Topologie et Calcul Différentiel

Cours de Claude Danthony
Notes de Alexis Marchand

ENS de Lyon
S1 2017-2018
Niveau L3

Table des matières

1 Topologie des espaces métriques **2**
1.1 Distances 2
1.2 Ouverts, fermés et voisinages 3
1.3 Adhérence, intérieur et frontière 4
1.4 Parties denses 5
1.5 Fonctions continues 5
1.6 Limites 6
1.7 Valeurs d'adhérence d'une suite 6
1.8 Utilisation des suites dans les espaces métriques 6
1.9 Espaces vectoriels normés et applications multilinéaires 6

2 Connexité **7**
2.1 Définition et premières propriétés 7
2.2 Un exemple fondamental 8
2.3 Fonctions continues et connexité 8
2.4 Connexité par arcs 8
2.5 Composantes connexes et espaces localement connexes 9
2.6 Applications de la connexité 9

3 Espaces complets et espaces de Banach **10**
3.1 Espaces métriques complets 10
3.2 Un exemple fondamental 10
3.3 Théorèmes de point fixe 11
3.4 Prolongement des applications uniformément continues 11
3.5 Complété d'un espace métrique 12
3.6 Espaces de Banach 12

4 Espaces de Hilbert **13**
4.1 Espaces préhilbertiens 13
4.2 Espaces de Hilbert 14
4.3 Hilbert et formes linéaires 15
4.4 Bases hilbertiennes 15

5 Topologie générale **15**
5.1 Généralités 15
5.2 Constructions de topologies 16

6 Compacité **18**
6.1 Généralités . . . 18
6.2 Propriétés des espaces compacts . . . 18
6.3 Exemples de compacts . . . 19
6.4 Espaces vectoriels normés . . . 20
6.5 Cas des espaces métriques . . . 21
6.6 Ascoli . . . 21

7 Espaces de Baire **23**
7.1 Théorème de Baire . . . 23
7.2 Quelques baireries . . . 24
7.3 Applications aux espaces de Banach . . . 24

8 Généralités de calcul différentiel **26**
8.1 Notion de différentiabilité . . . 26
8.2 Quelques remarques . . . 26
8.3 Règles de calcul . . . 27
8.4 Exemples . . . 27
8.5 Différentiabilité et espaces produits . . . 28
8.6 Difféomorphismes . . . 28

9 Inégalité des accroissements finis **29**
9.1 Inégalité des accroissements finis pour les fonctions de la variable réelle . . . 29
9.2 Inégalité des accroissements finis . . . 30
9.3 Première application . . . 31
9.4 Deuxième application . . . 31
9.5 Troisième application . . . 32

10 Différentielles d'ordres supérieurs **32**
10.1 Généralités . . . 32
10.2 Espaces produits . . . 33
10.3 Difféomorphismes . . . 33
10.4 Théorème de Schwarz . . . 34

11 Formules de Taylor **35**
11.1 Une première formule . . . 35
11.2 Formule de Taylor-Lagrange . . . 35
11.3 Formule de Taylor-Young . . . 36
11.4 Extrema . . . 36
11.5 Formule de Taylor avec reste intégral . . . 37

12 Inversion locale **37**
12.1 Théorème d'inversion locale . . . 37
12.2 Théorème des fonctions implicites . . . 38
12.3 Théorème du rang constant . . . 39

1 Topologie des espaces métriques

1.1 Distances

Définition 1.1.1 (Distance)**.** *Soit E un ensemble. On dit que $d : E^2 \to \mathbb{R}_+$ est une* distance *lorsque les trois propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) Séparation *:* $\forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) = 0 \iff x = y$.

(ii) Symétrie : $\forall (x,y)\in E^2,\ d(x,y)=d(y,x)$.

(iii) Inégalité triangulaire : $\forall (x,y,z)\in E^3,\ d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$.

Dans ce cas, on dit que (E,d) est un espace métrique.

Définition 1.1.2 (Boules et sphères)**.** *Soit (E,d) un espace métrique, $\omega\in E$, $r\in\mathbb{R}_+^*$. On définit :*

(i) $B(\omega,r)=\{x\in E,\ d(x,\omega)<r\}$ *(*boule ouverte*).*

(ii) $BF(\omega,r)=\{x\in E,\ d(x,\omega)\leqslant r\}$ *(*boule fermée*).*

(iii) $S(\omega,r)=\{x\in E,\ d(x,\omega)=r\}$ *(*sphère*).*

Exemple 1.1.3.

(i) $E=\mathbb{R}$. $\forall (x,y)\in E^2,\ d(x,y)=|x-y|$.

(ii) *E espace vectoriel normé.* $\forall (x,y)\in E^2,\ d(x,y)=\|x-y\|$.

(iii) *E ensemble quelconque.* $\forall (x,y)\in E^2,\ d(x,y)=1-\mathbb{1}_{\{x\}}(y)$.

(iv) $E=\overline{\mathbb{R}}$. $\forall (x,y)\in E^2,\ d(x,y)=|\arctan x-\arctan y|$, *avec* $\arctan(\pm\infty)=\pm\frac{\pi}{2}$.

(v) $E=\overline{\mathbb{N}}$. *Même distance que ci-dessus.*

Exemple 1.1.4. *On note $E=\mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$. Alors l'application $d:E^2\to\mathbb{R}_+$ définie ci-dessous est une distance sur E :*

$$\forall (f,g)\in E^2,\ d(f,g)=\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^{k+1}}\min\left(1,\left\|f^{(k)}-g^{(k)}\right\|_\infty\right).$$

1.2 Ouverts, fermés et voisinages

Définition 1.2.1 (Partie ouverte)**.** *Soit (E,d) un espace métrique. On dit qu'une partie $\mathcal{O}\subset E$ est un* ouvert *de E si c'est l'ensemble vide ou une réunion quelconque de boules ouvertes. L'ensemble des parties ouvertes de E s'appelle la* topologie *de l'espace métrique (E,d).*

Exemple 1.2.2. *Soit (E,d) un espace métrique et $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$. On définit une distance d' sur E par :*

$$\forall (x,y)\in E^2,\ d'(x,y)=\min(\alpha,d(x,y)).$$

Alors les espaces métriques (E,d) et (E,d') ont la même topologie.

Théorème 1.2.3. *Soit (E,d) un espace métrique.*

(i) *$\varnothing$ et E sont des ouverts.*

(ii) *Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.*

(iii) *Une intersection de deux ouverts est un ouvert.*

Démonstration. (i) et (ii) Clair. (iii) Cela repose sur le fait que, pour $(x,y)\in E^2$ et $(\rho,\sigma)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, on a selon l'inégalité triangulaire :

$$B(x,\rho)\cap B(y,\sigma)=\bigcup_{z\in B(x,\rho)\cap B(y,z)}B\left(z,\min\left(\rho-d(x,z),\sigma-d(y,z)\right)\right).$$

□

Définition 1.2.4 (Partie fermée)**.** *Soit (E,d) un espace métrique. On dit qu'une partie $F\subset E$ est un* fermé *de E lorsque $E\backslash F$ est un ouvert de E.*

Corollaire 1.2.5. *Soit (E,d) un espace métrique.*

(i) *$\varnothing$ et E sont des fermés.*

(ii) *Une intersection quelconque de fermés est un fermé.*

(iii) *Une réunion de deux fermés est un fermé.*

Exemple 1.2.6. *Les boules fermées d'un espace métrique sont des fermés.*

Définition 1.2.7 (Voisinage)**.** *Soit (E,d) un espace métrique, $V \subset E$ et $x \in V$. On dit que V est un* voisinage *de x lorsqu'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ tel que $x \in \mathcal{O} \subset V$.*

Proposition 1.2.8. *Une intersection finie de voisinages d'un même point est un voisinage de ce point. De plus, toute partie contenant un voisinage d'un point est aussi un voisinage de ce point.*

Proposition 1.2.9. *Soit (E,d) un espace métrique et $\mathcal{O} \subset E$. Alors $\mathcal{O}$ est un ouvert de E* ssi *$\mathcal{O}$ est un voisinage de chacun de ses points.*

Définition 1.2.10 (Bases)**.** *Soit (E,d) un espace métrique et $x \in E$. On appelle* base de la topologie *de (E,d) (resp.* base de voisinages *de x) toute famille $\mathfrak{B}$ d'ouverts de E (resp. de voisinages de x) t.q. tout ouvert de E est une réunion d'éléments de $\mathfrak{B}$ (resp. tout voisinage de x contient un élément de $\mathfrak{B}$).*

Exemple 1.2.11.

(i) $\{]r,s[\,,\ (r,s) \in \mathbb{Q}^2\}$ *est une base de la topologie de $\mathbb{R}$.*

(ii) *Soit (E,d) un espace métrique et $x \in E$. Alors $\left\{B\left(x,\frac{1}{k}\right),\ k \in \mathbb{N}^*\right\}$ est une base de voisinages de x.*

1.3 Adhérence, intérieur et frontière

Définition 1.3.1 (Adhérence, intérieur et frontière)**.** *Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$.*

(i) *On appelle* adhérence *de A, notée $\overline{A}$, le plus petit fermé de E contenant A (i.e. l'intersection de tous les fermés contenant A).*

(ii) *On appelle* intérieur *de A, noté $\mathring{A}$, le plus grand ouvert de E contenu dans A (i.e. la réunion de tous les ouverts contenu dans A).*

(iii) *On appelle* frontière *de A : $\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A}$.*

Définition 1.3.2 (Point adhérent)**.** *Soit (E,d) un espace métrique, $A \subset E$ et $x \in E$. On dit que x est* adhérent *à A lorsque tout voisinage de x rencontre A.*

Proposition 1.3.3. *Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. Alors $\overline{A}$ est l'ensemble des points adhérents à A et $\mathring{A}$ est l'ensemble des points dont A est voisinage.*

Définition 1.3.4 (Point isolé, point d'accumulation)**.** *Soit (E,d) un espace métrique, $A \subset E$ et $x \in \overline{A}$.*

(i) *On dit que x est* isolé *lorsqu'il existe un voisinage V de x t.q. $V \cap A = \{x\}$.*

(ii) *On dit que x est un* point d'accumulation *de A lorsque pour tout V voisinage de x, $V \cap A \neq \{x\}$.*

Remarque 1.3.5. *Soit (E,d) un espace métrique, $x \in E$ et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. On a toujours $\overline{B(x,\rho)} \subset BF(x,\rho)$ mais l'inclusion peut être stricte.*

Proposition 1.3.6. *Soit (E,d) un espace métrique et $A, B \subset E$. Alors :*

(i) $\overline{E \backslash A} = E \backslash \mathring{A}$ *et* $\overset{\circ}{\overbrace{E \backslash A}} = E \backslash \overline{A}$.

(ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *et* $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

(iii) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ *et* $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$.

1.4 Parties denses

Définition 1.4.1 (Partie dense)**.** *Soit (E,d) un espace métrique. Soit $A \subset E$. S'équivalent :*

(i) $\overline{A} = E$.

(ii) $\overset{\circ}{\overbrace{E \backslash A}} = \varnothing$.

(iii) *Tout ouvert non vide de E rencontre A.*

(iv) *Toute boule ouverte de E rencontre A.*

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que A est dense *dans E.*

Exemple 1.4.2. $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Définition 1.4.3 (Espace séparable)**.** *On dit que l'espace métrique (E,d) est* séparable *s'il existe une partie $D \subset E$ dense et au plus dénombrable.*

Proposition 1.4.4. *Un espace métrique est séparable* ssi *sa topologie admet une base dénombrable.*

Corollaire 1.4.5. *Si (E,d) est un espace métrique séparable et $A \subset E$, alors $\left(A, d_{|A^2}\right)$ est séparable.*

1.5 Fonctions continues

Définition 1.5.1 (Continuité)**.** *Soit (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$.*

(i) *On dit que f est* continue au point $x \in E$ *lorsque l'image inverse de tout voisinage V de $f(x)$ est un voisinage de x.*

(ii) *On dit que f est* continue *lorsque l'image inverse de tout ouvert $\mathcal{O}$ de F est un ouvert de E.*

Remarque 1.5.2. *Pour la continuité en un point, il suffit de choisir V dans une base de voisinages de $f(x)$. Pour la continuité globale, il suffit de choisir $\mathcal{O}$ dans une base de la topologie de F.*

Théorème 1.5.3. *Soit (E,d), (F,δ) et $(G,\mathfrak{d})$ trois espaces métriques, $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On suppose que f et g sont continues (resp. f est continue en $x \in E$ et g est continue en $f(x)$). Alors $g \circ f$ est continue (resp. $g \circ f$ est continue en x).*

Proposition 1.5.4. *Soit (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$. Alors f est continue* ssi *f est continue en tout point de E.*

Définition 1.5.5 (Fonctions uniformément continues, lipschitziennes)**.** *Soit (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$.*

(i) *On dit que f est* uniformément continue *lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) < \eta \Longrightarrow \delta\left(f(x), f(y)\right) < \varepsilon.$$

(ii) *On dit que f est* k-lipschitzienne *(avec $k \in \mathbb{R}_+^*$) lorsque :*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \delta\left(f(x), f(y)\right) \leqslant k \cdot d(x,y).$$

Proposition 1.5.6. *Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue et toute fonction uniformément continue est continue.*

Définition 1.5.7 (Distance à une partie)**.** *Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$, $A \neq \varnothing$. Pour $x \in E$, on définit :*

$$d(x,A) = \inf_{a \in A} d(x,a) \in \mathbb{R}_+.$$

Proposition 1.5.8. *Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$, $A \neq \varnothing$. Alors l'application $d(\cdot, A) : E \to \mathbb{R}_+$ est 1-lipschitzienne, donc continue.*

Définition 1.5.9 (Homéomorphisme)**.** *Soit (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$. On dit que f est un* homéomorphisme *lorsque f est bijective, continue, et f^{-1} est continue. S'il existe un homéomorphisme de E dans F, on dit que E et F sont* homéomorphes.

1.6 Limites

Définition 1.6.1 (Limite d'une fonction en un point)**.** *Soit (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques et $f : A \subset E \to F$. Soit a un point d'accumulation de A, $\ell \in F$. On dit que f a pour* limite *ℓ au point a, et on note $\lim_a f = \ell$, lorsque :*

$$\forall W \text{ voisinage de } \ell \text{ dans } F,\ \exists V \text{ voisinage de } a \text{ dans } E,\ f\left(V \cap A \backslash \{a\}\right) \subset W.$$

Exemple 1.6.2. *Avec cette définition, $\lim_0 \mathbb{1}_{\{0\}} = 0$ dans $\mathbb{R}$.*

Proposition 1.6.3. *Soit (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques et $f : A \subset E \to F$. Soit $a \in A$ un point d'accumulation de A. Alors f est continue en a* ssi *f admet une limite en a et cette limite est égale à $f(a)$.*

Remarque 1.6.4. *Avec les distances définies sur $\overline{\mathbb{R}}$ et $\overline{\mathbb{N}}$ dans l'exemple 1.1.3, la définition 1.6.1 permet de retrouver la notion de convergence d'une suite, ou encore de limite d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $\pm\infty$.*

1.7 Valeurs d'adhérence d'une suite

Définition 1.7.1 (Valeur d'adhérence)**.** *Soit (E,d) un espace métrique, $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$. On dit que ℓ est une* valeur d'adhérence *de u lorsque :*

$$\forall W \text{ voisinage de } \ell,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ u_n \in W.$$

Définition 1.7.2 (Suite extraite)**.** *Étant donnés un ensemble X et une suite $u \in X^{\mathbb{N}}$, on appelle* suite extraite *de u toute suite de la forme $u \circ \varphi$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.*

Proposition 1.7.3. *Soit (E,d) un espace métrique, $u \in E^{\mathbb{N}}$. Si une suite extraite de u admet une limite, alors cette limite est une valeur d'adhérence de u.*

1.8 Utilisation des suites dans les espaces métriques

Remarque 1.8.1. *Dans un espace métrique (E,d), tout point $x \in E$ admet une base dénombrable de voisinages : $\left\{B\left(x, \frac{1}{k}\right),\ k \in \mathbb{N}^*\right\}$.*

Proposition 1.8.2. *Soit (E,d) un espace métrique, $u \in E^{\mathbb{N}}$. Alors toute valeur d'adhérence de u est limite d'une suite extraite de u (mais ceci est vrai seulement dans les espaces métriques !).*

Proposition 1.8.3. *Soit (E,d) un espace métrique, $A \subset E$. Alors $\overline{A}$ est l'ensemble des limites (dans E) des suites à valeurs dans A.*

Corollaire 1.8.4. *Soit (E,d) un espace métrique, $A \subset E$. Alors A est fermé* ssi *toute suite d'éléments de A convergeant (dans E) a sa limite dans A.*

Proposition 1.8.5. *Soit (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques et $f : A \subset E \to F$. Pour $a \in A$, f est continue en a* ssi *pour toute suite $u \in A^{\mathbb{N}}$ t.q. $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, on a $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.*

1.9 Espaces vectoriels normés et applications multilinéaires

Remarque 1.9.1. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors l'application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ est 1-lipschitzienne donc continue.*

Définition 1.9.2 (Norme produit)**.** *Si $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, \left(E_p, \|\cdot\|_p\right)$ sont des espaces vectoriels normés, on munit $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ de la norme $\|\cdot\|$ définie par :*

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E,\ \|(x_1, \dots, x_p)\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \|x_i\|_i\,.$$

Proposition 1.9.3. *Soit* $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, \left(E_p, \|\cdot\|_p\right), (F, \|\cdot\|_F)$ *des espaces vectoriels normés. Soit* $\phi : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ *une application p-linéaire. S'équivalent :*

(i) ϕ *est continue.*

(ii) ϕ *est continue en* 0.

(iii) $\exists k \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p,\ \|\phi(x_1, \dots, x_p)\|_F \leqslant k \|x_1\|_1 \cdots \|x_p\|_p$.

(iv) *L'ensemble* $\{\|\phi(x)\|_F,\ x \in \prod_{i=1}^p BF_i(0,1)\}$ *est borné.*

(v) *L'ensemble* $\{\|\phi(x)\|_F,\ x \in \prod_{i=1}^p S_i(0,1)\}$ *est borné.*

Remarque 1.9.4. *Pour* $p = 1$*, la proposition précédente montre qu'une application linéaire est continue* ssi *elle est lipschitzienne.*

Corollaire 1.9.5. *Les applications* $+ : E \times E \to E$ *(qui est linéaire) et* $\cdot : \mathbb{R} \times E \to E$ *(qui est bilinéaire) sont continues.*

Définition 1.9.6 (Norme d'une application multilinéaire)**.** *Soit* $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, \left(E_p, \|\cdot\|_p\right), (F, \|\cdot\|_F)$ *des espaces vectoriels normés. Soit* $\phi : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ *une application p-linéaire continue. Alors on appelle* norme *de* ϕ *:*

$$\begin{aligned}\|\phi\| &= \min\left\{k \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p,\ \|\phi(x_1, \dots, x_p)\|_F \leqslant k \|x_1\|_1 \cdots \|x_p\|_p\right\} \\ &= \sup_{x \in \prod_{i=1}^p BF_i(0,1)} \|\phi(x)\|_F = \sup_{x \in \prod_{i=1}^p S_i(0,1)} \|\phi(x)\|_F .\end{aligned}$$

On note $\mathcal{L}_\mathcal{C}(E_1, \dots, E_p, F)$ *l'espace vectoriel des applications p-linéaires et continues de* $E_1 \times \cdots \times E_p$ *dans* F*. Alors* $(\mathcal{L}_\mathcal{C}(E_1, \dots, E_p, F), \|\cdot\|)$ *est un espace vectoriel normé.*

Proposition 1.9.7. *Soit* $(E_1, \|\cdot\|_1), (E_2, \|\cdot\|_2), (F, \|\cdot\|_F)$ *des espaces vectoriels normés. Alors il existe une isométrie bijective entre* $\mathcal{L}_\mathcal{C}(E_1, E_2, F)$ *et* $\mathcal{L}_\mathcal{C}(E_1, \mathcal{L}_\mathcal{C}(E_2, F))$.

Proposition 1.9.8. *Soit* $E_1, \dots, E_p, F$ *des espaces vectoriels. On suppose que* F *est muni d'une norme quelconque* $\|\cdot\|_F$ *et que* $E_1, \dots, E_p$ *sont de dimension finie. Pour* $i \in [\![1, p]\!]$*, on se donne* $\left(e_1^i, \dots, e_{d_i}^i\right)$ *une base de* E_i *et on munit* E_i *de* $\|\cdot\|_i$ *définie par :*

$$\forall x \in E_i,\ \|x\|_i = \max_{1 \leqslant j \leqslant d_i} \left|\left(e_j^i\right)^*(x)\right|,$$

où $\left((e_1^i)^*, \dots, \left(e_{d_i}^i\right)^*\right)$ *est la base duale de* $\left(e_1^i, \dots, e_{d_i}^i\right)$*. Avec ces normes, toute application p-linéaire de* $E_1 \times \cdots \times E_p$ *dans* F *est continue.*

Proposition 1.9.9. *Soit* $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F), (G, \|\cdot\|_G)$ *des espaces vectoriels normés,* $\varphi \in \mathcal{L}_\mathcal{C}(E, F)$, $\psi \in \mathcal{L}_\mathcal{C}(F, G)$*. Alors* $\psi \circ \varphi \in \mathcal{L}_\mathcal{C}(E, G)$ *et :*

$$\|\psi \circ \varphi\| \leqslant \|\psi\| \cdot \|\varphi\| .$$

2 Connexité

2.1 Définition et premières propriétés

Définition 2.1.1 (Espace connexe)**.** *Un espace métrique* (E, d) *est dit* connexe *s'il ne peut pas s'écrire comme réunion disjointe de deux ouverts non vides.*

Proposition 2.1.2. *Soit* (E, d) *un espace métrique. S'équivalent :*

(i) (E, d) *est connexe.*

(ii) *Les seules parties à la fois ouvertes et fermées de* E *sont* $\varnothing$ *et* E.

(iii) *Toute application continue de E dans $\{0,1\}$ (muni de la distance discrète) est constante.*

Définition 2.1.3 (Partie connexe d'un espace métrique)**.** *Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. On dit que A est* connexe *lorsque $\left(A, d_{|A^2}\right)$ est un espace métrique connexe.*

Proposition 2.1.4. *Soit (E,d) un espace métrique.*

(i) *Si $A \subset E$ est connexe et $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe.*

(ii) *Si $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(E)^I$ est telle que $\forall i \in I$, A_i est connexe et $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$ alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.*

2.2 Un exemple fondamental

Théorème 2.2.1. *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Démonstration. Montrer d'abord que toute partie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un intervalle (i.e. qui n'est pas convexe) n'est pas connexe. Pour la réciproque, il suffit de montrer que tout segment est connexe (car tout intervalle J s'écrit sous la forme $J = \bigcup_{i\in I} S_i$, où les $(S_i)_{i\in I}$ sont des segments et $\bigcap_{i\in I} S_i \neq \varnothing$, ce qui permet d'appliquer la proposition 2.1.4). Soit donc $a < b$. Soit U et V des ouverts disjoints de $[a,b]$ t.q. $[a,b] = U \cup V$. On peut supposer que $a \in U$. On pose alors :

$$s = \sup\left\{x \in [a,b],\ [a,x] \subset U\right\}.$$

Comme $a \in U$ et U est ouvert, on obtient $s > a$. De plus, comme V est ouvert, on obtient $s \in U$. Enfin, comme $s \in U$ et U est ouvert, on obtient $s = b$. Ceci prouve que $V = \varnothing$. Donc $[a,b]$ est connexe. $\square$

2.3 Fonctions continues et connexité

Théorème 2.3.1. *Soit (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques. Si E est connexe et $f : E \to F$ est continue, alors $f(E)$ est connexe.*

Théorème 2.3.2 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'image par f de tout intervalle est un intervalle.*

Théorème 2.3.3 (Théorème du passage de douane)**.** *Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. Soit $\gamma : [0,1] \to E$ continue t.q. $\gamma(0) \in A$ et $\gamma(1) \notin A$. Alors $\gamma^{-1}(\partial A) \neq \varnothing$.*

Démonstration. Notons que $E = \mathring{A} \sqcup \partial A \sqcup \left(E \setminus \overline{A}\right)$. Si $\gamma(0) \in \partial A$ ou $\gamma(1) \in \partial A$, il n'y a rien à prouver. Sinon, on a $\gamma(0) \in \mathring{A}$, $\gamma(1) \in E\setminus\overline{A}$. Donc $\gamma^{-1}\left(\mathring{A}\right)$ et $\gamma^{-1}\left(E\setminus\overline{A}\right)$ sont des ouverts disjoints non vides de $[0,1]$. Comme $[0,1]$ est connexe, on a $[0,1] \neq \gamma^{-1}\left(\mathring{A}\right) \sqcup \gamma^{-1}\left(E\setminus\overline{A}\right)$. Donc $\gamma^{-1}(\partial A) \neq \varnothing$. $\square$

2.4 Connexité par arcs

Définition 2.4.1 (Espace connexe par arcs)**.** *Un espace métrique (E,d) est dit* connexe par arcs *lorsque pour tout $(x,y) \in E^2$, il existe $\gamma : [0,1] \to E$ continue t.q. $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.*

Proposition 2.4.2. *Tout espace connexe par arcs est connexe.*

Démonstration. Soit (E,d) un espace connexe par arcs. Soit $x \in E$ fixé. Comme E est connexe par arcs on a :

$$\bigcup_{\substack{\gamma \in \mathcal{C}^0([0,1],E) \\ \gamma(0)=x}} \gamma([0,1]) = E \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{\substack{\gamma \in \mathcal{C}^0([0,1],E) \\ \gamma(0)=x}} \gamma([0,1]) \supset \{x\} \supsetneq \varnothing.$$

Or, pour $\gamma \in \mathcal{C}^0([0,1],E)$ t.q. $\gamma(0) = x$, $\gamma([0,1])$ est connexe d'après le théorème 2.3.1 car $[0,1]$ est connexe (d'après le théorème 2.2.1). Selon la proposition 2.1.4, E est donc connexe. $\square$

Corollaire 2.4.3. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $A \subset E$. Alors :*

$$A \text{ convexe} \Longrightarrow A \text{ étoilé} \Longrightarrow A \text{ connexe par arcs} \Longrightarrow A \text{ connexe.}$$

Exemple 2.4.4 (Sinus du topologue)**.** *On considère :*

$$\Gamma = \overline{\left\{\left(t, \sin\frac{1}{t}\right),\ t \in \mathbb{R}_+^*\right\}} \subset \mathbb{R}^2.$$

Alors Γ est connexe mais pas connexe par arcs.

2.5 Composantes connexes et espaces localement connexes

Définition 2.5.1 (Composante connexe)**.** *Soit (E, d) un espace métrique. Pour $x \in E$, la* composante connexe *de x dans E est le plus grand connexe de E contenant x (c'est la réunion de tous les connexes de E contenant x, qui est bien connexe d'après la proposition 2.1.4).*

Proposition 2.5.2. *Soit (E, d) un espace métrique.*

(i) *Toutes les composantes connexes de E sont des fermés de E.*

(ii) *Les composantes connexes de E forment une partition de E.*

Définition 2.5.3 (Espace totalement discontinu)**.** *Un espace métrique (E, d) est dit* totalement discontinu *lorsque toutes les composantes connexes de E sont des singletons.*

Exemple 2.5.4. *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors A est totalement discontinu* ssi *$\mathring{A} = \varnothing$.*

Exemple 2.5.5 (Ensemble de Cantor)**.** *L'espace $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, muni de la distance d définie par $\forall (u, v) \in \left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^2$, $d(u, v) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|u_n - v_n|}{2^n}$, est totalement discontinu.*

Définition 2.5.6 (Espace localement connexe)**.** *On dit qu'un espace métrique (E, d) est* localement connexe *lorsque tout point $x \in E$ possède une base de voisinages connexes.*

Exemple 2.5.7. *La courbe sinus du topologue (c.f. exemple 2.4.4) est connexe mais pas localement connexe.*

2.6 Applications de la connexité

Théorème 2.6.1. *Pour $n \geqslant 2$, $\mathbb{R}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ était un homéomorphisme, alors $h_{|\mathbb{R}^*} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^n \setminus \{h(0)\}$ serait aussi un homéomorphisme, ce qui est absurde car $\mathbb{R}^n \setminus \{h(0)\}$ est connexe, contrairement à $\mathbb{R}^*$. □

Théorème 2.6.2 (Structure des ouverts de $\mathbb{R}$)**.** *Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.*

Démonstration. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}$. On écrit $\mathcal{O} = \bigsqcup_{\alpha \in A} I_\alpha$, où $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ est la famille des composantes connexes de $\mathcal{O}$. Pour $\alpha \in A$, I_α est un connexe de $\mathbb{R}$, c'est donc un intervalle selon le théorème 2.2.1. Et comme $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, on vérifie aisément que I_α est un intervalle ouvert. De plus, l'ensemble A est fini ou dénombrable car l'application $\psi : \mathbb{Q} \cap \mathcal{O} \to A$ t.q. $\forall r \in \mathbb{Q} \cap \mathcal{O}$, $r \in I_{\psi(r)}$ est surjective. □

Proposition 2.6.3. *Soit (E, d) un espace métrique. S'équivalent :*

(i) *(E, d) est localement connexe.*

(ii) *Toute composante connexe d'un ouvert $\mathcal{O}$ de E est un ouvert de E.*

Définition 2.6.4 (Application localement constante)**.** *Soit* (E, d) *un espace métrique,* X *un ensemble. On dit qu'une application* $f : E \to X$ *est* localement constante *lorsque pour tout* $x \in E$*, il existe* V *voisinage de* x *t.q.* $f_{|V}$ *est constante.*

Proposition 2.6.5. *Soit* (E, d) *un espace métrique,* X *un ensemble,* $f : E \to X$*. On suppose que* (E, d) *est connexe et que* f *est localement constante. Alors* f *est constante.*

Démonstration. Pour $a \in X$, $f^{-1}(\{a\})$ est un ouvert de E (car f est localement constante). Or :

$$f^{-1}(\{a\}) = E \backslash \bigcup_{b \in X \backslash \{a\}} f^{-1}(\{b\}).$$

Donc $f^{-1}(\{a\})$ est un ouvert fermé de E, qui est connexe, donc est égal à $\varnothing$ ou E. □

3 Espaces complets et espaces de Banach

3.1 Espaces métriques complets

Définition 3.1.1 (Suite de Cauchy)**.** *Soit* (E, d) *un espace métrique. Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ *est dite* de Cauchy *lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p > N,\ \forall q > N,\ d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Proposition 3.1.2. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Définition 3.1.3 (Espace métrique complet)**.** *Un espace métrique* (E, d) *est dit* complet *lorsque toute suite de Cauchy de* (E, d) *converge.*

Remarque 3.1.4. *Le fait d'être un espace métrique complet n'est pas une propriété topologique ! Par exemple, soit* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *la distance définie par* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$*. Alors les espaces* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *et* $(\mathbb{R}, d)$ *sont homéomorphes, mais le premier est complet et pas le second.*

Proposition 3.1.5. *Soit* (E, d) *un espace métrique.*

(i) *Toute suite de Cauchy de* (E, d) *est bornée.*

(ii) *Si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy de* (E, d) *admettant une valeur d'adhérence* $\ell \in E$*, alors* $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$*.*

Proposition 3.1.6. *Soit* (E, d) *et* (F, δ) *deux espaces métriques. Soit* $f : E \to F$ *une application bijective uniformément continue, de réciproque uniformément continue. Alors, pour* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$*,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy* ssi $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy.*

Proposition 3.1.7. *Soit* (E, d) *un espace métrique.*

(i) *Si* (E, d) *est complet et* F *est un fermé de* E*, alors* $\left(F, d_{|F^2}\right)$ *est complet.*

(ii) *Si* F *est une partie de* E *t.q.* $\left(F, d_{|F^2}\right)$ *est complet, alors* F *est un fermé de* E*.*

3.2 Un exemple fondamental

Théorème 3.2.1. $\mathbb{R}^n$ *(muni de n'importe quelle norme) est complet pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

Démonstration. Utiliser le fait qu'une boule fermée de $\mathbb{R}^n$ est compacte. □

3.3 Théorèmes de point fixe

Définition 3.3.1 (Fonction contractante)**.** *On dit qu'une fonction est* contractante *si elle est k-lipschitzienne, avec $k < 1$.*

Théorème 3.3.2 (Théorème du point fixe de Banach-Picard)**.** *Soit (E, d) un espace métrique complet, $f : E \to E$ une fonction contractante. Alors :*

(i) *f admet un unique point fixe $\omega \in E$.*

(ii) *Pour tout $x \in E$, on a $f^n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \omega$, avec $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.*

Démonstration. *Unicité du point fixe.* Clair avec le fait que f est contractante. *Existence du point fixe et convergence des suites f-récurrentes.* Soit $x \in E$ fixé. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $d\left(f^n(x), f^{n+1}(x)\right) \leqslant k^n d\left(x, f(x)\right)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p < q \Longrightarrow d\left(f^p(x), f^q(x)\right) &\leqslant \sum_{j=p}^{q-1} d\left(f^j(x), f^{j+1}(x)\right) \leqslant \left(\sum_{j=p}^{q-1} k^j\right) d\left(x, f(x)\right) \\ &\leqslant \frac{k^p}{1-k} d\left(x, f(x)\right).\end{aligned}$$

En déduire que $\left(f^n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy donc converge vers $\omega \in E$ (car (E, d) est complet). On vérifie alors que $f(\omega) = \omega$, donc ω est l'unique point fixe de f. □

Théorème 3.3.3 (Théorème du point fixe à paramètre)**.** *Soit (E, d) un espace métrique complet, (T, δ) un espace métrique, $f : T \times E \to E$ continue t.q. il existe $k < 1$ t.q. pour tout $t \in T$, $f(t, \cdot)$ est k-lipschitzienne. Selon le théorème 3.3.2, $f(t, \cdot)$ admet un unique point fixe $g(t) \in E$ pour tout $t \in T$. Alors l'application $g : T \to E$ ainsi définie est continue.*

Démonstration. On notera $f_t = f(t, \cdot)$ pour $t \in T$. Soit $t_0 \in T$. On note $x_0 = g(t_0)$. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en (t_0, x_0) il existe V voisinage de t_0 dans T et $\eta > 0$ t.q. $\forall (t, x) \in V \times B(x_0, \eta)$, $d\left(f(t, x), x_0\right) = d\left(f(t, x), f(t_0, x_0)\right) < \varepsilon$. En appliquant ceci avec $x = x_0$, il vient $\forall t \in V$, $d\left(f(t, x_0), x_0\right) < \varepsilon$. En itérant f_t :

$$\forall t \in V,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ d\left(f_t^n(x_0), f_t^{n-1}(x_0)\right) \leqslant k^{n-1}\varepsilon.$$

D'où :

$$\forall t \in V,\ d\left(f_t^n(x_0), x_0\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{1-k}.$$

On fait alors tendre $n \to +\infty$ et on applique le théorème 3.3.2 : $\forall t \in V$, $d\left(g(t), g(t_0)\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{1-k}$. □

3.4 Prolongement des applications uniformément continues

Lemme 3.4.1. *Soit (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques, $D \subset E$ une partie dense. Soit $f, g : E \to F$ deux applications continues t.q. $f_{|D} = g_{|D}$. Alors $f = g$.*

Théorème 3.4.2 (Théorème de prolongement des applications uniformément continues)**.** *Soit (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques, $D \subset E$ une partie dense et $f : D \to F$. On suppose que f est uniformément continue et que (F, δ) est complet. Alors f admet un unique prolongement $\widetilde{f} : E \to F$ (uniformément) continu.*

Démonstration. Étant donné $x \in E = \overline{D}$, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ t.q. $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Montrer que $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc converge car (F, δ) est complet. Montrer de plus que la limite dépend de x mais pas du choix de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: on peut donc la noter $\widetilde{f}(x)$. Reste à prouver que $\widetilde{f}$ est uniformément continu. Et l'unicité est une conséquence du lemme 3.4.1. □

3.5 Complété d'un espace métrique

Théorème 3.5.1 (Existence du complété d'un espace métrique)**.** *Si (E, d) est un espace métrique, alors il existe un espace métrique $\left(\widetilde{E}, \widetilde{d}\right)$ complet, une application $j : E \to \widetilde{E}$ isométrique (mais pas forcément surjective) avec $j(E)$ dense dans $\widetilde{E}$. On dit que $\widetilde{E}$ est le* complété *de E. Il est unique à isométrie bijective près.*

Démonstration. Soit $\mathcal{C} \subset E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites de Cauchy de (E, d). Étant donné $(x, y) \in \mathcal{C}^2$, $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$, donc converge ; sa limite est notée $\delta(x, y)$. On définit alors une relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{C}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{C}^2,\ x \sim y \Longleftrightarrow \delta(x, y) = 0.$$

On pose $\widetilde{E} = \mathcal{C}/\sim$, qu'on munit de la distance $\widetilde{d}$ définie par $\forall (x, y) \in \mathcal{C}^2,\ \widetilde{d}([x], [y]) = \delta(x, y)$. Reste à poser $j : a \in E \longmapsto \left[(a)_{n\in\mathbb{N}}\right]$ et à vérifier que $\left(\widetilde{E}, \widetilde{d}\right)$ et j vérifient les propriétés du théorème. □

3.6 Espaces de Banach

Définition 3.6.1 (Espace de Banach)**.** *Un espace vectoriel normé est dit* de Banach *s'il est complet.*

Lemme 3.6.2. *Soit (X, d), (Y, δ) deux espaces métriques. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(Y^X\right)^{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f \in Y^X$ et si f_n est $\mathcal{C}^0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est $\mathcal{C}^0$.*

Théorème 3.6.3. *Soit (X, d) un espace métrique et $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach. On note $\mathcal{C}_b^0(X, E)$ l'ensemble des fonctions continues et bornées $X \to E$, et on munit cet espace de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :*

$$\forall f \in \mathcal{C}_b^0(X, E),\ \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_E\,.$$

Alors $(\mathcal{C}_b^0(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Démonstration. $(\mathcal{C}_b^0(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ est bien un espace vectoriel normé. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{C}_b^0(X, E), \|\cdot\|_\infty)$. Pour $x \in X$, on remarque que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $(E, \|\cdot\|_E)$ donc converge vers $\ell(x) \in E$. Montrons que la convergence est uniforme. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall p > N$, $\forall q > N$, $\|f_p - f_q\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit alors $x \in X$. Soit $p > N$ t.q. $\|f_p(x) - \ell(x)\|_E < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors :

$$\forall n > N, \|f_n(x) - \ell(x)\|_E \leqslant \|f_n(x) - f_p(x)\|_E + \|f_p(x) - \ell(x)\|_E \leqslant \|f_n - f_p\|_\infty + \|f_p(x) - \ell(x)\|_E < \varepsilon.$$

Ceci prouve que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers ℓ. On en déduit que $\ell \in \mathcal{C}_b^0(X, E)$ et que $\|f_n - \ell\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

Théorème 3.6.4. *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On suppose que F est de Banach. Alors $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E, F)$ (muni de la norme d'opérateur) est de Banach.*

Théorème 3.6.5. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors E est de Banach* ssi *pour tout $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ t.q. $\sum x_n$ converge absolument, $\sum x_n$ converge.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) Si $\sum x_n$ converge absolument, montrer que $\left(\sum_{n=0}^N x_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc converge. ($\Leftarrow$) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Par récurrence sur n, montrer l'existence d'une suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\right\| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi, $\sum \left(x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\right)$ converge absolument donc converge. Donc $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Selon la proposition 3.1.5, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. □

4 Espaces de Hilbert

Notation 4.0.1. *Dans la suite, on notera* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

4.1 Espaces préhilbertiens

Définition 4.1.1 (Espace préhilbertien)**.** *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. On dit que* E *est* préhilbertien *lorsque* E *est muni d'une application* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ *vérifiant :*

(i) $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x \mid y \rangle = \overline{\langle y \mid x \rangle}$.

(ii) $\forall\,(x_1, x_2, y) \in E^3,\ \forall\,(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2,\ \langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \mid y \rangle = \alpha_1 \langle x_1 \mid y \rangle + \alpha_2 \langle x_2 \mid y \rangle$.

(iii) $\forall x \in E,\ \langle x \mid x \rangle \in \mathbb{R}_+$.

(iv) $\forall x \in E,\ \langle x \mid x \rangle = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*, on dit que* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *est une* forme sesquilinéaire *; si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*, on dit que* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *est un* produit scalaire*. Pour* $x \in E$*, on notera de plus* $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$.

Remarque 4.1.2. $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *est uniquement déterminé par* $\|\cdot\|$.

Proposition 4.1.3. *Soit* E *un espace préhilbertien.*

(i) $\forall x \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

(ii) $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Théorème 4.1.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soit* E *un espace préhilbertien. Alors :*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ |\langle x \mid y \rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|\,.$$

Démonstration. En considérant la fonction $t \longmapsto \|x + ty\|^2$, montrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ |\Re\left(\langle x \mid y \rangle\right)| \leqslant \|x\|\,\|y\|\,.$$

Soit alors $(x, y) \in E^2$. Soit $\alpha \in \mathbb{U}$ t.q. $\alpha \langle x \mid y \rangle = |\langle x \mid y \rangle|$. Alors $|\langle x \mid y \rangle| = \langle \alpha x \mid y \rangle = \Re\left(\langle \alpha x \mid y \rangle\right) \leqslant \|\alpha x\| \cdot \|y\| = \|x\| \cdot \|y\|$. □

Corollaire 4.1.5. *Soit* E *un espace préhilbertien. Alors* $\|\cdot\|$ *est une norme sur* E*. De plus,* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ *est continue pour cette norme.*

Définition 4.1.6 (Orthogonalité)**.** *Soit* E *un espace préhilbertien.*

(i) *Étant donné* $(x, y) \in E^2$*, on dit que* x *et* y *sont* orthogonaux *lorsque* $\langle x \mid y \rangle = 0$.

(ii) *Si* $A \subset E$*, on note* $A^\perp = \{y \in E,\ \forall x \in A,\ \langle x \mid y \rangle = 0\}$.

Proposition 4.1.7. *Soit* E *un espace préhilbertien,* $A \subset E$.

(i) $E^\perp = \{0\}$.

(ii) $A^\perp = \overline{A}^\perp$.

(iii) $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$.

(iv) $A^\perp$ *est un sous-espace vectoriel fermé de* E.

Théorème 4.1.8 (Théorème de Pythagore)**.** *Soit* E *un espace préhilbertien,* $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$*. Si* $x_1, \ldots, x_n$ *sont deux à deux orthogonaux, alors :*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2\,.$$

4.2 Espaces de Hilbert

Définition 4.2.1 (Espace de Hilbert)**.** *On appelle* espace de Hilbert *tout espace préhilbertien complet.*

Proposition 4.2.2 (Identité du parallélogramme)**.** *Soit E un espace préhilbertien. Alors $\forall (u,v) \in E^2$, $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$.*

Théorème 4.2.3 (Théorème de projection)**.** *Soit H un espace de Hilbert, C un convexe fermé non vide de H. Alors :*

(i) $\forall x \in H,\ \exists! p(x) \in C,\ \|x - p(x)\| = d(x, C)$.

(ii) *L'application $p : H \to C$ ainsi définie est 1-lipschitzienne.*

(iii) *Pour $x \in H$, $p(x)$ est caractérisé par :*

$$\forall z \in C,\ \Re\left(\langle x - p(x) \mid z - p(x)\rangle\right) \leqslant 0.$$

Démonstration. (i) *Existence.* Soit $x \in H$. On note $d = d(x, C)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x_n \in C$ t.q. $d^2 \leqslant \|x - x_n\|^2 \leqslant d^2 + \frac{1}{n}$. Pour $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on applique l'identité du parallélogramme (proposition 4.2.2) au couple $(x - x_p, x - x_q)$:

$$\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \underbrace{4\left\|x - \frac{x_p + x_q}{2}\right\|^2}_{\geqslant 4d^2} + \|x_p - x_q\|^2 = 2\left(\|x - x_p\|^2 + \|x - x_q\|^2\right) \leqslant 4d^2 + 2\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right).$$

En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy donc converge vers $p(x) \in C$ (car C est fermé). On a alors $\|x - p(x)\| = d(x, C)$. *Unicité.* Si $\|x - y\| = \|x - y'\| = d(x, C)$, appliquer l'identité du parallélogramme (proposition 4.2.2) au couple $(x - y, x - y')$ pour montrer que $y = y'$. (iii) Soit $z \in C$. Montrer l'inégalité voulue en étudiant $t \in [0,1] \longmapsto \|x - tz - (1-t)p(x)\|^2 - \|x - p(x)\|^2$. (ii) Appliquer (iii). □

Corollaire 4.2.4. *Soit H un espace de Hilbert, F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors :*

$$H = F \oplus F^\perp.$$

De plus :

$$\forall x \in H,\ x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x),$$

où p_F (resp. $p_{F^\perp}$) est la projection sur F (resp. $F^\perp$) fournie par le théorème 4.2.3.

Démonstration. Soit $x \in H$. Montrons que $(x - p_F(x)) \in F^\perp$. Pour cela, soit $z \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a $\forall t \in \mathbb{R},\ \|x - (p_F(x) + t\alpha z)\|^2 - \|x - p_F(x)\|^2 \geqslant 0$. En développant et en faisant tendre $t \to 0^+$ et $t \to 0^-$, obtenir :

$$\Re\left(\langle x - p_F(x) \mid \alpha z\rangle\right) = 0.$$

En particulier, cette égalité s'applique pour $\alpha = 1$ et pour $\alpha = i$. D'où $\langle x - p_F(x) \mid z\rangle = 0$. Donc $(x - p_F(x)) \in F^\perp$. Ainsi :

$$x = \underbrace{p_F(x)}_{\in F \subset F^{\perp\perp}} + \underbrace{(x - p_F(x))}_{\in F^\perp} = \underbrace{p_{F^\perp}(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{(x - p_{F^\perp}(x))}_{\in F^{\perp\perp}}.$$

Or $F^\perp \cap F^{\perp\perp} = \{0\}$ donc on a unicité de la décomposition de x, d'où $x - p_F(x) = p_{F^\perp}(x)$. □

Corollaire 4.2.5. *Soit H un espace de Hilbert.*

(i) *Si F est un sous-espace vectoriel fermé de H, alors $F^{\perp\perp} = F$.*

(ii) *Si G est un sous-espace vectoriel de H, alors $G^{\perp\perp} = \overline{G}$.*

(iii) *Pour $A \subset H$, on a $H = \overline{\mathrm{Vect}(A)} \iff A^\perp = \{0\}$.*

Remarque 4.2.6. *Soit E un espace préhilbertien non complet. Alors il existe un hyperplan fermé H de E t.q. $H^\perp = \{0\}$.*

4.3 Hilbert et formes linéaires

Définition 4.3.1 (Dual topologique)**.** *Soit H un espace de Hilbert. Le dual topologique de H, noté H', est l'espace $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(H, \mathbb{K})$, muni de la norme d'opérateur.*

Théorème 4.3.2 (Théorème de Riesz)**.** *Soit H un espace de Hilbert. On considère :*

$$\Phi : \left| \begin{array}{l} H \longrightarrow H' \\ a \longmapsto \varphi_a : \left| \begin{array}{l} H \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \langle x \mid a \rangle \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Alors Φ est une isométrie bijective.

Démonstration. *Isométrie injective.* Clair. *Surjectivité.* Soit $\varphi \in H'$. Si $\varphi = 0$, alors $\varphi = \Phi(0)$. Sinon, il existe $e \in H$ t.q. $\varphi(e) = 1$. On note $F = \operatorname{Ker} \varphi$. Comme φ est continue, F est un sous-espace vectoriel fermé de H. Selon le corollaire 4.2.4, on a :

$$e = p_F(e) + p_{F^\perp}(e).$$

Comme $p_F(e) \in F = \operatorname{Ker} \varphi$, il vient $\varphi\left(p_{F^\perp}(e)\right) = 1$. On note $k = \|p_{F^\perp}(e)\|$ et on pose $a = \frac{1}{k^2} p_{F^\perp}(e)$. Montrons que $\varphi = \varphi_a$. On a $\varphi(a) = \frac{1}{k^2} = \varphi_a(a)$. Soit alors $x \in H$. On a $\varphi\left(x - k^2\varphi(x)a\right) = 0$ donc $(x - k^2\varphi(x)a) \in \operatorname{Ker} \varphi = F$. Or $a \in \operatorname{Vect}\left(p_{F^\perp}(e)\right) \subset F^\perp$ donc :

$$0 = \left\langle x - k^2\varphi(x)a \mid a \right\rangle = \langle x \mid a \rangle - k^2\varphi(x) \langle a \mid a \rangle = \varphi_a(x) - \varphi(x).$$

Donc $\varphi = \varphi_a$. $\square$

4.4 Bases hilbertiennes

Définition 4.4.1 (Famille orthonormale)**.** *Soit H un espace de Hilbert. On dit que $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in H^A$ est une* famille orthonormale *lorsque :*

$$\forall (\alpha, \beta) \in A^2, \ \langle x_\alpha \mid x_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}.$$

Proposition 4.4.2. *Soit H un espace de Hilbert, et $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in H^A$ une famille orthonormale. Soit $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A} \in \mathbb{K}^A$ une famille presque-nulle. Alors :*

$$\left\| \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha x_\alpha \right\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\lambda_\alpha|^2 .$$

En particulier, $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ est libre.

Définition 4.4.3 (Base hilbertienne)**.** *Soit H un espace de Hilbert, et $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in H^A$ une famille orthonormale. On dit que $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une* base hilbertienne *de H lorsque :*

$$H = \overline{\operatorname{Vect}(x_\alpha, \ \alpha \in A)}.$$

Remarque 4.4.4. *Les bases hilbertiennes d'un espace de Hilbert sont exactement les familles orthonormales maximales.*

5 Topologie générale

5.1 Généralités

Définition 5.1.1 (Espace topologique)**.** *Soit X un ensemble, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$. On dit que $(X, \mathcal{T})$ est un* espace topologique *lorsque les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) $\varnothing \in \mathcal{T}$ *et* $X \in \mathcal{T}$.

(ii) $\mathcal{T}$ *est stable par réunions quelconques.*

(iii) $\mathcal{T}$ *est stable par intersections finies.*

On dit que $\mathcal{T}$ *est la* topologie *de* X. *Les éléments de* $\mathcal{T}$ *sont appelés les* ouverts *de* X.

Définition 5.1.2 (Voisinage). *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique. Pour* $x \in X$ *et* $V \subset X$*, on dit que* V *est un* voisinage *de* x *lorsque* $\exists \mathcal{O} \in \mathcal{T},\ X \in \mathcal{O} \subset V$.

Définition 5.1.3 (Espace séparé). *On dit qu'un espace topologique* $(X, \mathcal{T})$ *est* séparé *(ou* Hausdorff*) lorsque pour tout* $(x, y) \in X^2$ *t.q.* $x \neq y$*, il existe* $(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \in \mathcal{T}^2$ *t.q.* $x \in \mathcal{U}$, $y \in \mathcal{V}$ *et* $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing$.

Remarque 5.1.4. *Tout espace métrique est séparé.*

Proposition 5.1.5. *Dans un espace topologique séparé, les singletons sont des fermés.*

Exemple 5.1.6. *Soit* X *un ensemble possédant au moins deux éléments. On munit* X *de la* topologie grossière $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$. *Alors* X *n'est pas séparé donc pas métrisable.*

Exemple 5.1.7. *On munit* $\mathbb{R}$ *de la topologie* $\mathcal{T} = \{X \subset \mathbb{R},\ (\mathbb{R} \backslash X) \text{ est fini ou dénombrable}\} \cup \{\varnothing\}$. *Alors :*

(i) *Toute suite convergente est stationnaire.*

(ii) *Pour tout* $A \subset \mathbb{R}$*, la limite de toute suite convergente à valeurs dans* A *est dans* A*, même si* A *n'est pas fermée.*

(iii) $\mathbb{R}$ *(muni de* $\mathcal{T}$*) n'est pas métrisable.*

Proposition 5.1.8. *Soit* $(X, \mathcal{T}_X)$ *et* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *deux espaces topologiques On suppose que* Y *est séparé.*

(i) *Soit* $f : A \subset X \to Y$, a *un point d'accumulation de* A. *Alors* f *admet au plus une limite en* a.

(ii) *Soit* $f, g : X \to Y$ *deux fonctions continues. Soit* D *une partie dense de* X *t.q.* $f_{|D} = g_{|D}$. *Alors* $f = g$.

5.2 Constructions de topologies

5.2.1 Topologie induite

Définition 5.2.1 (Topologie induite). *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique,* $A \subset X$. *La* topologie induite $\mathcal{T}_A$ *est la plus petite topologie sur* A *t.q. l'inclusion* $i : A \to X$ *est continue. Autrement dit :*

$$\mathcal{T}_A = \left\{ i^{-1}(\mathcal{O}),\ \mathcal{O} \in \mathcal{T} \right\} = \{A \cap \mathcal{O},\ \mathcal{O} \in \mathcal{T}\}.$$

Remarque 5.2.2. *Si* (X, d) *est un espace métrique et* $A \subset X$*, alors la topologie induite par la topologie de* X *sur* A *est la topologie définie par la métrique* $d_{|A^2}$.

5.2.2 Topologie quotient

Définition 5.2.3 (Topologie quotient). *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique,* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence sur* X. *La* topologie quotient $\mathcal{T}_{X/\mathcal{R}}$ *est la plus grande topologie sur* $X/\mathcal{R}$ *t.q. la projection canonique* $p : X \to X/\mathcal{R}$ *est continue. Autrement dit :*

$$\mathcal{T}_{X/\mathcal{R}} = \left\{ \mathcal{O} \in \mathcal{P}(X/\mathcal{R}),\ p^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T} \right\} = \left\{ \mathcal{O} \in X/\mathcal{R},\ \bigcup_{\omega \in \mathcal{O}} \omega \in \mathcal{T} \right\}.$$

Remarque 5.2.4. *Un quotient d'un espace topologique séparé peut ne pas être séparé.*

Exemple 5.2.5.

(i) $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *(muni de la topologie quotient) est homéomorphe à* $S^1 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.

(ii) *La topologie quotient sur* $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ *est la topologie grossière.*

5.2.3 Topologie produit

Définition 5.2.6 (Topologie produit)**.** *Soit $((X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha))_{\alpha\in A}$ une famille d'espaces topologiques. On considère $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Pour $\alpha \in A$, on note $p_\alpha : X \to X_\alpha$ la projection sur X_α. La* topologie produit *$\mathcal{T}_X$ est la plus petite topologie sur X t.q. pour tout $\alpha \in A$, p_α est continue. Notons :*

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}^{-1}(\mathcal{O}_i),\ n \in \mathbb{N},\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A^n,\ (\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_n) \in \mathcal{T}_{\alpha_1} \times \cdots \times \mathcal{T}_{\alpha_n} \right\}.$$

Alors $\mathcal{T}_X = \{\bigcup_{\mathcal{U}\in B} \mathcal{U},\ B \subset \mathcal{B}\}$. Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}_X$.

Remarque 5.2.7. *Dans un produit d'espaces topologiques, un produit infini d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert. Par exemple, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (vu comme espace produit) n'est pas muni de la topologie discrète, alors que $\{0,1\}$ est muni de la topologie discrète.*

Remarque 5.2.8. *Si $(X_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ sont un nombre fini d'espaces topologiques, alors la topologie produit sur $X = \prod_{k=1}^n X_k$ est la topologie dont une base est :*

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{O}_1 \times \cdots \times \mathcal{O}_n,\ (\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_n) \in \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_n\}.$$

Exemple 5.2.9. *Soit $(E_1, d_1), \ldots, (E_n, d_n)$ un nombre fini d'espaces métriques. Alors la topologie produit sur $E = \prod_{k=1}^n E_k$ est la topologie associée à la métrique suivante :*

$$d : \left| \begin{array}{rcl} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} d_k(x_k, y_k) \end{array} \right. .$$

Exemple 5.2.10. *Soit $((E_k, d_k))_{k\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'espaces métriques. Alors la topologie produit sur $E = \prod_{k\in\mathbb{N}} E_k$ est la topologie associée à la métrique suivante :*

$$d : \left| \begin{array}{rcl} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{2^{k+1}} \min(1, d_k(x_k, y_k)) \end{array} \right. .$$

Exemple 5.2.11. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, A un ensemble. On munit X^A de la topologie produit. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(X^A\right)^{\mathbb{N}}$, $f \in X^A$. Alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$* ssi *$\forall a \in A$, $f_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$. Ainsi, la topologie produit est la topologie de la convergence simple.*

Exemple 5.2.12. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $((Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha))_{\alpha\in A}$ une famille d'espaces topologiques. On note $Y = \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$, muni de la topologie produit. Pour $\alpha \in A$, soit $p_\alpha : Y \to Y_\alpha$ la projection sur Y_α. Alors une fonction $f : X \to Y$ est continue* ssi *$\forall \alpha \in A$, $p_\alpha \circ f$ est continue.*

Exemple 5.2.13. *On munit $X = [0,1]^{]0,1[}$ de la topologie produit. Soit $J \in \mathcal{P}_{\mathrm{f}}(\mathbb{Q}\cap]0,1[)$. On écrit $J = \{r_1, \ldots, r_n\}$ avec $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n < r_{n+1} = 1$. On définit $\varphi_J \in X$ continue et affine par morceaux en posant :*

$$\forall k \in [\![0, n+1]\!],\ \varphi_J(r_k) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall j \in [\![0, n+1[\![,\ \varphi_J\left(\frac{r_k + r_{k+1}}{2}\right) = 1.$$

Comme $\mathcal{P}_f(\mathbb{Q}\cap]0,1[)$ est dénombrable, on peut indexer la famille $(\varphi_J)_{J\in\mathcal{P}_f(\mathbb{Q}\cap]0,1[)}$ par $\mathbb{N}$: on note $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle indexation. Alors :

- (i) *$\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans X (donc X est séparable).*
- (ii) *Plus généralement, tout produit d'espaces séparables indexé par $\mathbb{R}$ est séparable.*
- (iii) *Toute fonction $f \in X$ est valeur d'adhérence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
- (iv) *On note Λ l'ensemble des limites des suites extraites de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors :*
  - (a) *Λ s'injecte dans $\mathbb{R}$ (alors que X est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{R})$).*
  - (b) *Tout élément de Λ est mesurable et d'intégrale $\frac{1}{2}$.*
  - (c) *Tout élément de Λ est continu en tout point d'une partie dense de $]0,1[$.*

6 Compacité

6.1 Généralités

Définition 6.1.1 (Axiome de Borel-Lebesgue)**.** *Soit X un espace topologique. S'équivalent :*

(i) *Pour toute famille $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in A}$ d'ouverts de X t.q. $\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{O}_\alpha = X$, il existe $n\in\mathbb{N}$ et $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in A^n$ t.q. $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_{\alpha_i} = X$.*

(ii) *Pour toute famille $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ de fermés de X t.q. $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha = \varnothing$, il existe $n\in\mathbb{N}$ et $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in A^n$ t.q. $\bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i} = \varnothing$.*

*On dit alors que X vérifie l'*axiome de Borel-Lebesgue.

Définition 6.1.2 (Espace compact)**.** *On dit qu'un espace topologique X est* compact *lorsqu'il vérifie les deux propriétés suivantes :*

(i) *X est séparé.*

(ii) *X vérifie l'axiome de Borel-Lebesgue.*

De plus, si $K\subset X$, on dit que K est une partie compacte *de X lorsque K muni de la topologie induite est un espace topologique compact.*

Remarque 6.1.3. *Soit X un espace topologique séparé et $K\subset X$. Alors K est une partie compacte de X* ssi *pour toute famille $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in A}$ d'ouverts de X t.q. $K\subset\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{O}_\alpha$, il existe $n\in\mathbb{N}$ et $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in A^n$ t.q. $K\subset\bigcup_{i=1}^n\mathcal{O}_{\alpha_i}$.*

Théorème 6.1.4. *Soit X un espace compact, (F_n) une suite décroissante (pour l'inclusion) de fermés non vides de X. Alors :*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing.$$

6.2 Propriétés des espaces compacts

6.2.1 Fermeture

Proposition 6.2.1. *Soit K un espace compact, F un fermé de K. Alors F est une partie compacte de K.*

Proposition 6.2.2. *Soit K une partie compacte d'un espace topologique X séparé. Alors pour tout $x\in X\backslash K$, il existe des ouverts U,V t.q. $K\subset U$, $x\in V$ et $U\cap V=\varnothing$.*

Corollaire 6.2.3. *Soit K une partie compacte d'un espace topologique X séparé. Alors K est un fermé de X.*

6.2.2 Applications continues

Théorème 6.2.4. *Soit K un espace compact et Y un espace topologique séparé. Si $f : K\to Y$ est continue, alors $f(K)$ est une partie compacte de Y.*

Corollaire 6.2.5 (Critère d'homéomorphisme)**.** *Soit K un espace compact et Y un espace topologique séparé. Si $f : K\to Y$ est une bijection continue, alors f est un homéomorphisme.*

6.2.3 Suites

Proposition 6.2.6. *Dans un espace compact, toute suite admet une valeur d'adhérence.*

Démonstration. L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\{x_p,\ p\geqslant n\}}$, ce qui permet de conclure à l'aide du théorème 6.1.4. □

6.2.4 Séparation

Proposition 6.2.7. *Soit A, B deux parties compactes disjointes d'un espace topologique X séparé. Alors il existe des ouverts U, V disjoints t.q. $A \subset U$ et $B \subset V$.*

Exemple 6.2.8. *Soit X un espace topologique séparé et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante (pour l'inclusion) de compacts connexes de X. Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est connexe.*

6.3 Exemples de compacts

Théorème 6.3.1. *Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $[a, b]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. On peut supposer $a < b$. Soit alors $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ t.q. $[a, b] \subset \bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha$. On considère :

$$E = \left\{ x \in [a, b],\ \exists B \in \mathcal{P}_{\mathrm{f}}(A),\ [a, x] \subset \bigcup_{\alpha\in B} \mathcal{O}_\alpha \right\}.$$

Notons que $E \neq \varnothing$ car $a \in E$. On pose donc $s = \sup E$. Montrer d'abord que $s > a$ (en considérant un $\alpha_a \in A$ t.q. $a \in \mathcal{O}_{\alpha_a}$ puis un $\varepsilon_a > 0$ t.q. $]a - \varepsilon_a, a + \varepsilon_a[\subset \mathcal{O}_{\alpha_a}$), puis en déduire que $s = b$ (en considérant un $\alpha_s \in A$ t.q. $s \in \mathcal{O}_{\alpha_s}$ puis un $\varepsilon_s > 0$ t.q. $]s - \varepsilon_s, s + \varepsilon_s[\subset \mathcal{O}_{\alpha_s}$). ☐

Corollaire 6.3.2. *Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés.*

Proposition 6.3.3. *Soit K un espace compact, $f : K \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Proposition 6.3.4. *Un produit quelconque d'espaces topologiques séparés est séparé.*

Théorème 6.3.5. *Un produit fini d'espaces compacts est compact.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'un produit de deux espaces compacts est compact (on conclut ensuite par récurrence). Soit donc $(K, \mathcal{T}_K)$ et $(L, \mathcal{T}_L)$ deux espaces compacts. Soit $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'ouverts de $K \times L$ t.q. $K \times L = \bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha$. Soit $x \in K$. Montrons qu'il existe un ouvert $\mathcal{U}_x$ de K contenant x et un $B \in \mathcal{P}_{\mathrm{f}}(A)$ t.q. $\mathcal{U}_x \times L \subset \bigcup_{\alpha\in B} \mathcal{O}_\alpha$. Pour cela, on pose :

$$\mathcal{E}_x = \{(U, V) \in \mathcal{T}_K \times \mathcal{T}_L,\ x \in U \text{ et } \exists \alpha \in A,\ U \times V \subset \mathcal{O}_\alpha\}.$$

Notons que $\{V \in \mathcal{T}_L,\ \exists U \in \mathcal{T}_U,\ (U, V) \in \mathcal{E}_x\}$ recouvre L. Comme L est un espace compact, il existe $(V_1, \dots, V_n) \in \mathcal{T}_L^n$ et $(U_1, \dots, U_n) \in \mathcal{T}_K^n$ t.q.

$$L = \bigcup_{i=1}^n V_i \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1, n]\!],\ (U_i, V_i) \in \mathcal{E}_x.$$

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\alpha_i \in A$ t.q. $U_i \times V_i \subset \mathcal{O}_{\alpha_i}$. Ainsi, en considérant $\mathcal{U}_x = \bigcap_{i=1}^n U_i$, $\mathcal{U}_x$ est un ouvert contenant x et $\mathcal{U}_x \times L \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_{\alpha_i}$. On a prouvé :

$$\forall x \in K,\ \exists \mathcal{U}_x \in \mathcal{T}_K,\ \exists B \in \mathcal{P}_{\mathrm{f}}(A),\ x \in \mathcal{U}_x \text{ et } \mathcal{U}_x \times L \subset \bigcup_{\alpha\in B} \mathcal{O}_\alpha.$$

Ainsi, $\{\mathcal{U} \in \mathcal{T}_K,\ \exists B \in \mathcal{P}_{\mathrm{f}}(A),\ \mathcal{U} \times L \subset \bigcup_{\alpha\in B} \mathcal{O}_\alpha\}$ est un recouvrement ouvert de K. Il admet donc un sous-recouvrement fini (car K est compact), ce qui permet de conclure. ☐

Théorème 6.3.6. *Les compacts de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ sont les fermés bornés, avec $\|\cdot\|_\infty : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$.*

6.4 Espaces vectoriels normés

Théorème 6.4.1. *Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. En particulier, elles définissent la même topologie.*

Démonstration. Soit $\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ une norme. On note $\nu_0 : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$. ν_0 est une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrons que ν est équivalente à ν_0, ce qui permet de conclure, car l'équivalence des normes est une relation d'équivalence. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \nu(x) = \nu\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|\, \nu(e_i) \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \nu(e_i)\right) \nu_0(x).$$

Ainsi, l'application $\nu : (\mathbb{R}^n, \nu_0) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, |\cdot|)$ est lipschitzienne donc continue. On note alors $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \nu_0(x) = 1\}$. Selon le théorème 6.3.6, Σ est un compact de $(\mathbb{R}^n, \nu_0)$. Comme ν est continue sur Σ, elle y est bornée et atteint ses bornes. Soit donc $(x_-, x_+) \in \Sigma^2$ t.q.

$$\forall x \in \Sigma,\ \nu(x_-) \leqslant \nu(x) \leqslant \nu(x_+).$$

On a $x_- \in \Sigma \subset \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ donc $\nu(x_-) > 0$. On vérifie alors que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \nu(x_-) \cdot \nu_0(x) \leqslant \nu(x) \leqslant \nu(x_+) \cdot \nu_0(x).$$

Donc ν et ν_0 sont équivalentes. □

Corollaire 6.4.2. *Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Corollaire 6.4.3. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors les compacts de E (au sens de n'importe quelle norme) sont les fermés bornés.*

Remarque 6.4.4. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $(e_1, \dots, e_d)$ une base de E de base duale $(e_1^*, \dots, e_d^*)$. Alors une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge dans E (au sens de n'importe quelle norme)* ssi *pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, la suite $(e_i^*(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Proposition 6.4.5. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. Si F est de dimension finie, alors F est fermé dans $(E, \|\cdot\|)$.*

Corollaire 6.4.6. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors $BF(0,1)$ est un compact de E.*

Théorème 6.4.7 (Théorème de Riesz)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Si $BF(0,1)$ est un compact de $(E, \|\cdot\|)$, alors E est de dimension finie.*

Démonstration. On suppose que $\mathcal{B} = BF(0,1)$ est un compact. Notons que $\mathcal{B} \subset \bigcup_{x\in B} B\left(x, \frac{1}{2}\right)$. Donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{B}^n$ t.q. $\mathcal{B} \subset \bigcup_{i=1}^n B\left(x_i, \frac{1}{2}\right)$. On note $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Alors F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, donc un fermé de E. Soit $x \in E$. Montrer par récurrence sur p que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \exists y \in F,\ \|x - y\| \leqslant 2^{-p}.$$

Ainsi, $x \in \overline{F} = F$. Ceci prouve que $E = F$, donc E est de dimension infinie. □

Exemple 6.4.8. *On se place dans $\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2 < +\infty\right\}$, qu'on munit de la norme $\|\cdot\|_2 : u \in \ell^2(\mathbb{N}) \longmapsto \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2}$. On considère le* cube de Hilbert *:*

$$H = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant \frac{1}{n+1}\right\} \subset \ell^2(\mathbb{N}).$$

Alors :

(i) *H est un compact de $(\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$.*

(ii) *H n'est contenu dans aucun sous-espace vectoriel de dimension finie de $\ell^2(\mathbb{N})$.*

6.5 Cas des espaces métriques

Définition 6.5.1 (Espace séquentiellement compact)**.** *Un espace métrique* (E, d) *est dit* séquentiellement compact *lorsque toute suite de* E *admet une valeur d'adhérence. Comme* (E, d) *est métrique, cela équivaut à dire que toute suite de* E *admet une sous-suite convergente.*

Lemme 6.5.2 (Lemme de l'ε de Lebesgue)**.** *Si* (E, d) *est un espace métrique séquentiellement compact et* $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in A}$ *est un recouvrement ouvert de* E*, alors :*

$$\exists\varepsilon > 0,\ \forall x \in E,\ \exists\alpha \in A,\ B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{O}_\alpha.$$

Lemme 6.5.3 (Lemme de paracompacité)**.** *Si* (E, d) *est un espace métrique séquentiellement compact, alors :*

$$\forall\rho > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\,(x_1, \ldots, x_n) \in E^n,\ E = \bigcup_{i=1}^{n} B\,(x_i, \rho)\,.$$

Théorème 6.5.4 (Théorème de Bolzano-Weierstraß)**.** *Soit* (E, d) *un espace métrique. Alors* (E, d) *est compact* ssi (E, d) *est séquentiellement compact.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) Voir proposition 6.2.6. ($\Leftarrow$) Appliquer le lemme de l'ε de Lebesgue (lemme 6.5.2) puis le lemme de paracompacité (lemme 6.5.3). □

Théorème 6.5.5 (Théorème de Heine)**.** *Soit* (K, d) *un espace métrique compact et* (Y, δ) *un espace métrique. Alors toute fonction continue* $f : K \to Y$ *est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \in K$, il existe $\eta_x > 0$ t.q. $f\,(B\,(x, \eta_x)) \subset B\left(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\right)$. On a $K = \bigcup_{x\in K} B\left(x, \frac{\eta_x}{2}\right)$. Comme K est compact, soit donc $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ t.q. $K = \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{\eta_{x_i}}{2}\right)$. Soit $\eta = \min_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\eta_{x_i}}{2} > 0$. Soit $(x, y) \in K^2$ t.q. $d(x, y) < \eta$. Comme $x \in K$, il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ t.q. $d\,(x, x_{i_0}) < \frac{\eta_{x_{i_0}}}{2}$. Et $d(x, y) < \eta \leqslant \frac{\eta_{x_{i_0}}}{2}$ donc $d\,(y, x_{i_0}) < \eta_{x_{i_0}}$. Ainsi :

$$\delta\,(f(x), f(y)) \leqslant \delta\,(f(x), f\,(x_{i_0})) + \delta\,(f\,(x_{i_0})\,, f(y)) < \varepsilon.$$

Donc f est uniformément continue. □

6.6 Ascoli

Définition 6.6.1 (Équicontinuité)**.** *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* (Y, δ) *un espace métrique.*

(i) *Une partie* $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}^0\,(X, Y)$ *est dite* équicontinue *lorsque :*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \forall x \in X,\ \exists V \text{ voisinage de } x,\ \forall f \in \mathcal{F},\ \forall y \in V,\ \delta\,(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

(ii) *Si* (X, d) *est un espace métrique, une partie* $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}^0\,(X, Y)$ *est dite* uniformément équicontinue *lorsque :*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ \forall f \in \mathcal{F},\ \forall(x, y) \in X^2,\ d(x, y) < \eta \Longrightarrow \delta\,(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Proposition 6.6.2. *Si* (K, d) *est un espace métrique compact et* (Y, δ) *un espace métrique, alors toute famille* $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}^0\,(K, Y)$ *équicontinue est uniformément équicontinue.*

Démonstration. Même démonstration que pour le théorème de Heine (théorème 6.5.5). □

Proposition 6.6.3. *Tout espace métrique compact est séparable.*

Démonstration. Soit (K, d) un espace métrique compact. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $n_p \in \mathbb{N}^*$ et $\left(x_1^{(p)}, \ldots, x_{n_p}^{(p)}\right) \in K^{n_p}$ t.q. $K = \bigcup_{i=1}^{n_p} B\left(x_i^{(p)}, \frac{1}{p}\right)$. Montrer alors que $D = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \left\{x_1^{(p)}, \ldots, x_{n_p}^{(p)}\right\}$ est au plus dénombrable et dense dans K. □

Lemme 6.6.4. *Soit* (K, d) *un espace métrique compact et* (Y, δ) *un espace métrique. Soit* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^0(K, Y)^{\mathbb{N}}$ *vérifiant les deux conditions suivantes :*

(i) $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *est équicontinue.*

(ii) $\forall x \in K,\ \exists C_x$ *compact de* Y, $\{f_n(x),\ n \in \mathbb{N}\} \subset C_x$.

Soit D *la partie dénombrable et dense de* K *construite dans la démonstration de la proposition 6.6.3. On suppose* $\left(f_{n|D}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge simplement. Alors* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniformément.*

Démonstration. *Première étape.* Soit $x \in K$. Montrer que $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme c'est une suite à valeurs dans C_x, qui est compact, elle admet une valeur d'adhérence (proposition 6.2.6) donc converge (proposition 3.1.5) vers un $f(x) \in C_x \subset Y$. *Deuxième étape.* Montrer que $f : K \to Y$ est uniformément continue. Ainsi $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{f\}$ est uniformément équicontinue. *Troisième étape.* On a $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ simplement, montrons que la convergence est uniforme. Soit $\varepsilon > 0$, soit $\eta > 0$ de l'uniforme équicontinuité de $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{f\}$ pour $\frac{\varepsilon}{3}$. Par construction de D (c.f. démonstration de la proposition 6.6.3), il existe $F \subset D$ finie t.q. $K = \bigcup_{\omega \in F} B(\omega, \eta)$. Pour $\omega \in F$, $f_n(\omega) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(\omega)$, soit donc $N_\omega \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n > N_\omega$, $\delta(f_n(\omega), f(\omega)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Soit alors $N = \max_{\omega \in F} N_\omega$. Soit maintenant $x \in K$ et $n > N$. Soit $\omega \in F$ t.q. $d(x, \omega) < \eta$. Alors :

$$\delta(f_n(x), f(x)) \leqslant \delta(f_n(x), f_n(\omega)) + \delta(f_n(\omega), f(\omega)) + \delta(f(\omega), f(x)) < \varepsilon.$$

Donc $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ uniformément. □

Théorème 6.6.5 (Théorème d'Arzelà-Ascoli)**.** *Soit* (K, d) *un espace métrique compact et* (Y, δ) *un espace métrique. On munit* $\mathcal{C}^0(K, Y)$ *de la distance* Δ *définie par :*

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}^0(K, Y)^2,\ \Delta(f, g) = \sup_{x \in K} \delta(f(x), g(x)).$$

Δ *est bien définie (et c'est une distance) car* K *est compact. Alors une partie* $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}^0(K, Y)$ *est d'adhérence compacte* ssi *les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) $\mathcal{F}$ *est équicontinue.*

(ii) $\forall x \in K,\ \exists C_x$ *compact de* Y, $\{f(x),\ f \in \mathcal{F}\} \subset C_x$.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Pour $x \in K$, l'application $\phi_x : f \in \mathcal{C}^0(K, Y) \longmapsto f(x) \in Y$ est 1-lipschitzienne donc continue, donc $\phi_x\left(\overline{\mathcal{F}}\right)$ est un compact de Y contenant $\{f(x),\ f \in \mathcal{F}\}$, d'où (ii). Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Comme $\mathcal{F} \subset \bigcup_{f \in \mathcal{F}} B\left(f, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ et $\overline{\mathcal{F}}$ est compact, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{F}^n$ t.q. $\mathcal{F} \subset \bigcup_{i=1}^n B\left(f, \frac{\varepsilon}{3}\right)$. Or $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est un ensemble fini de fonctions uniformément continues, c'est donc un ensemble uniformément équicontinu. En déduire que $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinu, d'où (i). ($\Leftarrow$) Soit D la partie dénombrable et dense de K construite dans la démonstration de la proposition 6.6.3. Soit alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. Par procédé diagonal de Cantor, construire une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q. $\forall x \in D$, $\left(f_{\varphi(n)}(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Selon le lemme 6.6.4, $\left(f_{\varphi(n)}\right)$ converge au sens de $(\mathcal{C}^0(X, Y), \Delta)$. Ceci prouve que toute suite à valeurs dans $\mathcal{F}$ admet une valeur d'adhérence dans $\overline{\mathcal{F}}$. En déduire que toute suite à valeurs dans $\overline{\mathcal{F}}$ admet une valeur d'adhérence dans $\overline{\mathcal{F}}$. Selon le théorème de Bolzano-Weierstraß (théorème 6.5.4), $\overline{\mathcal{F}}$ est compact. □

Exemple 6.6.6. *On se place dans l'espace* $\mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$ *muni de la distance définie dans l'exemple 1.1.4. Alors :*

(i) *Soit* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ *et* $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$. *Alors* $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ ssi *pour tout* $p \in \mathbb{N}$, $f_n^{(p)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} f^{(p)}$ *uniformément.*

(ii) $\mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$ *est complet.*

(iii) *Notons qu'une partie* $B \subset \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$ *est bornée* ssi $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \lambda > 0,\ \lambda B \subset B(0, \varepsilon)$. *Ainsi les fermés bornés de* $\mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$ *sont compacts.*

(iv) *La topologie de* $\mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ *n'est pas une topologie d'espace vectoriel normé.*

Exemple 6.6.7. *Soit* X *un espace topologique et* $x \in X$. *On note* C *la composante connexe de* x *dans* X *et* $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ *l'ensemble des parties à la fois ouvertes et fermées de* X *contenant* x. *Alors :*

(i) $\bigcap_{M\in\mathcal{M}} M \subset C$, *mais l'inclusion peut être stricte.*

(ii) *Si* X *est compact, alors* $\bigcap_{M\in\mathcal{M}} M = C$.

7 Espaces de Baire

7.1 Théorème de Baire

Définition 7.1.1 (Espace de Baire)**.** *Un espace topologique* X *est dit* de Baire *lorsque toute famille dénombrable d'ouverts denses de* X *a une intersection dense dans* X.

Proposition 7.1.2. *Un espace topologique* X *est de Baire* ssi *toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide.*

Lemme 7.1.3. *Soit* X *un espace topologique compact ou un espace métrique,* U *un ouvert non vide de* X. *Alors il existe un ouvert non vide* V *de* X *t.q.* $V \subset \overline{V} \subset U$. *Si* X *est un espace métrique,* V *peut de plus être choisi de diamètre arbitrairement petit.*

Démonstration. Soit $x \in U$ (car $U \neq \varnothing$). Alors $\{x\}$ et $X\backslash U$ sont des fermés disjoints de X. *Premier cas : X compact.* D'après la proposition 6.2.7, il existe des ouverts V et W disjoints t.q. $\{x\} \subset V$ et $X\backslash U \subset W$. Ainsi, $V \subset X\backslash W$, et $X\backslash W$ est fermé donc $\overline{V} \subset X\backslash W \subset U$. Donc $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. *Second cas : X métrique.* Soit $0 < \rho < \frac{1}{2} d(x, X\backslash U)$. On pose $V = B(x,\rho)$ et $W = \bigcup_{y\in X\backslash U} B(y,\rho)$. Alors V et W sont des ouverts disjoints de X, $\{x\} \subset V$ et $X\backslash U \subset W$, ce qui permet de conclure comme précédemment. De plus, $\operatorname{diam} V \leqslant 2\rho$, et ρ peut être choisi arbitrairement petit. □

Lemme 7.1.4. *Soit* (E,d) *un espace métrique complet,* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante de fermés non vides de* E *t.q.* $\operatorname{diam} F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *Alors* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.

Théorème 7.1.5 (Théorème de Baire)**.** *Si* X *est un espace topologique compact ou un espace métrique complet, alors* X *est de Baire.*

Démonstration. Soit $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ouverts denses de X. Soit W un ouvert non vide de X. Il s'agit de montrer que $W \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n\right) \neq \varnothing$. Construisons par récurrence une suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts non vides de X t.q.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+1} \subset \overline{W_{n+1}} \subset W_n \cap \mathcal{O}_n.$$

On pose $W_0 = W$. Après avoir construit $W_0, \ldots, W_n$, on applique le lemme 7.1.3 avec $U = W_n \cap \mathcal{O}_n$ (qui est un ouvert non vide car W_n est un ouvert non vide et $\mathcal{O}_n$ est un ouvert dense). On obtient ainsi un ouvert non vide W_{n+1} t.q. $W_{n+1} \subset \overline{W_{n+1}} \subset W_n \cap \mathcal{O}_n$. Dans le cas où X est métrique, on impose de plus $\operatorname{diam} W_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$. Ainsi, la récurrence se propage et la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est construite. Notons qu'on a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} \subset \overline{W_{n+1}} \subset W_n \subset \overline{W_n}$. Ainsi :

$$W \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n\right) \supset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{W_n}.$$

Il suffit donc de prouver que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{W_n} \neq \varnothing$. Dans le cas où X est un espace topologique compact, c'est une conséquence du théorème 6.1.4 ; dans le cas où X est un espace métrique complet, c'est une conséquence du lemme 7.1.4, car $\operatorname{diam} W_n \leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

7.2 Quelques baireries

Exemple 7.2.1. *Quelques applications du théorème de Baire :*

(i) $[0,1]$ *ne peut pas s'écrire comme réunion disjointe d'un nombre dénombrable de fermés.*

(ii) Théorème de Sunyer i Balaguer. *Soit* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *t.q.*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists k_x \in \mathbb{N},\ f^{(k_x)}(x) = 0.$$

Alors f *est polynomiale.*

(iii) *Tout espace de Baire séparé sans point isolé est indénombrable.*

(iv) *Il n'existe pas de fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dont* $\mathbb{Q}$ *soit l'ensemble des points de continuité.*

(v) *Une limite simple de fonctions continues* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue en tout point d'une partie dense de* $\mathbb{R}$.

(vi) *Dans* $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *(muni de la norme* $\|\cdot\|_\infty$*), l'ensemble des fonctions ayant une dérivée à droite en au moins un point est d'intérieur vide.*

7.3 Applications aux espaces de Banach

Remarque 7.3.1. *Tout espace de Banach est de Baire.*

Proposition 7.3.2. *Soit* E *un espace de Banach de dimension infinie. Alors* E *n'admet pas de base dénombrable.*

Démonstration. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $F_n = \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n)$. Alors F_n est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, donc un fermé de E (selon la proposition 6.4.5). Et F_n est un sous-espace vectoriel strict de E (car E est de dimension infinie), donc $\mathring{F_n} = \varnothing$. Ainsi, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable de fermés d'intérieurs vides de E. Or E est de Baire. Donc $\mathrm{Vect}(e_n,\ n \in \mathbb{N}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide. En particulier, $\mathrm{Vect}(e_n,\ n \in \mathbb{N}) \neq E$. Donc $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas génératrice. Ceci prouve que E n'admet pas de famille génératrice dénombrable (donc pas de base dénombrable). □

Lemme 7.3.3. *Soit* E *un espace de Banach,* F *un espace vectoriel normé. Soit* $\mathscr{E} \subset \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E,F)$ *t.q.*

$$\forall x \in E,\ \exists M_x \in \mathbb{R}_+,\ \forall \psi \in \mathscr{E},\ \|\psi(x)\| \leqslant M_x.$$

Alors :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall \psi \in \mathscr{E},\ \|\psi\| \leqslant M.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $G_n = \bigcap_{\psi\in\mathscr{E}} \psi^{-1}(BF(0,n))$. G_n est un fermé de E. Et, pour $x \in E$, si $n > M_x$, alors $x \in G_n$. Donc :

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n.$$

Donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ n'est pas d'intérieur vide. Comme E est de Baire, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\mathring{G}_{n_0} \neq \varnothing$. Soit donc $x_0 \in G_{n_0}$ et $r_0 > 0$ t.q.

$$B(x_0, r_0) \subset G_{n_0}.$$

On montre alors que $\forall x \in B(0, r_0),\ \forall \psi \in \mathscr{E},\ \|\psi(x)\| \leqslant 2n_0$. On en déduit $\forall \psi \in \mathscr{E},\ \|\psi\| \leqslant \frac{4n_0}{r_0}$. □

Théorème 7.3.4 (Théorème de Banach-Steinhaus)**.** *Soit* E *un espace de Banach,* F *un espace vectoriel normé. On considère une suite* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E,F)^{\mathbb{N}}$ *convergeant simplement vers une fonction* $\varphi \in F^E$. *Alors* $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E,F)$.

Démonstration. La linéarité de φ est une conséquence immédiate de la convergence simple. Montrons que φ est continue. Pour $x \in E$, la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée. On applique donc le lemme 7.3.3 avec $\mathscr{E} = \{\varphi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N},\ \|\varphi_n\| \leqslant M$. Autrement dit :

$$\forall x \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \|\varphi_n(x)\| \leqslant M\,\|x\|\,.$$

À x fixé, on fait tendre $n \to +\infty$. Il vient $\forall x \in E,\ \|\varphi(x)\| \leqslant M\,\|x\|$, donc φ est continue. □

Théorème 7.3.5 (Théorème de l'application ouverte)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach. Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire, continue et surjective. Alors φ est ouverte (i.e. l'image par φ d'un ouvert de E est un ouvert de F).*

Démonstration. Notons que :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\varphi\left(B(0,n)\right)} \supset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi\left(B(0,n)\right) = \varphi\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(0,n)\right) = \varphi(E) = F.$$

Ainsi, $\left(\overline{\varphi\left(B(0,n)\right)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de fermés de F dont la réunion est d'intérieur non vide. Comme F est de Baire, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\overset{\circ}{\overline{\varphi\left(B\left(0,n_0\right)\right)}} \neq \varnothing$. Soit donc $x_0 \in \overline{\varphi\left(B\left(0,n_0\right)\right)}$, $r_0 > 0$ t.q.

$$B\left(x_0,r_0\right) \subset \overline{\varphi\left(B\left(0,n_0\right)\right)}.$$

Comme $B\left(0,n_0\right)$ est convexe et symétrique par rapport à l'origine, $\overline{\varphi\left(B\left(0,n_0\right)\right)}$ l'est aussi. Ainsi, $B\left(-x_0,r_0\right) \subset \overline{\varphi\left(B\left(0,n_0\right)\right)}$, puis $B\left(0,r_0\right) \subset \overline{\varphi\left(B\left(0,n_0\right)\right)}$. On note $k = \frac{n_0}{r_0}$. On a $B\left(0,r_0\right) \subset \overline{\varphi\left(B\left(0,kr_0\right)\right)}$. Par homothétie :

$$\forall r > 0,\ B\left(0,r\right) \subset \overline{\varphi\left(B\left(0,kr\right)\right)}.$$

Soit $r > 0$. Montrons maintenant que $B\left(0,r\right) \subset \varphi\left(B\left(0,2kr\right)\right)$. Pour cela, soit $y \in B\left(0,r\right)$. Par récurrence, on construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|x_n\| < \frac{kr}{2^n} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \|x - \varphi\left(x_0 + \cdots + x_n\right)\| < \frac{r}{2^{n+1}}.$$

Ainsi, la série $\sum x_n$ est absolument convergente dans l'espace de Banach E, donc elle converge vers $s \in E$. Et on a $\|s\| < 2kr$ et $x = \varphi(s) \in \varphi\left(B\left(0,2kr\right)\right)$. Donc :

$$\forall r > 0,\ B\left(0,r\right) \subset \varphi\left(B\left(0,2kr\right)\right).$$

Ceci prouve que l'image par φ d'un voisinage de 0 dans E est un voisinage de 0 dans F. Par linéarité, on en déduit que φ est ouverte. □

Théorème 7.3.6 (Théorème d'isomorphisme de Banach)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach, et $\varphi : E \to F$ un isomorphisme linéaire continu. Alors φ est un homéomorphisme (donc φ^{-1} est un isomorphisme linéaire continu).*

Théorème 7.3.7 (Théorème du graphe fermé)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach, $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors φ est continue* ssi *son graphe $\Gamma_\varphi = \{(x,\varphi(x)),\ x \in E\}$ est un fermé de $E \times F$ (muni de la topologie produit, ou de manière équivalente, de la norme* max*).*

Démonstration. ($\Rightarrow$) Clair (et toujours vrai lorsque E et F sont des espaces métriques et $\varphi \in F^E$). ($\Leftarrow$) On suppose Γ_φ fermé. Comme φ est linéaire, Γ_φ est un sous-espace vectoriel de $E \times F$. Selon la proposition 3.1.7, Γ_φ est un espace de Banach. On note $p_E \in \mathcal{L}_\mathcal{C}(E \times F, E)$, $p_F \in \mathcal{L}_\mathcal{C}\left(E \times F, F\right)$ les projections respectives sur E et F. Alors $p_{E|\Gamma}$ est linéaire, continue et bijective ; c'est donc un homéomorphisme selon le théorème d'isomorphisme de Banach (théorème 7.3.6). Or $\varphi = p_F \circ \left(p_{E|\Gamma}\right)^{-1}$, donc φ est continue. □

Exemple 7.3.8. *On se place dans $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, qu'on munit de $\|\cdot\|_\infty$. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E inclus dans $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On munit F de $\|\cdot\|_1$ définie par :*

$$\forall f \in F,\ \|f\|_1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty .$$

Alors :

(i) *$(F, \|\cdot\|_1)$ est de Banach.*

(ii) *$B = \{f \in F,\ \|f\|_1 \leqslant 1\}$ est un compact de $(F, \|\cdot\|_\infty)$.*

(iii) *Sur F, $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes.*

(iv) *F est de dimension finie.*

8 Généralités de calcul différentiel

8.1 Notion de différentiabilité

Définition 8.1.1 (Différentiabilité)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$, $a \in U$. On dit que f est* différentiable au point a *lorsqu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}_\mathcal{C}(E,F)$ t.q.*

$$\frac{f(x) - f(a) - \varphi(x-a)}{\|x-a\|} \xrightarrow[x \to a]{} 0.$$

L'application φ est alors appelée différentielle de f en a *et notée* $\mathrm{d}f(a)$. *On dit de plus que f est* différentiable sur U *si f est différentiable en tout point de U. On dispose alors d'une application $\mathrm{d}f : U \to \mathcal{L}_\mathcal{C}(E,F)$. On dit que f est $\mathcal{C}^1$ lorsque f est différentiable sur U et $\mathrm{d}f \in \mathcal{C}^0(U, \mathcal{L}_\mathcal{C}(E,F))$.*

Remarque 8.1.2. *Soit F un espace de Banach, U un ouvert de $\mathbb{R}$, $f : U \to F$. Pour $a \in U$, f est différentiable en a* ssi *f est dérivable en a. Dans ce cas :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{d}f(a) \cdot t = t f'(a).$$

8.2 Quelques remarques

Remarque 8.2.1. *Soit E et F deux espaces de Banach. Si on remplace les normes sur E et F par des normes équivalentes, on ne change pas la notion de différentiabilité ni la différentielle d'une fonction.*

Proposition 8.2.2. *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$, $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.*

Démonstration. Cela vient du fait que $\mathrm{d}f(a) \in \mathcal{L}_\mathcal{C}(E,F)$ (et pas seulement $\mathrm{d}f(a) \in \mathcal{L}(E,F)$!). □

Définition 8.2.3 (Dérivées directionnelles)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$, $a \in U$, $h \in E$. On dit que f a une* dérivée directionnelle *en a selon le vecteur h lorsque $t \longmapsto \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$ a une limite en 0 ; cette limite est alors appelée dérivée directionnelle de f en a selon h.*

Proposition 8.2.4. *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$, $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors f admet en a une dérivée directionnelle selon tout vecteur ; de plus, pour tout $h \in E$, $\mathrm{d}f(a) \cdot h$ est la dérivée directionnelle de f en a selon h :*

$$\forall h \in E,\ \mathrm{d}f(a) \cdot h = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}.$$

Corollaire 8.2.5. *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$, $a \in U$. Si $\mathrm{d}f(a)$ existe, alors elle est unique.*

8.3 Règles de calcul

Proposition 8.3.1 (Linéarité)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f, g : U \to F$, $a \in U$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.*

(i) *Si f et g sont différentiables en a, alors $(\lambda f + \mu g)$ aussi, et :*

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda\, \mathrm{d}f(a) + \mu\, \mathrm{d}g(a).$$

(ii) *Si f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur U, alors $(\lambda f + \mu g)$ aussi.*

Proposition 8.3.2 (Composition)**.** *Soit E, F et G trois espaces de Banach, U et V des ouverts respectifs de E et F, $f : U \to F$, $g : V \to G$, $a \in U$. On suppose que $f(U) \subset V$. Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors $(g \circ f)$ est différentiable en a, et :*

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g\left(f(a)\right) \circ \mathrm{d}f(a).$$

8.4 Exemples

Proposition 8.4.1. *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$ une application constante. Alors f est $\mathcal{C}^1$ sur U et $\forall a \in U,\ \mathrm{d}f(a) = 0$.*

Proposition 8.4.2. *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$ une application linéaire continue. Alors f est $\mathcal{C}^1$ sur U et :*

$$\forall a \in U,\ \mathrm{d}f(a) = f.$$

Proposition 8.4.3. *Soit E_1, E_2, F trois espaces de Banach, U un ouvert de $E_1 \times E_2$, $B : U \to F$ une application bilinéaire continue. Alors B est $\mathcal{C}^1$ sur U et :*

$$\forall \left(a_1, a_2\right) \in U,\ \forall \left(h_1, h_2\right) \in E_1 \times E_2,\ \mathrm{d}B\left(a_1, a_2\right) \cdot \left(h_1, h_2\right) = B\left(a_1, h_2\right) + B\left(h_1, a_2\right).$$

Proposition 8.4.4. *Soit $E_1, \ldots, E_p, F$ des espaces de Banach, U un ouvert de $E_1 \times \cdots \times E_p$, $\varphi : U \to F$ une application p-linéaire continue. Alors φ est $\mathcal{C}^1$ sur U et :*

$$\forall \left(a_1, \ldots, a_p\right) \in U,\ \forall \left(h_1, \ldots, h_p\right) \in E_1 \times \cdots \times E_p,$$
$$\mathrm{d}\varphi\left(a_1, \ldots, a_p\right) \cdot \left(h_1, \ldots, h_p\right) = \sum_{i=1}^{p} \varphi\left(a_1, \ldots, a_{i-1}, h_i, a_{i+1}, \ldots, a_p\right).$$

Proposition 8.4.5. *Soit E un espace de Banach, $u \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E, E)$ vérifiant $\|u\| < 1$. Alors $(id_E - u)$ est inversible, et :*

$$\left(id_E - u\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n.$$

Notation 8.4.6. *Étant donnés deux espaces de Banach E et F, on notera :*

$$\mathrm{Isom}(E, F) = \left\{u \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E, F),\ u \text{ inversible}\right\}.$$

Théorème 8.4.7. *Soit E et F deux espaces de Banach. Alors $\mathrm{Isom}(E, F)$ est un ouvert de $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E, F)$. Selon le théorème d'isomorphisme de Banach (théorème 7.3.6), on définit à bon droit :*

$$j : \left| \begin{array}{rcl} \mathrm{Isom}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(F, E) \\ u & \longmapsto & u^{-1} \end{array} \right. .$$

Alors j est différentiable et vérifie :

$$\forall u \in \mathrm{Isom}(E, F),\ \forall h \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E, F),\ \mathrm{d}j(u) \cdot h = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}.$$

8.5 Différentiabilité et espaces produits

Proposition 8.5.1. *Soit $E, F_1, \dots, F_n$ des espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F_1 \times \cdots \times F_n$. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, on note $q_j : F_1 \times \cdots \times F_n \to F_j$ la projection sur F_j. Pour $a \in U$, f est différentiable en a* ssi *pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $(q_j \circ f)$ est différentiable en a. Et on a alors :*

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{d}(q_j \circ f)(a) = q_j \circ \mathrm{d}f(a).$$

Démonstration. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, soit $v_j : x \in F_j \longmapsto (0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0) \in F_1 \times \cdots \times F_n$. Alors les q_j et les v_j sont des applications linéaires continues, ce qui fournit l'équivalence voulue avec la proposition 8.4.2, en utilisant l'égalité $f = \sum_{j=1}^{n} v_j \circ q_j \circ f$. □

Définition 8.5.2 (Différentielles partielles)**.** *Soit $E_1, \dots, E_m, F$ des espaces de Banach, U un ouvert de $E = E_1 \times \cdots \times E_m$, $f : U \to F$. Pour $i \in [\![1, m]\!]$, on pose $u_i : x_i \in E_i \longmapsto (0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0) \in E$. Soit $a = (a_1, \dots, a_m) \in U$. Si l'application $x_i \in E_i \longmapsto f(a + u_i(x_i - a_i)) \in F$ est différentiable en a_i, sa différentielle est appelée i-ième* différentielle partielle *de f en a, et notée $\mathrm{d}_i f(a)$.*

Théorème 8.5.3. *Soit $E_1, \dots, E_m, F$ des espaces de Banach, U un ouvert de $E = E_1 \times \cdots \times E_m$, $f : U \to F$. Soit $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors f admet des différentielles partielles en a, et :*

$$\forall h \in E,\ \mathrm{d}f(a) \cdot h = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{d}_i f(a) \cdot h_i.$$

Remarque 8.5.4. *Soit $E_1, \dots, E_m, F$ des espaces de Banach, U un ouvert de $E = E_1 \times \cdots \times E_m$, $f : U \to F$. Si f est $\mathcal{C}^1$ sur U, alors les différentielles partielles de f sur U sont $\mathcal{C}^0$.*

Exemple 8.5.5. *Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$. On écrit $f = (f_1, \dots, f_n)$. Si f est différentiable en un point $a \in U$, alors chaque f_j est différentiable donc admet des différentielles partielles. On obtient ainsi $(\mathrm{d}_i f_j(a))_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$. Chaque $\mathrm{d}_i f_j(a)$ est un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, et est donc uniquement déterminé par $\mathrm{d}_i f_j(a) \cdot 1$, qu'on note $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}$. Ainsi, en notant $\mathcal{C}_m$ et $\mathcal{C}_n$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$, on a :*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}_m, \mathcal{C}_n}(\mathrm{d}f(a)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R}).$$

8.6 Difféomorphismes

Définition 8.6.1 (Difféomorphisme)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach, U et V des ouverts respectifs de E et F, $f : U \to V$. On dit que f est un* difféomorphisme *(resp. $\mathcal{C}^1$*-difféomorphisme*) de U sur V lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) *f est bijective.*

(ii) *f et f^{-1} sont différentiables (resp. de classe $\mathcal{C}^1$).*

Remarque 8.6.2. *Soit E et F deux espaces de Banach, U et V des ouverts respectifs de E et F, $f : U \to V$. Si f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, alors f est un difféomorphisme ; et si f est un difféomorphisme, alors f est un homéomorphisme.*

Proposition 8.6.3. *Soit E et F deux espaces de Banach, U et V des ouverts respectifs de E et F, $f : U \to V$. On suppose que f est un homéomorphisme de U sur V. Pour $a \in U$, si f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) \in \mathrm{Isom}(E, F)$, alors f^{-1} est différentiable en $f(a)$ et :*

$$\mathrm{d}\left(f^{-1}\right)(f(a)) = [\mathrm{d}f(a)]^{-1}.$$

Démonstration. On note $b = f(a) \in V$. On pose :

$$\varphi : \left| \begin{array}{rcl} (-a) + U & \longrightarrow & (-b) + V \\ h & \longmapsto & f(a+h) - f(a) \end{array} \right. .$$

Alors φ est un homéomorphisme de réciproque $k \longmapsto f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)$. De plus, φ est différentiable en 0 et $\mathrm{d}\varphi(0) = \mathrm{d}f(a)$. *Première étape.* Soit $\varepsilon : (-a) + U \to F$ continue avec $\varepsilon(0) = 0$ t.q.

$$\forall h \in (-a) + U,\ \varphi(h) = \mathrm{d}f(a) \cdot h + \|h\| \, \varepsilon(h).$$

Donc :

$$\forall h \in (-a) + U,\ [\mathrm{d}f(a)]^{-1} \circ \varphi(h) = h + \|h\| \, [\mathrm{d}f(a)]^{-1} \circ \varepsilon(h).$$

Or $[\mathrm{d}f(a)]^{-1}$ est continue selon le théorème d'isomorphisme de Banach (théorème 7.3.6). Donc $[\mathrm{d}f(a)]^{-1} \circ \varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$. Soit donc $\eta > 0$ t.q. $\forall h \in (-a) + U,\ \|h\| < \eta \Longrightarrow \left\| [\mathrm{d}f(a)]^{-1} \circ \varepsilon(h) \right\| < \frac{1}{2}$. Ainsi :

$$\forall h \in (-a) + U,\ \|h\| < \eta \Longrightarrow \frac{1}{2} \|h\| \leqslant \left\| [\mathrm{d}f(a)]^{-1} \circ \varphi(h) \right\| \leqslant \left\| [\mathrm{d}f(a)]^{-1} \right\| \cdot \|\varphi(h)\| .$$

En notant $C = 2 \left\| [\mathrm{d}f(a)]^{-1} \right\|$, on a donc :

$$\forall h \in (-a) + U,\ \|h\| < \eta \Longrightarrow \|h\| \leqslant C \, \|\varphi(h)\| .$$

Deuxième étape. On note $\mathcal{O} = \{k \in (-b) + V,\ \|\varphi^{-1}(k)\| < \eta\}$. Comme φ^{-1} est continue, $\mathcal{O}$ est un voisinage de 0. Et :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathcal{O} \backslash \{0\},\ \frac{\left\| f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b) - [\mathrm{d}f(a)]^{-1} \cdot k \right\|}{\|k\|} &= \frac{\left\| h - [\mathrm{d}f(a)]^{-1} \circ \varphi(h) \right\|}{\|\varphi(h)\|} \qquad \text{où } h = \varphi^{-1}(k) \\ &\leqslant C \cdot \frac{\left\| h - [\mathrm{d}f(a)]^{-1} \circ \varphi(h) \right\|}{\|h\|} \\ &= C \left\| [\mathrm{d}f(a)]^{-1} \circ \varepsilon(h) \right\| \\ &\leqslant C \left\| [\mathrm{d}f(a)]^{-1} \right\| \cdot \|\varepsilon(h)\| \xrightarrow[h \to 0]{} 0. \end{aligned}$$

□

Corollaire 8.6.4. *Soit E et F deux espaces de Banach, U et V des ouverts respectifs de E et F, $f : U \to V$. On suppose que f est un homéomorphisme de U sur V, et que f est différentiable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$). S'équivalent :*

(i) *f est un difféomorphisme (resp. $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme) de U sur V).*

(ii) $\forall x \in U,\ \mathrm{d}f(x) \in \mathrm{Isom}(E, F)$.

Corollaire 8.6.5. *Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, U et V des ouverts respectifs de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$. S'il existe un difféomorphisme de U sur V, alors $m = n$.*

9 Inégalité des accroissements finis

9.1 Inégalité des accroissements finis pour les fonctions de la variable réelle

Théorème 9.1.1 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit F un espace de Banach, $a < b$ des réels. Soit $f : [a, b] \to F$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues. On suppose que f et g sont dérivables à droite en tout point de $]a, b[$ et que :*

$$\forall t \in]a, b[,\ \|f'_d(t)\| \leqslant g'_d(t).$$

Alors :

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant g(b) - g(a).$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On considère :

$$U = \{t \in [a,b],\ \|f(t) - f(a)\| > g(t) - g(a) + \varepsilon(t-a) + \varepsilon\}.$$

U est un ouvert de $[a,b]$. Et il suffit de prouver que $U = \varnothing$. Pour cela, on suppose par l'absurde que $U \neq \varnothing$ et on note $m = \inf U$. On montre d'abord que $m > a$ en utilisant la continuité de f et g en a. Comme U est ouvert dans $[a,b]$ et $m > a$, on a donc $m \notin U$. En particulier, $m \neq b$. Donc $a < m < b$. En utilisant la dérivabilité à droite de f et g en m, construire un $\eta > 0$ t.q. $[m, m+\eta[\subset [a,b] \backslash U$, ce qui contredit la définition de $m = \inf U$. C'est absurde, donc $U = \varnothing$. □

Corollaire 9.1.2. *Soit $a < b$ des réels. Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable à droite en tout point de $]a,b[$ t.q.*

$$\forall t \in]a,b[,\ g'_d(t) \geqslant 0.$$

Alors g est croissante.

Corollaire 9.1.3. *Soit F un espace de Banach, $a < b$ des réels. Soit $f : [a,b] \to F$ continue et dérivable à droite en tout point de $]a,b[$ t.q. il existe $k \in \mathbb{R}_+$ avec :*

$$\forall t \in]a,b[,\ \|f'_d(t)\| \leqslant k.$$

Alors :

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant k(b-a).$$

9.2 Inégalité des accroissements finis

Théorème 9.2.1 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$ différentiable, $(a,b) \in U^2$ t.q. $[a,b] \subset U$. Alors :*

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \left(\sup_{x \in [a,b]} \|\mathrm{d}f(x)\|\right) \cdot \|b-a\|.$$

Démonstration. Appliquer le corollaire 9.1.3 à l'application :

$$\widetilde{f} : t \in [0,1] \longmapsto f\left((1-t)\,a + tb\right) \in F.$$

□

Théorème 9.2.2. *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert convexe de E, $f : U \to F$ différentiable et t.q. il existe $k \in \mathbb{R}_+$ avec :*

$$\forall x \in U,\ \|\mathrm{d}f(x)\| \leqslant k.$$

Alors :

$$\forall (a,b) \in U^2,\ \|f(b) - f(a)\| \leqslant k\,\|b-a\|.$$

Notation 9.2.3. *Soit E un espace vectoriel normé, U un ouvert connexe de E. On définit alors à bon droit, pour $(a,b) \in U^2$:*

$$d_U(a,b) = \inf\left\{\sum_{i=0}^{n-1} \|x_{i+1} - x_i\|,\ n \in \mathbb{N},\ x \in U^{n+1},\ (x_0, x_n) = (a,b),\ \forall i \in [\![0, n-1]\!],\ [x_i, x_{i+1}] \subset U\right\}.$$

Théorème 9.2.4. *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert connexe de E, $f : U \to F$ différentiable et t.q. il existe $k \in \mathbb{R}_+$ avec :*

$$\forall x \in U,\ \|\mathrm{d}f(x)\| \leqslant k.$$

Alors :

$$\forall (a,b) \in U^2,\ \|f(b) - f(a)\| \leqslant k \cdot d_U(a,b).$$

Corollaire 9.2.5. *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert connexe de E, $f : U \to F$ différentiable t.q. $\forall x \in U$, $\mathrm{d}f(x) = 0$. Alors f est constante.*

9.3 Première application

Théorème 9.3.1. *Soit F un espace de Banach, $a < b$ des réels. Soit $f :]a, b[\to F$ dérivable t.q. f' admet une limite ℓ en a^+. Alors f se prolonge par continuité en une fonction $\widetilde{f} : [a, b[\to F$ dérivable à droite en a et vérifiant $\widetilde{f}'_d(a) = \ell$.*

Démonstration. Comme f' admet une limite en a^+, il existe $\eta > 0$ t.q. f' est bornée sur $]a, a + \eta[$. Ainsi, f est lipschitzienne donc uniformément continue sur $]a, a + \eta[$. D'après le théorème de prolongement des applications uniformément continues (théorème 3.4.2), f se prolonge par continuité en une fonction $\widetilde{f} : [a, b[\to F$. Reste à étudier la dérivabilité à droite de $\widetilde{f}$ en a. On considère pour cela :

$$g : t \in]a, b[\longmapsto f(t) - t\ell.$$

Alors g est dérivable et $\forall t \in]a, b[,\ g'(t) = f'(t) - \ell$. Soit alors $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{a^+} g' = 0$, soit $\eta > 0$ t.q.

$$\forall t \in]a, a + \eta[,\ \|g'(t)\| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $t \in]a, a + \eta[$. Soit $a < s < t$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis (corollaire 9.1.3) à g sur le segment $[s, t]$, on obtient $\|g(t) - g(s)\| \leqslant \varepsilon(t - s)$. Autrement dit :

$$\forall s \in]a, t[,\ \left\| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - \ell \right\| \leqslant \varepsilon.$$

En faisant tendre $s \to a$, on a prouvé que $\forall t \in]a, a + \eta[,\ \left\| \frac{\widetilde{f}(t) - \widetilde{f}(a)}{t - a} - \ell \right\| \leqslant \varepsilon$. Donc $\widetilde{f}'_d(a) = \ell$. $\square$

9.4 Deuxième application

Théorème 9.4.1. *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert convexe de E, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions différentiables t.q.*

(i) $\exists a \in U,\ (f_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ *converge.*

(ii) $(\mathrm{d}f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniformément sur U vers $g : U \to \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E, F)$.*

Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : U \to F$; la convergence est uniforme sur toute partie bornée de U ; f est différentiable et $\mathrm{d}f = g$.

Démonstration. La convergence uniforme de $(\mathrm{d}f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fournit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant N,\ \forall q \geqslant N,\ \forall x \in U,\ \|\mathrm{d}(f_p - f_q)(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

Le théorème 9.2.2 fournit alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant N,\ \forall q \geqslant N,\ \forall (x, y) \in U^2,\ \|(f_p - f_q)(x) - (f_p - f_q)(y)\| \leqslant \varepsilon \|x - y\|. \quad (*)$$

En appliquant cela avec $y = a$, on obtient que pour tout $x \in U$, $(f_n(x) - f_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de F donc converge ; or $(f_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, donc $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x) \in F$. En faisant maintenant tendre $q \to +\infty$ dans $(*)$, il vient :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant N,\ \forall x \in U,\ \|(f_p(x) - f_p(a)) - (f(x) - f(a))\| \leqslant \varepsilon \|x - a\|.$$

On en déduit que la convergence est uniforme sur toute partie bornée de U. Reste à étudier la différentiabilité de f en un point $x_0 \in U$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $p \in \mathbb{N}$ vérifiant :

$$\|(f(x) - f(x_0)) - (f_p(x) - f_p(x_0))\| \leqslant \varepsilon \|x - x_0\| \qquad \text{et} \qquad \|\mathrm{d}f_p(x_0) - g(x_0)\| \leqslant \varepsilon.$$

Soit alors $\eta > 0$ t.q. $\forall x \in B(0, \eta),\ \|f_p(x) - f_p(x_0) - \mathrm{d}f_p(x_0) \cdot (x - x_0)\| \leqslant \varepsilon \|x - x_0\|$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in B(0, \eta),\ \|f(x) - f(x_0) - g(x_0) \cdot (x - x_0)\| &\leqslant \|(f(x) - f(x_0)) - (f_p(x) - f_p(x_0))\| \\ &\quad + \|f_p(x) - f_p(x_0) - \mathrm{d}f_p(x_0) \cdot (x - x_0)\| \\ &\quad + \|\mathrm{d}f_p(x_0) - g(x_0)\| \cdot \|x - x_0\| \\ &\leqslant 3\varepsilon \|x - x_0\|. \end{aligned}$$

Donc f est différentiable en x_0 et $\mathrm{d}f(x_0) = g(x_0)$. $\square$

Théorème 9.4.2. *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert connexe de E, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions différentiables t.q.*

(i) $\exists a \in U,\ (f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

(ii) $\exists g \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E,F)^U,\ \forall x \in U,\ \exists \varepsilon_x > 0,\ (\mathrm{d}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers g sur $B(x,\varepsilon_x)$.*

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : U \to F$; la convergence est uniforme sur toute partie bornée de U ; f est différentiable et $\mathrm{d}f = g$.

9.5 Troisième application

Théorème 9.5.1. *Soit $E_1,\dots,E_m,F$ des espaces de Banach, U un ouvert de $E = E_1 \times \cdots \times E_m$, $f : U \to F$. Alors f est $\mathcal{C}^1$ sur U* ssi *pour tout $i \in [\![1,m]\!]$, l'application* $\left| \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E_i,F) \\ a \longmapsto \mathrm{d}_i f(a) \end{array} \right.$ *est bien définie et continue.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) Voir théorème 8.5.3. ($\Leftarrow$) Il suffit de prouver que f est différentiable sur U, car alors la formule du théorème 8.5.3 fournira la continuité de $\mathrm{d}f$. Soit donc $a \in U$. On a :

$$\forall x \in U,\ \left\| f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^{m} \mathrm{d}_i f(a)\cdot(x_i - a_i) \right\|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left\| f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,\dots,x_m) - f(a_1,\dots,a_i,x_{i+1},\dots,x_m) - \mathrm{d}_i f(a)\cdot(x_i-a_i) \right\|}_{M_i(x)}.$$

On fixe $i \in [\![1,m]\!]$. Soit $\eta_i > 0$ t.q. $\forall x \in B(a,\eta_i),\ \|\mathrm{d}_i f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,\dots,x_m) - \mathrm{d}_i f(a)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{m}$. Soit alors $x \in B(a,\eta_i)$. On considère :

$$g : \xi \in B(a_i,\eta_i) \longmapsto f(a_1,\dots,a_{i-1},\xi,x_{i+1},\dots,x_m) - \mathrm{d}_i f(a)\cdot\xi.$$

Alors g est différentiable et :

$$\forall \xi \in B(a_i,\eta_i),\ \|\mathrm{d}g(\xi)\| = \|\mathrm{d}_i f(a_1,\dots,a_{i-1},\xi,x_{i+1},\dots,x_m) - \mathrm{d}_i f(a)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{m}.$$

D'après le théorème 9.2.2 :

$$\forall x \in B(a,\eta_i),\ M_i(x) = \|g(x_i) - g(a_i)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{m}\|x_i - a_i\| \leqslant \frac{\varepsilon}{m}\|x-a\|.$$

Ainsi, si $\|x-a\| < \min_{1\leqslant i\leqslant m}\eta_i$, alors $\|f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^m \mathrm{d}_i f(a)\cdot(x_i-a_i)\| \leqslant \varepsilon\|x-a\|$. D'où le résultat. □

10 Différentielles d'ordres supérieurs

10.1 Généralités

Définition 10.1.1 (Différentielle d'ordre 2)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$, $a \in U$. On dit que f est* deux fois différentiable au point *a lorsqu'il existe un voisinage ouvert V de a t.q. f est différentiable sur V et l'application $\mathrm{d}f : V \to \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E,F)$ est différentiable en a. On note alors :*

$$\mathrm{d}^2 f(a) = \mathrm{d}(\mathrm{d}f)(a) \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E,\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E,F)) \simeq \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E,E,F).$$

On dit que f est deux fois différentiable sur *U lorsque f est deux fois différentiable en tout point de U. On dit que f est de* classe $\mathcal{C}^2$ sur *U lorsque f est deux fois différentiable sur U et $\mathrm{d}^2 f : U \to \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E,\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E,F))$ est continue.*

Définition 10.1.2 (Différentielle d'ordre k)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$, $a \in U$. Par récurrence, on définit la notion de fonction k* fois différentiable au point a *en disant que f est k fois différentiable en a* ssi *il existe un voisinage ouvert V de a t.q. f est $(k-1)$ fois différentiable sur V et l'application $\mathrm{d}^{k-1}f$ est différentiable en a. On note alors $\mathrm{d}^k f(a) = \mathrm{d}\Big(\mathrm{d}^{k-1}f\Big)(a)$. On dit de plus que f est k* fois différentiable sur U *lorsque f est k fois différentiable en tout point de U. On dit que f est de* classe $\mathcal{C}^k$ sur U *lorsque f est k fois différentiable sur U et $\mathrm{d}^k f$ est continue.*

Remarque 10.1.3. *Toute fonction $(k+1)$ fois différentiable sur un ouvert est de classe $\mathcal{C}^k$ sur cet ouvert.*

Définition 10.1.4 (Fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$. S'équivalent :*

(i) *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est k fois différentiable sur U.*

(ii) *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.*

On dit alors que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exemple 10.1.5. *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E.*

(i) *Si $f : U \to F$ est constante, alors f est différentiable et $\mathrm{d}f = 0$, donc f est $\mathcal{C}^\infty$.*

(ii) *Si $f : U \to F$ est linéaire (ou affine) continue, alors f est différentiable et $\mathrm{d}f$ est constante, donc f est $\mathcal{C}^\infty$.*

(iii) *Supposons que $E = E_1 \times \cdots \times E_p$, où $E_1, \ldots, E_p$ sont des espaces de Banach. Soit $f : U \to F$ une application p-linéaire continue. Alors f est différentiable et $\mathrm{d}f$ est $(p-1)$ linéaire continue. Par récurrence, on en déduit que f est $\mathcal{C}^\infty$.*

Proposition 10.1.6. *Soit E, F et G trois espaces de Banach, U et V des ouverts respectifs de E et F, $f : U \to F$, $g : V \to G$, $a \in U$. On suppose que $f(U) \subset V$. Si f est k fois différentiable en a et g est k fois différentiable en $f(a)$, alors $(g \circ f)$ est k fois différentiable en a.*

Exemple 10.1.7. *Soit E et F deux espaces de Banach. On pose :*

$$j : \left| \begin{array}{rcl} \mathrm{Isom}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}_\mathcal{C}(F,E) \\ u & \longmapsto & u^{-1} \end{array} \right. .$$

Alors j est $\mathcal{C}^\infty$.

10.2 Espaces produits

Proposition 10.2.1. *Soit $E, F_1, \ldots, F_n$ des espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F_1 \times \cdots \times F_n$. Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on note $q_j : F_1 \times \cdots \times F_n \to F_j$ la projection sur F_j. Pour $a \in U$, f est k fois différentiable en a* ssi *pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $(q_j \circ f)$ est k fois différentiable en a. Idem en remplaçant "k fois différentiable en a" par "k fois différentiable sur U", "$\mathcal{C}^k$ sur U" ou "$\mathcal{C}^\infty$ sur U".*

Théorème 10.2.2. *Soit $E_1, \ldots, E_m, F$ des espaces de Banach, U un ouvert de $E = E_1 \times \cdots \times E_m$, $f : U \to F$. Alors f est $\mathcal{C}^k$ sur U* ssi *toutes les différentielles partielles de f jusqu'à l'ordre k existent et sont continues.*

10.3 Difféomorphismes

Définition 10.3.1 (Difféomorphismes)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach, U et V des ouverts respectifs de E et F, $f : U \to V$. On dit que f est un k-*difféomorphisme *(resp. $\mathcal{C}^k$-*difféomorphisme*) de U sur V lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) *f est bijective.*

(ii) *f et f^{-1} sont k fois différentiables (resp. de classe $\mathcal{C}^k$).*

Théorème 10.3.2. *Soit E et F deux espaces de Banach, U et V des ouverts respectifs de E et F, $f : U \to V$. On suppose que f est un homéomorphisme k fois différentiable (resp. de classe $\mathcal{C}^k$). Alors f est un k-difféomorphisme (resp. $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme)* ssi

$$\forall a \in U,\ \mathrm{d}f(a) \in \mathrm{Isom}(E, F).$$

10.4 Théorème de Schwarz

Lemme 10.4.1. *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$, $a \in U$. On suppose que f est deux fois différentiable en a et on pose :*

$$A : (h,k) \longmapsto f\,(a+h+k) - f\,(a+h) - f\,(a+k) + f(a).$$

Alors :

$$\frac{(\mathrm{d}^2 f(a)\cdot h)\cdot k - A(h,k)}{\|(h,k)\|^2} \xrightarrow[(h,k)\to 0]{} 0.$$

Démonstration. Soit $r > 0$ t.q. $B(a, 2r) \subset U$. On a :

$$\begin{aligned}\forall (h,k) \in B(0,r),\ &\left\|\left(\mathrm{d}^2 f(a)\cdot h\right)\cdot k - A(h,k)\right\|\\ &\leqslant \underbrace{\|\mathrm{d}f(a+h) - \mathrm{d}f(a) - \mathrm{d}(\mathrm{d}f)(a)\cdot h\|\cdot\|k\|}_{M_1(h,k)} + \underbrace{\|A(h,k) - \mathrm{d}f(a+h)\cdot k + \mathrm{d}f(a)\cdot k\|}_{M_2(h,k)}\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On se donne $0 < \eta_1 < r$ t.q.

$$\forall h \in B\,(0,\eta_1)\,,\ \|\mathrm{d}f(a+h) - \mathrm{d}f(a) - \mathrm{d}(\mathrm{d}f)(a)\cdot h\| \leqslant \varepsilon\,\|h\|\,.$$

Il vient alors $\forall (h,k) \in B\,(0,\eta_1)\,,\ M_1(h,k) \leqslant \varepsilon\,\|(h,k)\|^2$. Soit maintenant $(h,k) \in B\,(0,r)$. On pose :

$$\theta : \xi \in B(0,r) \longmapsto f\,(a+h+\xi) - f\,(a+\xi) - \mathrm{d}f(a+h)\cdot\xi + \mathrm{d}f(a)\cdot\xi.$$

Ainsi, $M_2(h,k) = \theta(k) - \theta(0)$. Or θ est différentiable et :

$$\begin{aligned}\forall \xi \in B\,(0,r)\,,\ \|\mathrm{d}\theta(\xi)\| &\leqslant \left\|\mathrm{d}f(a+h+\xi) - \mathrm{d}f(a) - \mathrm{d}^2 f(a)\cdot(h+\xi)\right\|\\ &\quad + \left\|\mathrm{d}f(a+\xi) - \mathrm{d}f(a) - \mathrm{d}^2 f(a)\cdot\xi\right\| + \left\|\mathrm{d}f(a+h) - \mathrm{d}f(a) - \mathrm{d}^2 f(a)\cdot h\right\|.\end{aligned}$$

On en déduit l'existence de $0 < \eta_2 < \eta_1 < r$ t.q. si $(h,k) \in B\,(0,\eta_2)$, alors $\forall \xi \in B\,(0,\eta_2)\,,\ \|\mathrm{d}\theta(\xi)\| \leqslant \varepsilon$. Donc selon le théorème 9.2.2, $\forall (h,k) \in B\,(0,\eta_2)\,,\ M_2\,(h,k) \leqslant \varepsilon\,\|(h,k)\|^2$, d'où le résultat. $\square$

Théorème 10.4.2 (Théorème de Schwarz)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$, $a \in U$. Si f est deux fois différentiable en a, alors $\mathrm{d}^2 f(a)$ est bilinéaire symétrique, i.e.*

$$\forall (h,k) \in E^2,\ \left(\mathrm{d}^2 f(a)\cdot h\right)\cdot k = \left(\mathrm{d}^2 f(a)\cdot k\right)\cdot h.$$

On notera $\mathrm{d}^2 f(a)\cdot(h,k) = (\mathrm{d}^2 f(a)\cdot h)\cdot k$.

Démonstration. On fixe $(h,k) \in E^2$ et on applique le lemme 10.4.1 aux couples (th, tk) et (tk, th), avec $t \to 0$. Comme $A\,(th, tk) = A\,(tk, th)$, on obtient :

$$\frac{(\mathrm{d}^2 f(a)\cdot h)\cdot k - (\mathrm{d}^2 f(a)\cdot k)\cdot h}{\|(h,k)\|^2} = 0.$$

$\square$

Corollaire 10.4.3. *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$, $a \in U$. Si f est k fois différentiable en a, alors $\mathrm{d}^k f(a)$ est k-linéaire symétrique.*

Corollaire 10.4.4. *Soit F un espace de Banach, U un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $f : U \to F$, $a \in U$. Si f est deux fois différentiable en a, alors :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,m]\!]^2,\ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a).$$

Corollaire 10.4.5. *Soit F un espace de Banach, U un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $f : U \to F$, $a \in U$. Si f est k fois différentiable en a, alors toutes les dérivées partielles de f en a jusqu'à l'ordre k existent et les résultats ne dépendent pas de l'ordre des dérivations.*

Notation 10.4.6 (Multi-indices)**.** *Soit $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{N}^m)^2$.*

(i) *On note $|\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i$.*

(ii) *Pour $x \in \mathbb{R}^m$, on note $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}$.*

(iii) *On note $\alpha! = \prod_{i=1}^m \alpha_i!$.*

(iv) *On note $\alpha \leqslant \beta$ lorsque $\forall i \in [\![1,m]\!]$, $\alpha_i \leqslant \beta_i$.*

(v) *Si $\alpha \leqslant \beta$, on note $\binom{\beta}{\alpha} = \frac{\beta!}{\alpha!(\beta-\alpha)!} = \prod_{i=1}^m \binom{\beta_i}{\alpha_i}$.*

Notation 10.4.7. *Soit F un espace de Banach, U un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $f : U \to F$, $a \in U$. Supposons f k fois différentiable en a. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^m$ t.q. $|\alpha| \leqslant k$, on pose :*

$$\partial^\alpha f(a) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\alpha_m} f(a).$$

11 Formules de Taylor

11.1 Une première formule

Lemme 11.1.1. *Soit F un espace de Banach, U un ouvert de $\mathbb{R}$, $v : U \to F$ $(k+1)$ fois dérivable. On considère :*

$$\Theta_v^k : t \in U \longmapsto \sum_{p=0}^k \frac{(1-t)^p}{p!} v^{(p)}(t) \in F.$$

Alors Θ_v^k est dérivable, et :

$$\forall t \in U,\ \left(\Theta_v^k\right)'(t) = \frac{(1-t)^k}{k!} v^{(k+1)}(t).$$

Corollaire 11.1.2. *Soit F un espace de Banach, U un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $[0,1]$, $v : U \to F$ $(k+1)$ fois dérivable. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\forall t \in [0,1]$, $\left\|v^{(k+1)}(t)\right\| \leqslant M$. Alors :*

$$\left\|v(1) - \sum_{p=0}^k \frac{v^{(p)}(0)}{p!}\right\| \leqslant \frac{M}{(k+1)!}.$$

11.2 Formule de Taylor-Lagrange

Notation 11.2.1. *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$, $a \in U$. Si f est k fois différentiable en a, on note :*

$$P_{f,k,a} : h \in E \longmapsto \sum_{p=0}^k \frac{1}{p!}\, \mathrm{d}^p f(a) \cdot (h, \ldots, h) \in F.$$

Remarque 11.2.2. *Soit F un espace de Banach, U un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $f : U \to F$, $a \in U$. Supposons f k fois différentiable en a. Avec la notation 10.4.7, on a :*

$$\forall h \in E,\ P_{f,k,a}(h) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!} h^\alpha.$$

Théorème 11.2.3 (Formule de Taylor-Lagrange)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$, $a \in U$. Si f est $(k+1)$ fois différentiable sur U et s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\forall x \in U,\ \left\| \mathrm{d}^{k+1} f(x) \right\| \leqslant M$, alors :*

$$\forall h \in E,\ [a, a+h] \subset U \Longrightarrow \|f(a+h) - P_{f,k,a}(h)\| \leqslant M \cdot \frac{\|h\|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Démonstration. Appliquer le corollaire 11.1.2 à $v : t \in [0,1] \longmapsto f(a+th)$. □

11.3 Formule de Taylor-Young

Théorème 11.3.1 (Formule de Taylor-Young)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$, $a \in U$. Si f est k fois différentiable en a, alors il existe une application $r : (-a+U) \to \mathbb{R}_+$ avec $\lim_0 r = 0$ t.q. :*

$$\forall h \in E,\ \|f(a+h) - P_{f,k,a}(h)\| = \|h\|^k r(h).$$

Démonstration. Par récurrence sur k. Pour $k = 1$, c'est la définition de la différentielle. Supposons le théorème prouvé pour $(k-1)$. On pose :

$$\varphi : \xi \in (-a+U) \longmapsto f(a+\xi) - P_{f,k,a}(\xi) \in F.$$

Montrer qu'il existe un voisinage V de 0 t.q. :

$$\forall \xi \in V,\ \mathrm{d}\varphi(\xi) = \mathrm{d}f(a+\xi) - P_{\mathrm{d}f,k-1,a}(\xi).$$

Appliquer alors l'hypothèse de récurrence à $\mathrm{d}f$ pour majorer $\|\mathrm{d}\varphi(\xi)\|$; en déduire le résultat avec l'inégalité des accroissements finis. □

11.4 Extrema

Définition 11.4.1 (Extrema locaux)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$, $a \in U$.*

(i) *On dit que a est un* minimum local *(resp.* minimum local strict*) de f s'il existe un voisinage V de a t.q. $\forall x \in V,\ f(x) \geqslant f(a)$ (resp. $\forall x \in V \setminus \{a\},\ f(x) > f(a)$).*

(ii) *On dit que a est un* maximum local *(resp.* maximum local strict*) de f s'il existe un voisinage V de a t.q. $\forall x \in V,\ f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $\forall x \in V \setminus \{a\},\ f(x) < f(a)$).*

Proposition 11.4.2. *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$, $a \in U$. Si a est un extremum local de f et f est différentiable en a, alors :*

$$\mathrm{d}f(a) = 0.$$

Proposition 11.4.3. *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$, $a \in U$. Si a est un minimum local de f et f est deux fois différentiable en a, alors $\mathrm{d}^2 f(a)$ est une forme bilinéaire positive :*

$$\forall h \in E,\ \mathrm{d}^2 f(a) \cdot (h,h) \geqslant 0.$$

Démonstration. Appliquer la formule de Taylor-Young en a pour $k = 2$. □

Théorème 11.4.4. *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$, $a \in U$. On suppose que f est deux fois différentiable en a, que $\mathrm{d}f(a) = 0$ et que $\mathrm{d}^2 f(a)$ est coercive, i.e.*

$$\exists c > 0,\ \forall h \in E,\ \mathrm{d}^2 f(a) \cdot (h,h) > c \|h\|^2.$$

Alors a est un minimum local strict de f.

Démonstration. Appliquer la formule de Taylor-Young en a pour $k = 2$. □

11.5 Formule de Taylor avec reste intégral

Remarque 11.5.1. *Soit F un espace de Banach et S un segment de $\mathbb{R}$. L'intégrale d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0(S, F)$ peut être définie avec l'intégrale de Lebesgue coordonnée par coordonnée si F est de dimension finie, ou bien avec l'intégrale des fonctions réglées.*

Théorème 11.5.2 (Théorème fondamental de l'analyse)**.** *Soit F un espace de Banach et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to F$ une fonction continue. Alors la fonction*

$$F : x \in I \longmapsto \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

est dérivable et vérifie $F' = f$.

Corollaire 11.5.3. *Soit F un espace de Banach et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Alors :*

$$\forall (a,b) \in I^2,\ f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\ \mathrm{d}t.$$

Théorème 11.5.4 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$, $a \in U$. Si f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur U, alors :*

$$\forall h \in E,\ [a, a+h] \subset U \Longrightarrow f(a+h) - P_{f,k,a}(h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!}\ \mathrm{d}^{k+1} f(a+th) \cdot (h, \cdots, h)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration. Considérer $v : t \in [0,1] \longmapsto f(a+th)$ et appliquer le corollaire 11.5.3 à la fonction Θ_v^k du lemme 11.1.1. □

12 Inversion locale

12.1 Théorème d'inversion locale

Théorème 12.1.1 (Théorème d'inversion locale)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$, $a \in U$. On suppose que :*

(i) *f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, avec $k \in \mathbb{N}^*$.*

(ii) $\mathrm{d}f(a) \in \mathrm{Isom}(E, F)$.

Alors il existe un voisinage ouvert V de a dans U et un voisinage ouvert W de $f(a)$ dans F t.q. $f_{|V} : V \to W$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.

Démonstration. Il suffit de trouver V et W t.q. $f_{|V} : V \to W$ est un homéomorphisme. En effet, comme $\mathrm{Isom}(E,F)$ est un ouvert de $\mathcal{L}_\mathcal{C}(E,F)$ et $\mathrm{d}f$ est continue, on pourra alors supposer que $\mathrm{d}f(V) \subset \mathrm{Isom}(E,F)$ (quitte à restreindre V), et le théorème 10.3.2 fournira le résultat. De plus, quitte à composer à gauche par $\mathrm{d}f(a)^{-1}$, on peut supposer que $F = E$ et que $\mathrm{d}f(a) = id_E$. Montrons que f est localement surjective. Pour y proche de $f(a)$, on cherche un x proche de a t.q. $f(x) = y$, i.e. x est point fixe de $g_y : x \in U \longmapsto x + y - f(x) \in E$. On s'est donc ramené à une recherche de point fixe. On voudrait appliquer le théorème de Banach-Picard (théorème 3.3.2) ; pour cela, notons que :

$$\forall (x, x') \in U^2,\ \|g_y(x) - g_y(x')\| = \|(id_E - f)(x) - (id_E - f)(x')\|.$$

Or $(id_E - f)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U et :

$$\forall x \in U,\ \mathrm{d}(id_E - f)(x) = id_E - \mathrm{d}f(x).$$

En particulier, $\mathrm{d}(id_E - f)(a) = 0$. Comme $\mathrm{d}(id_E - f)$ est $\mathcal{C}^0$, il existe $r > 0$ t.q. $BF(a,r) \subset U$ et :

$$\forall x \in BF(a,r),\ \|\mathrm{d}(id_E - f)(x)\| \leqslant \frac{1}{2}.$$

En appliquant le théorème 9.2.2, il vient :

$$\forall (x, x') \in BF(a,r)^2,\ \|g_y(x) - g_y(x')\| = \|(id_E - f)(x) - (id_E - f)(x')\| \leqslant \frac{1}{2}\|x - x'\|.$$

Ainsi, $g_{y|BF(a,r)}$ est contractante, pour tout $y \in E$ (et r est indépendant de y). On se donne maintenant $y \in B\left(f(a), \frac{r}{2}\right)$. Notons que :

$$\forall x \in BF(a,r),\ \|g_y(x) - a\| \leqslant \|g_y(x) - g_y(a)\| + \|g_y(a) - a\| \leqslant \frac{1}{2}\|x - a\| + \|y - f(a)\| < r.$$

Donc $g_y(BF(a,r)) \subset B(a,r) \subset BF(a,r)$. Et g_y est $\left(\frac{1}{2}\right)$-contractante, $BF(a,r)$ est un complet (car c'est un fermé de E, qui est un Banach), donc d'après le théorème du point fixe à paramètre (théorème 3.3.3), il existe une application continue $h : B\left(f(a), \frac{r}{2}\right) \to BF(a,r)$ t.q. $h(y)$ est point fixe de g_y pour tout $y \in B\left(f(a), \frac{r}{2}\right)$. Ainsi :

$$\forall y \in B\left(f(a), \frac{r}{2}\right),\ f(h(y)) = y.$$

On pose alors $W = B\left(f(a), \frac{r}{2}\right)$ et $V = h(W)$. Comme $g_y(BF(a,r)) \subset B(a,r)$, le point fixe de g_y est dans $B(a,r)$ pour tout $y \in W$. Ainsi, $V = h(W) \subset B(a,r)$. Comme $(id_E - f)$ est contractante sur $V \subset B(a,r)$, $f_{|V}$ est injective. Donc $V = h(W) = f^{-1}(W) \cap B(a,r)$ est un ouvert de U. Donc $f_{|V} : V \to W$ est bijective, continue, de réciproque h continue. C'est donc un homéomorphisme. □

Remarque 12.1.2. *Le théorème d'inversion locale est faux si la fonction est supposée une fois différentiable et non $\mathcal{C}^1$.*

Corollaire 12.1.3. *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et que $\mathrm{d}f(U) \subset \mathrm{Isom}(E,F)$. Alors f est ouverte : l'image d'un ouvert de U par f est un ouvert de F.*

Démonstration. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de U. On se donne $a \in \mathcal{O}$. Il s'agit de montrer que $f(\mathcal{O})$ est un voisinage de $f(a)$. Or $f_{|\mathcal{O}}$ est $\mathcal{C}^k$ et $\mathrm{d}f_{|\mathcal{O}}(a) = \mathrm{d}f(a) \in \mathrm{Isom}(E,F)$. Selon le théorème d'inversion locale (théorème 12.1.1), il existe un voisinage ouvert V de a dans $\mathcal{O}$ et un voisinage ouvert W de $f(a)$ dans F t.q. $f_{|V} : V \to W$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme. Ainsi, $f(a) \in W \subset f(\mathcal{O})$, et W est ouvert, donc $f(\mathcal{O})$ est un voisinage de $f(a)$. □

Corollaire 12.1.4. *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, que f est injective et que $\mathrm{d}f(U) \subset \mathrm{Isom}(E,F)$. Alors $f(U)$ est un ouvert de F et f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U sur $f(U)$.*

12.2 Théorème des fonctions implicites

Théorème 12.2.1 (Théorème des fonctions implicites)**.** *Soit E, F, G trois espaces de Banach, U un ouvert de $E \times F$, $f : U \to G$, $(a,b) \in U$. On suppose que :*

(i) *f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, avec $k \in \mathbb{N}^*$.*

(ii) *$f(a,b) = 0$.*

(iii) *$\mathrm{d}_2 f(a,b) \in \mathrm{Isom}(F,G)$.*

Alors il existe un voisinage ouvert V de (a,b) dans U, un voisinage ouvert W de a dans E et une application $g : W \to F$ de classe $\mathcal{C}^k$ t.q.

$$\{(x,y) \in V,\ f(x,y) = 0\} = \{(x, g(x)),\ x \in W\}.$$

Démonstration. On considère :

$$\varphi : \left| \begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & E \times G \\ (x, y) & \longmapsto & (x, f(x, y)) \end{array} \right. .$$

Alors φ est $\mathcal{C}^k$ et :

$$\forall (h, k) \in E \times F,\ \mathrm{d}\varphi(a, b) \cdot (h, k) = (h, \mathrm{d}_1 f(a, b) \cdot h + \mathrm{d}_2 f(a, b) \cdot k)\,.$$

Donc $\mathrm{d}\varphi(a, b)$ est inversible, d'inverse $(h', k') \longmapsto (h', \mathrm{d}_2 f(a, b)^{-1} [k' - \mathrm{d}_1 f(a, b) \cdot h'])$. De plus, φ est $\mathcal{C}^k$, donc selon le théorème d'inversion locale (théorème 12.1.1), il existe un voisinage ouvert V de (a, b) dans U et un voisinage ouvert Ω de $\varphi(a, b) = (a, 0)$ dans $E \times G$ t.q. $\varphi_{|V} : V \to \Omega$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme. Quitte à restreindre, on peut supposer que $\Omega = W \times W'$, où W est un voisinage ouvert de a dans E et W' est un voisinage ouvert de 0 dans G. On note alors $\pi_F : E \times F \to F$ la projection sur F, et on pose :

$$g : x \in W \longmapsto \pi_F \circ \left(\varphi_{|V}\right)^{-1} (x, 0) \in F.$$

Alors g est de classe $\mathcal{C}^k$ et on a bien $\{(x, y) \in V,\ f(x, y) = 0\} = \{(x, g(x))\,,\ x \in W\}$. □

12.3 Théorème du rang constant

Définition 12.3.1 (Immersion, submersion et rang)**.** *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$, $a \in U$.*

(i) *On dit que f est une* immersion *en a lorsque $\mathrm{d}f(a)$ est injective.*

(ii) *On dit que f est une* submersion *en a lorsque $\mathrm{d}f(a)$ est surjective.*

(iii) *Si E ou F est de dimension finie, on appelle* rang *de f en a le rang de $\mathrm{d}f(a)$.*

Théorème 12.3.2 (Théorème du rang constant)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $f : U \to \mathbb{R}^n$, $a \in U$. On suppose que :*

(i) *f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, avec $k \in \mathbb{N}^*$.*

(ii) *Le rang de f est constant (égal à r) dans un voisinage de a.*

Alors il existe un voisinage ouvert V' de 0 dans $\mathbb{R}^m$, un voisinage ouvert V de a dans U, un voisinage ouvert W' de 0 dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert W de $f(a)$ dans $\mathbb{R}^n$ avec $f(V) \subset W$, et des $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes $\varphi : V' \to V$ et $\psi : W \to W'$ avec $\varphi(0) = a$, $\psi(f(a)) = 0$ t.q.

$$\forall x' \in V',\ (\psi \circ f \circ \varphi)(x') = (x'_1, \ldots, x'_r, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. Comme $\mathrm{rg}\, \mathrm{d}f(a) = r$, il existe des applications linéaires inversibles $P \in GL(\mathbb{R}^m)$ et $Q \in GL(\mathbb{R}^n)$ t.q.

$$\mathcal{M}(Q \circ \mathrm{d}f(a) \circ P) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

où les matrices sont écrites dans les bases canoniques. Notons alors $A : x \longmapsto a + P(x)$, $B : y \longmapsto Q(y - f(a))$. Alors quitte à remplacer f par $B \circ f \circ A$, on peut supposer que $a = 0$, $f(a) = 0$, et :

$$\mathcal{M}(\mathrm{d}f(0)) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notons maintenant $f_1, \ldots, f_n$ les composantes de f dans $\mathbb{R}^n$, i.e. $f = (f_1, \ldots, f_n)$. On pose :

$$F : \left| \begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x_1, \ldots, x_m) & \longmapsto & (f_1(x), \ldots, f_r(x), x_{r+1}, \ldots, x_m) \end{array} \right. .$$

Alors F est $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{M}\left(\mathrm{d}F(0)\right) = I_m$. Selon le théorème d'inversion locale (théorème 12.1.1) appliqué à F en 0, il existe des voisinages ouverts V et V' de 0 dans $\mathbb{R}^m$ t.q. $F_{|V} : V \to V'$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme. On pose $\varphi = \left(F_{|V}\right)^{-1} : V' \to V$. Pour $k \in [\![r+1, n]\!]$, on note $h_k = f_k \circ \varphi$. Alors :

$$\forall x' \in V',\ (f \circ \varphi)(x') = \left(x'_1, \ldots, x'_r, h_{r+1}(x'), \ldots, h_n(x')\right).$$

Comme φ est un difféomorphisme, le rang de $(f \circ \varphi)$ en x' est égal au rang de f en $\varphi(x')$ pour tout $x' \in V'$. Quitte à restreindre, on peut supposer que le rang de f est constant égal à r sur V et qu'il existe $R > 0$ t.q. $V' = B(0, R)$. Notons alors que :

$$\forall x' \in V',\ \mathcal{M}\left(\mathrm{d}(f \circ \varphi)(x')\right) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ * & \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x')\right)_{\substack{r+1 \leqslant i \leqslant n \\ r+1 \leqslant j \leqslant m}} \end{bmatrix}$$

Or $\mathrm{d}(f \circ \varphi)(x')$ est de rang r pour tout $x' \in V'$, d'où :

$$\forall x' \in V',\ \forall i \in [\![r+1, m]\!],\ \forall j \in [\![r+1, n]\!],\ \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x') = 0.$$

Comme $V' = B(0, R)$ (qui est convexe), le théorème 9.2.2 fournit :

$$\forall x' \in V',\ \forall j \in [\![r+1, n]\!],\ h_j(x') = h_j(x'_1, \ldots, x'_r, 0, \ldots, 0).$$

On définit donc, pour $j \in [\![r+1, n]\!]$:

$$\widetilde{h}_j : (x'_1, \ldots, x'_r) \in B_{\mathbb{R}^r}(0, R) :\longmapsto h_j(x'_1, \ldots, x'_r, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}.$$

Ainsi :

$$\forall x' \in V',\ (f \circ \varphi)(x') = \left(x'_1, \ldots, x'_r, \widetilde{h}_{r+1}(x'_1, \ldots, x'_r), \ldots, \widetilde{h}_n(x'_1, \ldots, x'_r)\right).$$

On pose alors $W = W' = B_{\mathbb{R}^r}(0, R) \times \mathbb{R}^{n-r} \subset \mathbb{R}^n$, et :

$$\psi : (y_1, \ldots, y_n) \in W \longmapsto \left(y_1, \ldots, y_r, y_{r+1} - \widetilde{h}_{r+1}(y_1, \ldots, y_r), \ldots, y_n - \widetilde{h}_n(y_1, \ldots, y_r)\right) \in W'.$$

Ainsi, $\psi : W \to W'$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme et on a bien :

$$\forall x' \in V',\ (\psi \circ f \circ \varphi)(x') = (x'_1, \ldots, x'_r, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

$\square$

Remarque 12.3.3. *Les hypothèses du théorème du rang constant sont vérifiées si f est $\mathcal{C}^k$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$) et* $\operatorname{rg} \mathrm{d}f(a) = n$.