halmazelméletnek is hívhatnánk könyvei és írásai tükrében – a halmazképzést tartja szem előtt és megfelel a geometria céljaira. A Zermelo–Fraenkel rendszer többlete, hogy lehetővé teszi a rekurzióval történő definíciót is, tehát az ismeretlenbe kiterjedő struktúrák képzését. Ez Kripke és Platek halmazelméletének döntő eleme és kielégíti a matematika aritmetikai oldalának igényeit.

Zermelo halmazelméletében nem lehet bebizonyítani, hogy minden jól rendezett halmaz rendezésizomorf egy Neumann-rendszámmal; nem bizonyítható az $\omega+\omega$ Neumann-rendszám létezése, habár az bizonyítható, hogy létezik ilyen rendtípusú jól rendezett halmaz. (A pótlás axiómája miatt léteznek ZF-ben – de Zermelo rendszerében nem feltétlenül – a rendszámok, hiszen Neumann definíciója szerint mindegyikük egy alkalmas módon megadott függvény valamely halmazon vett értékkészlete – *A ford.*) Továbbá rendszámokra és általában tetszőleges jól fundált relációra vonatkozó transzfinit rekurzió sem definiálható. Így tehát az aritmetika lényegéhez tartozó indukció nem található meg a geometria igen nagy részében. Másrészt a térre vonatkozó intuíció nem része az aritmetikának. Egyszóval mindkét intuícióra szükségünk van.

Geometriai felfogásban az egész számok egy egyenes egyenlő távolságra lévő pontjai. Emiatt a természetes számok egyenrangúak, Russell kifejezését használva azonos típusúak. *Aritmetikai* felfogásban a 0 a legegyszerűbb természetes szám. Ebből kapjuk egymás után a többieket, így a nagyobb számok bonyolultabbak a kisebbeknél, tehát semelyik kettő sem azonos típusú.[29] Ezen intuíciók bármelyikén sérelem esik, ha megpróbáljuk a másiknak alárendelni, és emiatt talán a matematika egy olyan filozófiáját kellene felépítenünk, amely biztosítja mindkettejük természetes fejlődését és kölcsönhatásukat.

Mac Lane könyvében a matematika alapjául javasolt halmazelmélet Zermelo rendszerének egy része, kiegészítve a kiválasztási axiómával. Ezért javaslatai nem adnak semmilyen választ korábbi kifogásaimra, amelyek lényege, hogy Bourbaki panorámája a matematika Gödel előtti állapotát foglalja magában, és annak is csak a geometria javára történő leszűkítését.

Írásomat szeretném egy buzdítással befejezni. Dieudonné ezt írta:

„Még a kezdet kezdetén vagyunk a kombinatorika és a matematika elvontabb területei közti viszony megértésében."

Remélem, hogy a Mac Lane által felépíteni javasolt filozófia, éppúgy, mint a Dieudonné által elvárt megértés meg fog születni az aritmetika és a geometria kölcsönhatásának megújuló vizsgálatából.

Fordította: RÁCZ ANDRÁS

Jegyzetek

[1] Előadás formájában 1986. október 29-én hangzott el Cambridge-ben egy egyetemi matematikai társaság, a Quintics összejövetelén. Írott formában 1987-ben jelent meg az Eureka c. cambridge-i egyetemi folyóiratban. Ezen átdolgozott változat megírásában észrevételeikkel nagy segítségemre voltak többek között báró Sir Peter Swinnerton-Dyer, Saunders Mac Lane professzor, dr. Francisco Corella, dr. Paolo Mancosu és dr. Gérard Bricogne.

[2] Egy beszélgetésben (l. [M7] C. Chevalley említi H. Cartan, C. Chevalley, J. Delsarte, J. Dieudonné, Sz. Mandelbrojt, R. de Possel és André Weil nevét. Cavaillès életrajzában (l. [T3] nővére idéz egy levélből, amelyben E. Ehresmann is a csoport tagjaként szerepel.

[3] L. [M20].

[4] Zermelo 1908-ban vette fel axiómarendszerébe a kiválasztási axiómát. Mára az a szokás alakult ki, hogy külön említik.

[5] Hilbert előadásának (l. [M13]) utolsó előtti mondata így hangzik: „Az igazi oka annak, hogy senkinek sem sikerült rátalálnia megoldhatatlan problémára, szerintem az, hogy megoldhatatlan problémák egyáltalán nem is léteznek".

[6] Feltehetően a másnapi előadására készült.

[7] Gödel a königsbergi bejelentés után 1930. okt. 23-án küldte el dolgozatának kivonatát a bécsi akadémiának és november 17-én kapta meg az értesítést annak elfogadásáról.

[8] Hilbert programjának mai értékelésére nézve l. [M11], [M17] és [M19].

[9] [M5]: a kézirat 1942. január 15-én érkezett meg és 1943-ban lett közölve.

[10] Vajon a történelemben ez az első előfordulása ennek a baljóslatú kifejezésnek? (angolul „the working mathematician" – A ford.)

[11] Bourbaki egyik tanítványa egy nagy múltú egyetem hallgatói számára tartott halmazelméleti előadásaiban többször is hibákat vétett: hamis tételeket „bizonyított". Tévedései visszavezethetők a bourbakisták 46 évvel azelőtti állásfoglalásaira.

[12] L. [M23].

[13] [10]; ez az a könyv, amely kihagyja Shelah nevét a modellelmélet nagy alakjainak felsorolásából. Shelah első két könyvének és első 322 cikkének bibliográfiája jól áttekinthetően megtalálható [O1] 398–418 oldalain.

[14] Ezen kérdéseket igen alaposan tárgyalja [M1].

[15] L. [T4] és [T6].

[16] L. [T2], amelyben Lord Dacre of Glanton ma is olvasmányosan, eredeti dokumentumokkal és a hasonló történetek iránti tőle megszokott vonzódással ismerteti a szellemi összecsapás történetét.

[17] Ez a vita viszont rövid időn belül elcsitult, l. Mancosu [T5].

[18] Hálával tartozom Dr. Mancosu-nak (Wolfson College, Oxford), amiért felhívta a figyelmemet [M6]-ra és [M14]-re.

[19] Összehasonlításul; Cambridge-ben 4 év alatt 50 logikai témájú előadás szerepel a tantervben, ezzel szemben a Harvardon vagy Princetonban kb. 250, Berkeleyben pedig, ahol nagyon komolyan veszik a logikát, kb. 400.

[20] Dr. Bricogne ellenérvként André Weil, J. P. Serre és mások munkásságára, azaz a geometria és az aritmetika termékeny egymásra hatására hivatkozik. Ugyanakkor egyetért Bourbaki azon sajnálatos nézetével, miszerint „valószínűtlen, hogy az alapkérdések közvetlenül összefüggjenek ezen területekkel". Furcsának találom, hogy valaki ennyire fogékony legyen a kölcsönös befolyásolás egyik fajtájára, miközben ennyire elkerülje figyelmét egy másik. L. ezzel kapcsolatban [O2]-t, [O3]-at és [O5]-öt algebrai geometriai kérdéseknek a logika eszközeivel történő megoldására nézve.

[21] Dr. Mancosu hívta fel a figyelmemet Belaval könyvének (l. [T1]) IV. fejezetére: „Géométrisme cartésien et arithmétisme leibnizien" („Kartéziánus geometrizmus és leibniziánus aritmetizmus"). A szerző itt a fenti dualizmus alapján értelmezi Descartes és Leibniz szembenállását.

[22] L. [P1], [P2], [P3]. Köszönettel tartozom a gyermekgyógyászattal foglalkozó cambridge-i Professor Emeritus John Davisnek, amiért felhívta a figyelmemet ezen kutatásokra.

[23] Ezt megerősíti egy barátom, ezen írás egy korábbi változatának kritikusa, aki ezt írja: „Vajon melyik agyféltekéjét használta Bourbaki? Talán ez csak kivetítés, de az az érzésem, hogy a balt. A bourbakistáknak ellenérzéseik voltak az olasz geométerek jobb agyféltekéjű matematikájával szemben, eredményeik jelentős részét kétkedve fogadták. Ha úgy tekintjük, hogy az „igaz" és a „hamis" a bal agyfélteke fogalmai, a „helyes" és a „helytelen" pedig a jobb agyféltekéé, akkor saját szempontjukból jogosan minősíthették volna ezen eredményeket úgy, hogy helyesek, de hamisak.

A bourbakisták nem fejlesztették ki az analitikus és topológiai eszközöket az olasz gondolkodásmód megalapozására (ahogy például Lefschetz és Hodge tették), hanem ehelyett az algebraizálás módszerét választották (Zariski, Chevalley, Weil, Grothendieck). Ez a választás sok mindent megmagyaráz. Weil például véleményem szerint rossz irányba fordította eredeti beállítottságát. Mindig úgy éreztem, hogy gondolkodása analitikus, de ragyogó képességei révén át tudott térni kevésbé eredményes gondolkodásmódokra. „Foundations of Algebraic Geometry" c. műve talán emiatt olyan nehezen követhető mindenki számára".

[24] L. [M22].

[25] Erről az előbb már idézett baráti kritikusom ezt írta nekem: „Freeman Dyson könyvének (l. [T4]) 3. fejezetében hosszasan foglalkozik az egyesítőkkel és a szétválasztókkal. Az egyesítőktől származik a mindenkori egység, a szétválasztóktól a különbözőség. Hosszú időn át úgy véltem, hogy a matematikusok természetüknél fogva inkább egyesítők. Másrészt meggyőződésem, hogy akik a forszolással (a „forszolás" halmazelméleti állítások bizonyítására szolgáló módszer – a ford.) komolyan foglalkoznak, azok szinte sohasem egyesítők.

Szerintem Bourbaki esetében Dyson megkülönböztetése lényegibb, mint az öné. Bourbaki mindenekelőtt az egységre törekedett. Ez az egység sokféleképpen megközelíthető: a mértékelmélet lelkiismeretes felépítésével vagy egy analitikus elmélet algebraizálásával, amellyel kiterjeszthetjük újabb esetekre és területekre. Jól látható, hogy az egyesítő varázspálcája az algebra. Bourbaki arra törekszik, hogy világossá tegye a matematika egyesítésre 'érett' ágainak bizonyos szűk értelemben vett kombinatorikus tartalmát."

Számomra ezek után az a kérdés, hogy miben tér el Dyson különbségtétele a teremtés és a konszolidálás közötti, ezen írás első bekezdésében említettől:

[26] L. [M21].

[27] Valóban, ismeretes egy történet, amely szerint a Bourbaki-csoport egy tagja Princetonban közölte a Gödelt is magában foglaló hallgatósággal, hogy a logikában Arisztotelész óta semmi sem történt. Tudja-e bárki eme sorok olvasói közül, hogy ki volt az illető?

[28] Ezt a kijelentést sokan vitatnák, de ezek a támadások csak megerősítenek abban a véleményemben, hogy a logika nem esik egybe a halmazelmélettel.

[29] Az „aritmetikai" egészek ezen egymásra következését tökéletesen megőrzi Neumann rendszám-definíciója, és ezért nem tudom elfogadni Mac Lane professzor véleményét, miszerint ez a definíció pusztán csak egy „trükk".

IRODALOM

Matematikai művek

[M1] K. Borsuk – W. Szmielew, Foundations of Geometry, North-Holland, 1960, 277, 435 és W. Schwabhäuser – W. Szmielew – A. Tarski, Metamatematische Methoden in der Geometrie, Springer, 1983.

[M2] N. Bourbaki, „L'architecture des mathématiques", in [M15], 35–47.

[M3] N. Bourbaki, „The architecture of mathematics", American Mathematical Monthly 57 (1950), 221–232.

[M4] N. Bourbaki, „Foundations of mathematics for the working mathematician", Journal of Symbolic Logic 14 (1948), 1–14.

[M5] H. Cartan, „Sur le fondement logique des mathématiques", Revue Scientifique 81 (1943), 3–11.

[M6] J. Cavaillès, Actualités scientifiques et industrielles: le Progrès de l'Esprit, Vol. 608, 610, Hermann, Párizs, 1938. Ld. még Sur la logique et la théorie de la science, Presses Universitaires de France, 1947.

[M7] C. Chevalley, Mathematical Intelligencer 7 (1985), (2), 18; ld. még Mathematical Intelligencer 8 (1986), (2), 5.

[M8] J. Dieudonné, „Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques", Revue Scientifique 77 (1939), 224–232.

[M9] J. Dieudonné, „David Hilbert", in [M15], 291–297.

[M10] J. Dieudonné, A Panorama of Pure Mmathematics, Academic Press, New York, 1982.

[M11] S. Feferman, „Hilbert's program relativized: Prooftheoretical and foundational reductions." Journal of Symbolic Logic 53 (1988), 364–384.

[M12] D. Hilbert – W. Ackermann, Grundzüge der Mathematik, Springer-Verlag, Berlin, 1928.

[M13] D. Hilbert, Gesammelte Abhandlungen, 3. Band, 378–387., Berlin, 1935; újranyomtatva Chelsea, New York, 1965.

[M14] A. Lautman, Actualités scientifiques et industrielles: le Progrès de l'Esprit, Vol. 591. L. még összegyűjtött műveit: Collected Works, 1977.

[M15] F. le Lionnais (szerk.), Les grands courants de la pensée mathématique, Cahiers du Sud, 1948; ld. S. Mac Lane ismertetését, Mathematical Reviews, 10, 230.

[M16] S. Mac Lane, Mathematics: Form and Function, Springer-Verlag, New York, 1986.

[M17] W. Sieg, „Hilbert's program sixty years later" Journal of Symbolic Logic, 53 (1988). 338–348.

[M18] W. Sierpiński, Leçons sur les nombres transfinis, Collection Borel, Gauthier–Villars, Párizs, 1928.

[M19] S. Simpson, „Partial realisations of Hilbert's programme", Journal of Symbolic Logic, 53 (1988), 349–363.

[M20] S. Simpson, „Ordinal numbers and the Hilbert Basis Theorem", Journal of Symbolic Logic 53 (1988), 961–974.

[M21] Th. Skolem, „Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre", in Mengenlehre (a halmazelmélet matematikai, metamatematikai és filozófiai vonatkozásairól 1874 óta írt cikkek antológiája Ulrich Felgner válogatásában és bevezetőjével, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1979).

[M22] J. J. Sylvester, Collected Mathematical Papers, Vol. II, 5, Cambridge, 1908; újranyomtatva Chelsea, New York, 1973.

[M23] A. Weil, „L'Avenir des mathématiques", in [M15], 307–320; ld. még összegyűjtött műveit: Oeuvres Scientifiques, Vol. I. (1926–1951) 1947a.

Történeti művek

[T1] Y. Belaval, Leibniz critique de Descartes, Gallimard, Párizs, 1960, 1978

[T2] H. R. Trevor–Roper, Baron Dacre of Glanton, „The Paracelsian movement", in Renaissance essays, Secker and Warburg, 1985.

[T3] G. Ferrières, Jean Cavaillès: un philosophe dans la guerre, 1903–1944, Éditions du Seuil, Párizs, 1982.

[T4] A. Koyré, „Rapport sur l'état des études hegeliennes en France", Revue d'histoire de la philosophie, 5:2 (1931 ápr.–jún.), 147.

[T5] P. Mancosu, „The metaphysics of the calculus: A foundational debate in the Paris Academy of Sciences 1700–1706", Historia Mathematica 16 (1989), 224–248.

[T6] M. Poster, Existential marxism in Postwar France from Sartre to Althusser, Princeton University Press, 1975.

Anatómiai művek

[A1] M. Annett, Left, Right, Hand and Brain: The Right Shift Theory, Erlbaum, New Yersey, 1985.

[A2] A. Beaton, Left Side, Right Side: A Review of Laterality Research, Batsford, 1985.

[A3] S. P. Springer – G. Deutsch, Left Brain, Right Brain, W. H. Freeman, New York, 1981, 1985.

További olvasmányok

[O1] J. T. Balwin (szerk.), Classification Theory, Springer Lecture Notes in Mathematics 1292 (1987).

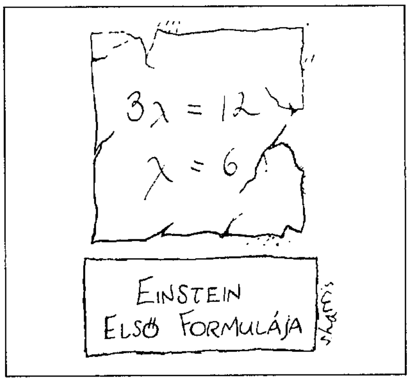
[O2] J. Denef, „p-adic semi-algebric sets and cell decomposition", Journal für die reine und angewandte Mathematik 369 (1986), 154–166.

[O3] J. Denef – L. van den Dries, „p-adic and real subanalytic sets", Annals of Mathematics (2) 128 (1988), 79–138.

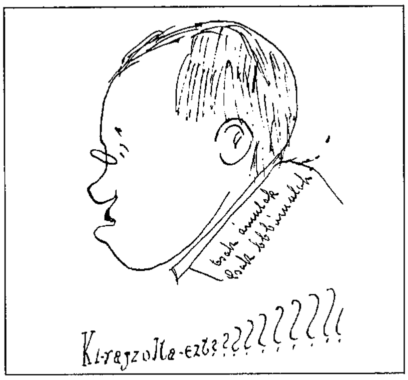
[O4] F. Dyson, Infinite in all Directions, Harper and Row, New York, 1988.

[O5] A. MacIntyre, „On definable subsets of p-adic fields", Journal of Symbolic Logic 41 (1976), 605–610.

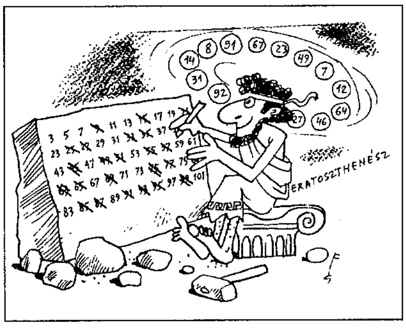
A matematika karikatúrái



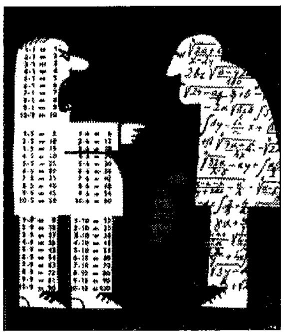
(Sidney Harris rajza)



Fejér Lipót



Eratoszthenész szitája *(Fekete Géza rajza)*



Ki a főnök?