Équations aux Dérivées Partielles

Cours de Paul Vigneaux
Notes de Alexis Marchand

ENS de Lyon
S2 2017-2018
Niveau L3

Table des matières

1 Équations de transport

1.1 Équations différentielles ordinaires (EDO)

Définition 1.1.1 (Champ de vecteurs localement lipschitzien)**.** *Soit $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. On dit que b est* localement lipschitzien *lorsque :*

$$\forall K \text{ compact de } \mathbb{R}^d,\ \exists C_K > 0,\ \forall (x,y) \in K^2,\ \|b(x) - b(y)\| \leqslant C_K \|x - y\|.$$

Définition 1.1.2 (Champ de vecteurs à croissance sous-linéaire)**.** *Soit $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. On dit que b est* à croissance sous-linéaire *lorsque :*

$$\exists C > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \|b(x)\| \leqslant C (1 + \|x\|).$$

Théorème 1.1.3 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)**.** *Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^d$ et $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs localement lipschitzien et à croissance sous-linéaire. Alors le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b(x(t)) \\ x(t_0) = a \end{cases}$$

admet une unique solution globale en temps (définie sur $\mathbb{R}$).

1.2 Équations de transport linéaires

Notation 1.2.1. *Soit $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. On note :*

$$\nabla_x u = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u \\ \vdots \\ \partial_{x_d} u \end{pmatrix}.$$

Définition 1.2.2 (Équation de transport linéaire)**.** *On appelle* équation de transport linéaire *toute équation de la forme*

$$\begin{cases} \partial_t u + b(x) \cdot \nabla_x u = 0 \\ u(0,x) = u^0(x) \end{cases},$$

d'inconnue $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, avec $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $u^0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Remarque 1.2.3. *Une équation de transport linéaire associée au champ de vecteurs b donne un point de vue global de l'EDO $\dot{x}(t) = b(x(t))$.*

Proposition 1.2.4. *Soit $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation de transport linéaire associée au champ de vecteurs b et à la donnée initiale u^0. Alors u est constante le long des trajectoires (i.e. solutions) de l'EDO $\dot{x}(t) = b(x(t))$.*

Démonstration. Soit $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ une solution de $\dot{x}(t) = b(x(t))$. Alors on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t, x(t))) = \partial_t u(t, x(t)) + \dot{x}(t) \cdot \nabla_x u(t, x(t)) = \partial_t u(t, x(t)) + b(x(t)) \cdot \nabla_x u(t, x(t)) = 0.$$

□

Remarque 1.2.5. *Une équation de transport linéaire associée au champ de vecteurs b est linéaire et encode l'ensemble des trajectoires de l'EDO $\dot{x}(t) = b(x(t))$, même si celle-ci est en général non linéaire.*

Définition 1.2.6. *Si (T) est une équation de transport linéaire associée au champ de vecteurs b, on appelle* caractéristiques *de (T) les trajectoires (i.e. solutions) de l'EDO $\dot{x}(t) = b(x(t))$.*

Théorème 1.2.7. *Soit $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ et à croissance sous-linéaire. Soit $c : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $u^0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} \partial_t u + b(x) \cdot \nabla_x u + c(x) u = 0 \\ u(0,x) = u^0(x) \end{cases}$$

admet une solution $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration. *Méthode des caractéristiques.* Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $X(\cdot, x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ définie par :

$$\begin{cases} \partial_t X = b\left(X(t,x)\right) \\ X(0,x) = x \end{cases}.$$

On définit alors :

$$u(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longmapsto u^0\left(X\left(-t,x\right)\right) \exp\left(-\int_0^t c\left(X\left(s-t,x\right)\right) \mathrm{d}s\right).$$

Alors u convient. □

Remarque 1.2.8. *Soit $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la solution du problème de Cauchy fournie par le théorème 1.2.7.*

(i) *Pour $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, la valeur de $u(t,x)$ ne dépend que des valeurs de $u^0(y)$, pour $\|y\| \leqslant \|x\| + \|b\|_{L^\infty} \cdot |t|$.*

(ii) *Si $c = 0$, alors $\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $u(t,x) = u^0\left(X(-t,x)\right)$. En particulier :*

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d,\ \inf_{y \in \mathbb{R}^d} u^0\left(y\right) \leqslant u(t,x) \leqslant \sup_{y \in \mathbb{R}^d} u^0\left(y\right).$$

(iii) *Si $c = 0$ et s'il existe $v \in \mathbb{R}^d$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $b(x) = v$, alors :*

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d,\ u(t,x) = u^0\left(x - vt\right).$$

1.3 Flot d'une EDO

Définition 1.3.1 (Flot d'une EDO)**.** *Soit $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs localement lipschitzien et à croissance sous-linéaire. On appelle* flot *de l'EDO $\dot{x}(t) = b\left(x(t)\right)$ l'application $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ définie par :*

$$\begin{cases} \partial_t X = b\left(X(t,x)\right) \\ X(0,x) = x \end{cases}.$$

Proposition 1.3.2. *Soit $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs localement lipschitzien et à croissance sous-linéaire. Soit X le flot de l'EDO $\dot{x}(t) = b\left(x(t)\right)$. Alors :*

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ X\left(s+t, \cdot\right) = X(s, \cdot) \circ X(t, \cdot).$$

Théorème 1.3.3. *Soit $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs localement lipschitzien et à croissance sous-linéaire. Soit X le flot de l'EDO $\dot{x}(t) = b\left(x(t)\right)$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t, \cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, de réciproque $X(-t, \cdot)$.*

Remarque 1.3.4. *Étant donné $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ et à croissance sous-linéaire et $u^0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, il y a deux points de vue pour construire une solution de l'équation de transport linéaire associée à b et u^0 (on note X le flot de l'EDO $\dot{x}(t) = b\left(x(t)\right)$) :*

(i) Point de vue lagrangien*. On part d'un point $x \in \mathbb{R}^d$ fixé et on suit la trajectoire associée :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ u\left(t, X(t,x)\right) = u^0(x).$$

(ii) Point de vue eulérien. *On se place en un point $x \in \mathbb{R}^d$ fixé et on regarde l'évolution de u :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ u\left(t,x\right) = u^0\left(X\left(-t,x\right)\right).$$

Ces deux points de vue fournissent des solutions de l'équation de transport linéaire.

Notation 1.3.5 (Divergence)**.** *Soit $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une application différentiable en un point $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Alors la* divergence *de b en x_0 est par définition :*

$$\left(\operatorname{div} b\right)\left(x_0\right) = \operatorname{tr}\left(\mathrm{d}b\left(x_0\right)\right) = \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} b_i\left(x_0\right).$$

Lemme 1.3.6. *L'application* $\det : \mathbb{M}_n\left(\mathbb{R}\right) \to \mathbb{R}$ *est différentiable et :*

$$\forall A \in \mathbb{M}_n\left(\mathbb{R}\right),\ \forall H \in \mathbb{M}_n\left(\mathbb{R}\right),\ \mathrm{d}(\det)(A) \cdot H = \operatorname{tr}\left({}^t\!(\operatorname{Com} A)H\right).$$

Ainsi, $\forall A \in GL_n(\mathbb{R}),\ \forall H \in \mathbb{M}_n\left(\mathbb{R}\right),\ \mathrm{d}(\det)(A) \cdot H = (\det A) \cdot \operatorname{tr}\left(A^{-1}H\right)$.

Théorème 1.3.7 (Lemme du jacobien)**.** *Soit $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs localement lipschitzien et à croissance sous-linéaire. Soit $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ le flot de l'EDO $\dot{x}(t) = b\left(x(t)\right)$. On pose :*

$$J : (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longmapsto \det\left(\mathrm{d}_x X(t,x)\right).$$

Alors J vérifie :

$$\begin{cases} \partial_t J = \left(\operatorname{div} b\right)\left(X(t,x)\right) \cdot J(t,x) \\ J(0,x) = 1 \end{cases}.$$

Remarque 1.3.8.

(i) *Dans le lemme du jacobien, J mesure la variation locale des volumes. Dans le cas linéaire, J est le wronskien.*

(ii) *Le lemme du jacobien fournit une autre démonstration du fait que le flot d'une EDO réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.*

1.4 Équation d'advection

Définition 1.4.1 (Fonction densité)**.** *Soit $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs localement lipschitzien et à croissance sous-linéaire. Soit $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ le flot de l'EDO $\dot{x}(t) = b\left(x(t)\right)$. Une* fonction densité *associée à cette EDO est une fonction $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ vérifiant :*

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d,\ \rho\left(t, X(t,x)\right) \cdot \det\left(\mathrm{d}_x X(t,x)\right) = \rho^0(x),$$

avec $\rho^0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Proposition 1.4.2. *Soit $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs localement lipschitzien et à croissance sous-linéaire, et soit $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction densité associée, de condition initiale $\rho^0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Alors ρ vérifie l'*équation d'advection *suivante :*

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_y\left(\rho b\right) = 0 \\ \rho(0,y) = \rho^0(y) \end{cases}.$$

Remarque 1.4.3. *L'équation d'advection peut se réécrire comme une équation de transport avec terme source :*

$$\partial_t \rho + b(y) \cdot \nabla_y \rho = -\left(\operatorname{div} b\right) \cdot \rho(t,y).$$

Proposition 1.4.4. *Soit $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs localement lipschitzien et à croissance sous-linéaire, et soit $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction densité associée, de condition initiale $\rho^0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Si $\rho^0 \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, alors ρ vérifie la loi de conservation suivante :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \int_{\mathbb{R}^d} \rho(t,y)\ \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} \rho^0(y)\ \mathrm{d}y.$$

1.5 Éléments de théorie des distributions

Définition 1.5.1 (Dual topologique)**.** *Soit A un espace vectoriel topologique. Le dual topologique de A est l'espace $A' = \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(A, \mathbb{R}) = \mathcal{L}(A, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$.*

Notation 1.5.2. *Soit A un espace vectoriel normé. On définit le* crochet de dualité $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : A' \times A \to \mathbb{R}$ *par :*

$$\forall (\ell, \varphi) \in A' \times A, \ \langle \ell \mid \varphi \rangle = \ell(\varphi).$$

Proposition 1.5.3. *Soit A et B deux espaces vectoriels normés, $i : A \to B$ une injection continue. Alors l'application :*

$$\left| \begin{array}{l} B' \longrightarrow A' \\ \ \ell \longmapsto \ell \circ i \end{array} \right.$$

est une injection continue. Autrement dit :

$$A \hookrightarrow B \Longrightarrow B' \hookrightarrow A'.$$

*Si de plus $i(A)$ est dense dans B, alors la restriction de $\|\cdot\|_{A'}$ à B' (*via *l'injection continue) est une norme (sinon, ce n'est qu'une semi-norme).*

Exemple 1.5.4. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Si $p \in \,]1, +\infty[$, alors $(L^p(X))' \simeq L^{p'}(X)$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

Définition 1.5.5. *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, on pose :*

$$\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega),$$

i.e. $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact $\Omega \to \mathbb{R}$. On munit $\mathcal{D}(\Omega)$ de la topologie métrique définie comme suit : si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi$ ssi *il existe un compact K contenant les supports de tous les φ_n et t.q. toutes les dérivées partielles (à tout ordre) des φ_n convergent uniformément vers celles de φ sur K.*

Proposition 1.5.6. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.*

(i) $\mathcal{D}(\Omega) \neq \varnothing$.

(ii) *Pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'inclusion $\mathcal{D}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ est continue et son image est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Définition 1.5.7 (Espace des distributions)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On définit l'*espace des distributions *sur Ω par :*

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)'.$$

Les éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$ sont appelés distributions *et les éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ sont appelés* fonctions test*.*

Définition 1.5.8. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.*

(i) Multiplication d'une distribution par une fonction $\mathcal{C}^\infty$. *Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, alors on définit $(T\psi) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \ \langle T\psi \mid \varphi \rangle = \langle T \mid \varphi\psi \rangle.$$

(ii) Dérivée d'une distribution. *Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on définit $T' \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \ \langle T' \mid \varphi \rangle = -\langle T \mid \varphi' \rangle.$$

Exemple 1.5.9. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.*

(i) *Si* $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ *(i.e.* $\forall K$ *compact de* Ω, $f_{|K} \in L^1(K)$*), on associe à* f *la distribution* T_f *définie par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \ \langle T_f \mid \varphi \rangle = \int_\Omega f\varphi \ \mathrm{d}\lambda.$$

(ii) *Si* μ *est une mesure sur* Ω*, on associe à* μ *la distribution* T_μ *définie par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \ \langle T_\mu \mid \varphi \rangle = \int_\Omega \varphi \ \mathrm{d}\mu.$$

(iii) *Si* X *est une variable aléatoire sur* Ω*, on associe à* X *la distribution* T_X *définie par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \ \langle T_X \mid \varphi \rangle = \mathbb{E}(\varphi(X)).$$

On identifiera une fonction et la distribution associée (idem pour les mesures et les variables aléatoires). On appellera alors dérivée au sens des distributions *de* f *la distribution* $(T_f)'$*, à distinguer de la* dérivée au sens presque-partout *de* f*, qui est la dérivée classique.*

Exemple 1.5.10. *On se place sur* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$*.*

(i) *Si* $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$*, alors la dérivée de* f *au sens des distributions coïncide avec sa dérivée au sens presque-partout :* $(T_f)' = T_{f'}$*.*

(ii) *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *et* $H_a = \mathbb{1}_{[a,+\infty[}$ *la* fonction de Heaviside *en* a*. Alors* $H_a' = \delta_a$ *au sens des distributions, où* δ_a *est la mesure de Dirac en* a*. Mais* $H_a' = 0$ *au sens presque-partout.*

Proposition 1.5.11. *Soit* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$*. Si* $T' = 0$*, alors* T *est constante.*

1.6 Solutions faibles de l'équation de transport

Définition 1.6.1 (Solution faible de l'équation de transport)**.** *Soit* $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *et* $u^0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$*. On dit que* $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *est une* solution faible *(ou* solution au sens des distributions*) de l'équation de transport associée au champ de vecteur* b *et à la donnée initiale* u^0 *lorsque :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d\right), \ 0 = -\langle u \mid \partial_t \varphi + \mathrm{div}_x(\varphi b)\rangle - \left\langle u^0(x) \mid \varphi(0,x)\right\rangle.$$

Par intégration par parties, on montre qu'une solution classique de l'équation de transport est aussi solution faible.

Théorème 1.6.2. *Soit* $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *et* $u^0 \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^d\right)$*. Alors l'équation de transport associée au champ de vecteur* b *et à la donnée initiale* u^0 *admet une unique solution faible.*

2 Lois de conservation scalaires

2.1 Lois de conservation scalaires

Définition 2.1.1 (Loi de conservation scalaire)**.** *On appelle* loi de conservation scalaire *une équation de la forme :*

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x (A \circ u) = 0 \\ u(0,x) = u^0(x), \end{cases}$$

d'inconnue $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, où* $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction convexe* $\mathcal{C}^1$ *appelée* flux*, et* $u^0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*.*

Remarque 2.1.2. *Si* u *est* $\mathcal{C}^1$ *et si on note* $a = A'$*, alors la loi de conservation scalaire associée à* A *se réécrit :*

$$\partial_t u + a(u)\partial_x u = 0.$$

Cette écriture montre que l'équation de transport linéaire en dimension 1 *est un cas particulier de loi de conservation scalaire.*

2.2 Méthode des caractéristiques

Remarque 2.2.1. *On considère* $\partial_t u + a(u)\partial_x u = 0$*. Sur les caractéristiques,* u *est constante, donc* $a(u)$ *aussi ; on a donc une équation de transport linéaire à vitesse constante, et les caractéristiques doivent être des droites.*

Proposition 2.2.2. *Soit* $u^0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction* $\mathcal{C}^1$ *bornée et de dérivée bornée. Soit* $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convexe et* $\mathcal{C}^1$ *et* $a = A'$*. On considère la loi de conservation scalaire associée à* A *et* u^0*. Alors ses caractéristiques sont des droites, données par :*

$$y(t,x) = x + t \cdot a\left(u^0(x)\right).$$

En temps court, la solution de la loi de conservation scalaire est donnée par :

$$u\left(t, y(t,x)\right) = u^0(x).$$

Proposition 2.2.3. *Soit* $u^0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction* $\mathcal{C}^1$ *bornée et de dérivée bornée. Soit* $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convexe et* $\mathcal{C}^1$ *et* $a = A'$*. On considère la loi de conservation scalaire associée à* A *et* u^0*. Alors le temps maximal de la solution classique (i.e. de classe* $\mathcal{C}^1$*) est donné par :*

$$T^* = -\frac{1}{\inf_{x\in\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a\left(u^0(x)\right)\right)}.$$

En particulier, si u^0 *croit, alors il n'y a pas de choc pour* $t > 0$ *(autrement dit, la méthode des caractéristiques est valable en temps long).*

2.3 Chocs et solutions faibles

Définition 2.3.1 (Solution faible de la loi de conservation scalaire)**.** *Soit* $u^0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction bornée. Soit* $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convexe et* $\mathcal{C}^1$*. On dit que* $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une* solution faible *de la loi de conservation scalaire associée à* A *et* u^0 *lorsque* u *est bornée et :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\right),\ 0 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(u\partial_t\varphi + A(u)\partial_x\varphi\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} u^0(x)\varphi(0,x)\,\mathrm{d}x.$$

2.3.1 Propagation d'un choc

Proposition 2.3.2. *On considère* $u^0 = u_g \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*} + u_d \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}$*, avec* $u_g > u_d$*. Soit* $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convexe et* $\mathcal{C}^1$*. On pose :*

$$\sigma = \frac{A\left(u_d\right) - A\left(u_g\right)}{u_d - u_g}$$

(cette formule est la relation de Rankine-Hugoniot*). Alors la fonction :*

$$u(t,x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \sigma t \\ u_d & \text{si } x > \sigma t \end{cases}$$

est solution faible de la loi de conservation scalaire associée à A *et* u^0*.*

2.3.2 Onde de détente

Remarque 2.3.3. *On considère* $u^0 = u_g \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*} + u_d \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}$*, avec* $u_g < u_d$*. Soit* $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convexe et* $\mathcal{C}^1$*, avec* $a = A'$*. On cherche une* solution autosimilaire *à la loi de conservation scalaire associée à* A *et* u^0*, i.e. une solution* $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *t.q. il existe une fonction* $\overline{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *t.q.* $\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$*,* $u(t,x) =$

$\overline{u}\left(\frac{x}{t}\right)$. *Si on suppose A strictement convexe (ce qui implique a strictement croissante) et si on note* a^{-1} *la réciproque de a, on a une solution définie par :*

$$\overline{u} : \xi \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} u_g & si\ \xi \leqslant a\left(u_g\right) \\ a^{-1}(\xi) & si\ a\left(u_g\right) \leqslant \xi \leqslant a\left(u_d\right) \\ u_d & si\ \xi \geqslant a\left(u_d\right) \end{cases} .$$

On a un effet régularisant : $u(t,\cdot)$ *est continue pour* $t > 0$.

2.3.3 Non-unicité des solutions faibles

Remarque 2.3.4. *Pour une même loi de conservation scalaire, il peut exister plusieurs solutions faibles. Un moyen de retrouver l'unicité s'inspire de la physique en introduisant la notion de solutions vérifiant un principe d'entropie.*

2.4 Solutions entropiques

Définition 2.4.1 (Entropie)**.** *Soit* $u^0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, soit* $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convexe et* $\mathcal{C}^1$*. On appelle couple* entropie / flux d'entropie *tout couple de fonctions* $(S, \eta) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)^2$ *t.q.*

(i) *Pour toute solution classique u de la loi de conservation scalaire associée à A et* u^0 *:*

$$\partial_t\left(S(u)\right) + \partial_x\left(\eta(u)\right) = 0.$$

(ii) *S est convexe.*

Remarque 2.4.2. *Si* $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction convexe et u une solution de la loi de conservation scalaire associée à A et* u^0*, et si on définit* $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *par* $\eta' = S'A'$*, alors* (S, η) *est un couple entropie / flux d'entropie. Une loi de conservation scalaire admet donc une infinité d'entropies.*

Définition 2.4.3. *Soit* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$*. On dit que* $T \geqslant 0$ *(resp.* $T \leqslant 0$*) au sens faible lorsque* $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\varphi \geqslant 0 \Longrightarrow \langle T \mid \varphi \rangle \geqslant 0$ *(resp.* $\langle T \mid \varphi \rangle \leqslant 0$*).*

Définition 2.4.4 (Solution entropique)**.** *Soit* $u^0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, soit* $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convexe et* $\mathcal{C}^1$*. Une solution faible u de la loi de conservation scalaire associée à A et u est appelée* solution entropique *si pour tout couple entropique* (S, η)*, on a :*

$$\partial_t\left(S(u)\right) + \partial_x\left(\eta(u)\right) \leqslant 0 \quad \textit{au sens faible.}$$

Remarque 2.4.5. *L'entropie (mathématique) est décroissante, contrairement à l'entropie physique qui est croissante.*

Théorème 2.4.6 (Théorème de Kruzkhov)**.** *Soit* $u^0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction bornée. Soit* $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convexe et* $\mathcal{C}^1$*. Alors la loi de conservation scalaire associée à A et* u^0 *admet une unique solution entropique.*

Théorème 2.4.7 (Estimation d'Oleinick)**.** *Soit* $u^0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction bornée. Soit* $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convexe et* $\mathcal{C}^1$*. On suppose de plus que A est uniformément strictement convexe (i.e.* $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $A''(x) \geqslant \alpha$*). Alors l'unique solution entropique u vérifie :*

$$\partial_x u \leqslant \frac{1}{\alpha t} \quad \textit{au sens faible.}$$

Remarque 2.4.8. *L'estimation d'Oleinick traduit un effet régularisant : pour* $t > 0$*, on obtient une solution régulière indépendamment de la condition initiale. Cette estimation exclut donc les chocs pour* $t > 0$.

3 Schémas numériques pour le transport

Notation 3.0.1. *Dans cette section, on s'intéresse à la résolution numérique de l'équation de transport à vitesse constante $a > 0$:*

$$\begin{cases} \partial_t u + a \partial_x u = 0 \\ u(0, x) = u^0(x) \end{cases}.$$

Remarque 3.0.2. *On sait résoudre explicitement l'équation de transport considérée ; sa solution est donnée par :*

$$u(t, x) = u^0(x - at).$$

3.1 Introduction – trois exemples

Notation 3.1.1. *Pour résoudre numériquement l'équation de transport, on* discrétise *l'espace et le temps. On calculera donc $u_i^n = u(t_n, x_i)$ pour $(i, n) \in \{0, \dots, N\} \times \{0, \dots, M\}$, où $x_i = ih$ et $t_n = nk$. $h = \frac{L}{N}$ et $k = \frac{T}{M}$ sont les* pas de discrétisation *respectifs en espace et en temps.*

Remarque 3.1.2. *On peut facilement calculer u^0, en posant par exemple $u_i^0 = u^0(x_i)$. Mais on peut aussi choisir l'approximation par mailles suivante :*

$$u_i^0 = \frac{1}{h} \int_{x_i - \frac{h}{2}}^{x_i + \frac{h}{2}} u^0(x) \, \mathrm{d}x.$$

Exemple 3.1.3. *Trois exemples de schémas :*

(i) Schéma centré. *On fait l'approximation $\partial_x u(t_n, x_i) = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h}$, avec une erreur en $\mathcal{O}(h^2)$. On a alors la relation :*

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \frac{k}{2h} \left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n \right).$$

(ii) Schéma décentré "downwind". *On fait l'approximation $\partial_x u(t_n, x_i) = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}$, avec une erreur en $\mathcal{O}(h)$. On a alors la relation :*

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \frac{k}{h} \left(u_{i+1}^n - u_i^n \right).$$

(iii) Schéma décentré "upwind". *On fait l'approximation $\partial_x u(t_n, x_i) = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h}$, avec une erreur en $\mathcal{O}(h)$. On a alors la relation :*

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \frac{k}{h} \left(u_i^n - u_{i-1}^n \right).$$

Avec $a = 1$, $L = 1$, $T = 1$, $h = 10^{-2}$, $k = 5 \cdot 10^{-3}$ et $u^0(x) = \sin(2\pi x)$, le schéma centré et le schéma décentré "downwind" explosent ; alors que le schéma décentré "upwind" fournit une solution au comportement cohérent avec la solution théorique.

Remarque 3.1.4. *Si on prend $a < 0$, c'est le schéma décentré "downwind" qui fonctionne et le schéma décentré "upwind" qui explose.*

Remarque 3.1.5. *Le fait que le schéma décentré "upwind" fonctionne et pas le schéma décentré "downwind" est lié au sens des caractéristiques.*

3.2 Consistance

Notation 3.2.1. *On considère un schéma de résolution numérique donné par :*

$$u_i^{n+1} = G_k\left(u^n, x_i\right).$$

Définition 3.2.2 (Erreur de consistance)**.** *On appelle* erreur de consistance *du schéma considéré la grandeur suivante :*

$$\mathcal{E} = u\left(t+k, x\right) - G_k\left(u(t,x), x\right),$$

où u est la solution théorique de l'équation de transport considérée.

Définition 3.2.3 (Schéma consistant)**.** *Le schéma étudié est dit* consistant *lorsque :*

$$\left|\frac{\mathcal{E}}{k}\right| \xrightarrow[(h,k)\to 0]{} 0.$$

Si $\left|\frac{\mathcal{E}}{k}\right| = \mathcal{O}\left(k^p\right) + \mathcal{O}\left(h^q\right)$, on dit que la schéma est d'ordre p en temps et q en espace*.*

Proposition 3.2.4. *Le schéma décentré "upwind" est consistant, d'ordre* 1 *en temps et en espace.*

Remarque 3.2.5. *Résoudre l'équation de transport avec le schéma d'Euler explicite décentré "upwind" revient à commettre une erreur à l'ordre* 1 *qui n'est autre qu'une diffusion numérique, i.e. une erreur purement associée au schéma qui va agir comme un opérateur de diffusion sur la solution calculée.*

3.3 Stabilité

Définition 3.3.1 (Schéma stable)**.** *Soit $p \in [1, +\infty]$. Le schéma étudié est dit* L^p-stable *lorsque :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\|u^{n+1}\right\|_{L^p} \leqslant \left\|u^n\right\|_{L^p}.$$

Proposition 3.3.2. *Soit $p \in [1, +\infty]$. Le schéma étudié est L^p-stable* ssi *il existe une constante $C > 0$ et un $\tau_0 \in \mathbb{N}$ t.q.*

$$\left(k \leqslant \tau_0 \text{ et } 0 \leqslant nk \leqslant T\right) \Longrightarrow \left\|G_k^n\right\|_{L^p} \leqslant C.$$

Ceci est vrai dès que $\left\|G_k\right\|_{L^p} \leqslant 1$.

Proposition 3.3.3. *Le schéma décentré "upwind" est L^∞-stable et L^1-stable dès que :*

$$k \leqslant \frac{h}{a}.$$

Cette condition est la condition CLF *(Courant-Lewy-Friedrichs).*

Remarque 3.3.4. *La condition CLF exprime le fait que l'information propagée par le schéma ne doit pas aller plus vite que la vitesse a du problème.*

Remarque 3.3.5. *Le schéma centré et le schéma décentré "downwind" sont instables (pour $a > 0$).*

3.4 Convergence

Définition 3.4.1 (Schéma convergent)**.** *Le schéma étudié est dit* convergent *lorsque toute solution discrète converge vers la solution continue lorsque $(h,k) \to (0,0)$.*

Théorème 3.4.2 (Théorème de Lax)**.** *Un schéma est convergent* ssi *il est consistant et stable.*

4 Introduction aux EDP elliptiques

4.1 Introduction

Définition 4.1.1 (Laplacien)**.** *Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ est deux fois dérivable, on définit le* laplacien *de f par :*

$$\Delta f = \sum_{k=1}^{d} \partial^2_{x_k x_k} f.$$

Définition 4.1.2 (Équation de Laplace)**.** *Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d$ dont le bord est régulier et si f est une fonction régulière sur Ω, on appelle* équation de Laplace *(ou* de Poisson*) l'équation suivante :*

$$-\Delta u = f.$$

On a deux types de conditions limites possibles :

(i) *Conditions* de Dirichlet *homogènes : $\forall x \in \partial\Omega,\ u(x) = 0$.*

(ii) *Conditions* de von Neumann *: $\forall x \in \partial\Omega,\ \vec{n}(x) \cdot \nabla u(x) = 0$, où $\vec{n}(x)$ est la normale à $\partial\Omega$ en x.*

Remarque 4.1.3. *Le laplacien est le seul opérateur d'ordre 2 invariant par changement de base.*

Notation 4.1.4. *On se place dans l'espace X des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ $[0,1] \to \mathbb{R}$ et qui s'annulent en 0 et en 1.*

Définition 4.1.5 (Problème de minimisation de l'énergie potentielle)**.** *Soit $f \in L^1([0,1])$, $k \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $v \in X$, on pose :*

$$E(v) = \frac{k}{2} \int_0^1 |v'(x)|^2 \, \mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)v(x) \, \mathrm{d}x.$$

On considère le problème suivant :

$$E(u) = \min_{v \in X} E(v). \tag{M}$$

Proposition 4.1.6. *Si le problème (M) a une solution, alors elle est unique.*

Démonstration. Cela vient de la stricte convexité de $E : X \to \mathbb{R}$. □

Définition 4.1.7 (Équation d'Euler-Lagrange)**.** *Soit $f \in L^1([0,1])$, $k \in \mathbb{R}_+^*$. On considère le problème suivant :*

$$\forall v \in X,\ k \int_0^1 u'(x)v'(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x) \, \mathrm{d}x. \tag{EL}$$

Proposition 4.1.8. *Toute solution de (M) est solution de (EL).*

Démonstration. Si u est une solution de (M), exprimer la nullité de la dérivée de $t \longmapsto E(u + tv)$ en 0 pour tout $v \in X$. □

Proposition 4.1.9. *Les solutions de (M) sont exactement les solutions de (EL).*

Définition 4.1.10 (Équation de Laplace en dimension 1)**.** *Soit $f \in L^1([0,1])$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$. On considère le problème suivant :*

$$-k\Delta u = f. \tag{EP}$$

Théorème 4.1.11. *On suppose ici que f est continue. Soit u une solution de classe $\mathcal{C}^2$ de (M). Alors u est solution de (EP).*

Démonstration. Utiliser le fait que u est solution de (EL) puis intégrer par parties. □

Remarque 4.1.12. *Sous réserve de régularité des solutions, les problèmes (M), (EL) et (EP) sont en fait équivalents.*

4.2 Vers les espaces de Sobolev

Remarque 4.2.1. *On cherche à résoudre le problème de minimisation* (M) *sur un certain espace* $Y \supset X$ *en trois étapes :*

(i) *Prouver que* $\inf_Y E > -\infty$.

(ii) *Prouver que si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y^{\mathbb{N}}$ *est une suite t.q.* $E(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \inf_Y E$, *alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou une de ses sous-suites converge vers* $u \in Y$ *pour une topologie sur* Y *à préciser. Pour cela, on peut montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy. Pour conclure, il faudra alors que* Y *soit un espace métrique complet.*

(iii) *Prouver que* $E(u) = \inf_Y E$.

Il faut donc choisir un bon espace Y, *qui devra être complet.*

Lemme 4.2.2. *Si* $v \in X$, *alors* $\|v\|_{L^\infty} \leqslant \|v'\|_{L^2}$.

Proposition 4.2.3. $\inf_X E > -\infty$.

Remarque 4.2.4. *Une première idée est de rester dans* X, *et de le munir de* $\|\cdot\|_X$ *définie par :*

$$\forall v \in X,\ \|v\|_X = \|v\|_{L^\infty} + \|v'\|_{L^\infty}.$$

Alors $(X, \|\cdot\|_X)$ *est un espace de Banach, et* $\inf_X E > -\infty$, *mais la suite du raisonnement ne fonctionne pas car* E *n'est pas coercive.*

Définition 4.2.5. *On définit une norme* $\|\cdot\|_{H^1}$ *sur* X *par :*

$$\forall u \in X,\ \|u\|_{H^1} = \sqrt{(\|u\|_{L^2})^2 + (\|u'\|_{L^2})^2}.$$

Lemme 4.2.6 (Inégalité de Young)**.** $\forall \varepsilon > 0,\ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ ab \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2$.

Proposition 4.2.7. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ *est t.q.* $(E(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée, alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* $(X, \|\cdot\|_{H^1})$.

Remarque 4.2.8. *On a rendu* E *coercive. Toutefois, l'espace* $(X, \|\cdot\|_{H^1})$ *ne convient pas car il n'est pas complet ! Il faudra le remplacer par son complété.*

4.3 L'espace de Sobolev H^1

Notation 4.3.1. *Dans la suite, on se place sur un intervalle ouvert borné* $I =]a, b[$.

Définition 4.3.2 (Dérivée faible)**.** *Soit* $u \in L^2(I)$. *On dit qu'une fonction* $g \in L^2(I)$ *est une* dérivée faible *de* u *lorsque :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I),\ \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi.$$

Si g_1 *et* g_2 *sont deux dérivées faibles de* u, *alors* $g_1 = g_2$ *presque-partout. En cas d'existence, la dérivée faible de* u *est donc unique ; on la note* u' *ou* ∇u *ou* $\partial_x u$.

Définition 4.3.3 (H^1)**.** *On appelle* espace de Sobolev $H^1(I)$ *l'espace des (classes d'égalité presque-partout de) fonctions* $u \in L^2(I)$ *admettant une dérivée faible dans* $L^2(I)$. *On munit* $H^1(I)$ *de la norme* $\|\cdot\|_{H^1}$ *définie par :*

$$\forall u \in H^1(I),\ \|u\|_{H^1} = \sqrt{(\|u\|_{L^2})^2 + (\|u'\|_{L^2})^2}.$$

Proposition 4.3.4. *Si* $u \in \mathcal{C}^1\left(\overline{I}\right)$, *alors la dérivée classique de* u *est aussi la dérivée faible. En particulier,* $u \in H^1(I)$, *et on a une injection continue* $\mathcal{C}^1\left(\overline{I}\right) \subset H^1(I)$.

Théorème 4.3.5.

(i) *$H^1(I)$ est un espace de Hilbert.*

(ii) *Si $u \in H^1(I)$ vérifie $u' = 0$ presque-partout, alors u est égale presque-partout à une fonction constante.*

(iii) *Toute fonction continue $u \in H^1(I)$ admet un unique représentant $v \in H^1(I) \cap \mathcal{C}^0\left(\overline{I}\right)$ (au sens où $u = v$ presque-partout) et on a :*

$$\forall (x,y) \in \overline{I}^2,\ v(y) - v(x) = \int_x^y u' = \int_x^y v'.$$

(iv) *$\mathcal{C}^\infty\left(\overline{I}\right)$ est dense dans $H^1(I)$.*

Corollaire 4.3.6. *L'injection $H^1(I) \subset \mathcal{C}^0\left(\overline{I}\right)$ est continue.*

4.4 L'espace de Sobolev H_0^1

Définition 4.4.1 (H_0^1)**.** *On note $H_0^1(I)$ le sous-espace vectoriel fermé de $H^1(I)$ des fonctions qui s'annulent au bord de I.*

Remarque 4.4.2. *La définition ci-dessus de $H_0^1(I)$ a un sens car toute fonction de $H^1(I)$ admet un unique représentant dans $H^1(I) \cap \mathcal{C}^0\left(\overline{I}\right)$, on peut donc parler de ses valeurs aux bords de I.*

Proposition 4.4.3 (Inégalité de Poincaré)**.** $\forall u \in H_0^1(I),\ \|u\|_{L^2} \leqslant |b-a| \cdot \|u'\|_{L^2}$.

Corollaire 4.4.4. *L'application $u \in H_0^1(I) \longmapsto \|u'\|_{L^2}$ définit une norme sur $H_0^1(I)$, équivalente à la restriction à $H_0^1(I)$ de $\|\cdot\|_{H^1}$.*

Théorème 4.4.5. *$\mathcal{D}(I)$ est dense dans $H_0^1(I)$.*

Remarque 4.4.6. *On a :*

$$\mathcal{D}(I) \subset X \subset H_0^1(I).$$

Et $H_0^1(I)$ est l'unique complété (à isométrie près) de $(X, \|\cdot\|_{H^1})$.

4.5 Retour au problème variationnel

Proposition 4.5.1. *Il existe un unique $u \in H_0^1\left(]0,1[\right)$ t.q.*

$$E(u) = \min_{v \in H_0^1(]0,1[)} E(v).$$

Proposition 4.5.2. *(EL) admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^1\left(]0,1[\right)$.*

Démonstration. Considérer un représentant continu d'une solution $u \in H^1\left(]0,1[\right)$ de (M) et montrer que u est en fait $\mathcal{C}^1$. □

Remarque 4.5.3. *Si une solution u de (EL) est continue sur $\overline{I}$, on montre qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\overline{I}$; elle est donc solution classique de (EP).*

4.6 Synthèse – Théorème de Lax-Milgram

Remarque 4.6.1. *Précédemment, on est parti d'un problème physique pour lequel il est naturel de minimiser une fonctionnelle d'énergie. Cela nous a conduit à construire un espace fonctionnel hilbertien dans lequel on obtient une formulation variationnelle. Dans cet espace, on a montré l'existence et l'unicité du minimum. Enfin, sous des hypothèses supplémentaires de régularité de la solution, on a montré qu'elle vérifiait l'EDP initiale avec des conditions aux limites. On voudrait effectuer la démarche dans l'autre sens, i.e. partir de l'EDP et non d'un problème de minimisation de l'énergie. Cette approche est rendue possible par le théorème de Lax-Milgram. La démarche sera la suivante : on part d'une EDP avec conditions aux limites, on détermine un espace fonctionnel* ad hoc *dans lequel on émet une formulation faible, on applique le théorème de Lax-Milgram pour avoir existence et unicité de la solution faible dans cet espace, et enfin on étudie la régularité de la solution : on peut parfois (mais pas toujours) obtenir ainsi une solution classique de l'EDP.*

Théorème 4.6.2 (Théorème de Lax-Milgram)**.** *Soit H un espace de Hilbert et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue. On suppose que a est coercive :*

$$\exists \alpha > 0,\ \forall u \in H,\ a(u,u) \geqslant \alpha \left\| u \right\|_H^2.$$

Alors pour toute forme linéaire $L : H \to \mathbb{R}$, il existe un unique $u \in H$ t.q. $a(u,\cdot) = L$. Si de plus a est symétrique, alors u est l'unique élément de H qui réalise le minimum de la fonctionnelle suivante :

$$E : v \in H \longmapsto \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) \in \mathbb{R}.$$

4.7 Retour sur le principe du maximum

Théorème 4.7.1. *Soit $f \in L^2([0,1])$. Soit $u \in \mathcal{C}^2(]0,1[)$ une solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \\ u(0) = \alpha \text{ et } u(1) = \beta \end{cases}.$$

Alors :

$$\forall x \in]0,1[,\ \min\left(\alpha, \beta, \inf_{[0,1]} f\right) \leqslant u(x) \leqslant \max\left(\alpha, \beta, \sup_{[0,1]} f\right),$$

où inf *et* sup *désignent l'*inf *et le* sup *essentiels (i.e. au sens presque-partout).*

Corollaire 4.7.2. *Soit $f \in L^2([0,1])$. Soit $u \in \mathcal{C}^2(]0,1[)$ comme dans le théorème ci-dessus.*

(i) *Si $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$ et $f \geqslant 0$ presque-partout, alors $u \geqslant 0$.*
(ii) *Si $\alpha = \beta = 0$ et $f \in L^\infty([0,1])$, alors $u \in L^\infty$ et $\left\| u \right\|_{L^\infty} \leqslant \left\| f \right\|_{L^\infty}$.*
(iii) *Si $f = 0$, alors $\left\| f \right\|_{L^\infty} \leqslant \max(\alpha, \beta)$.*

Théorème 4.7.3. *Soit $f \in L^2([0,1])$. Soit $u \in \mathcal{C}^2(]0,1[)$ une solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}.$$

Alors :

$$\forall x \in]0,1[,\ \inf_{[0,1]} f \leqslant u(x) \leqslant \sup_{[0,1]} f,$$

où inf *et* sup *désignent l'*inf *et le* sup *essentiels (i.e. au sens presque-partout).*

4.8 Exemple dans $\mathbb{R}^n$

Théorème 4.8.1 (Formule de Green)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné régulier. Soit $u \in \mathcal{C}^2\left(\overline{\Omega}\right)$, $v \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Alors :*

$$\int_\Omega \Delta u \cdot v = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v \ \mathrm{d}s.$$

Exemple 4.8.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné régulier, soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème :*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}.$$

Alors ce problème admet la formulation faible et la formulation variationnelle suivantes :

(i) *Formulation faible : $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u \cdot v = \int_\Omega f \cdot v$.*

(ii) *Formulation variationnelle : u réalise $\min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left(\frac{1}{2}\int_\Omega \left(\|\nabla v\|^2 + \|v\|^2\right) - \int_\Omega f \cdot v\right)$.*

4.9 Solutions fondamentales

Notation 4.9.1. *On s'intéresse ici à l'*équation de Laplace *en dimension n :*

$$\Delta u = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^n.$$

Les solutions de cette équations sont appelées fonctions harmoniques*.*

Définition 4.9.2 (Solution fondamentale de l'équation de Laplace)**.** *Soit $\alpha(n)$ le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$. Alors la fonction :*

$$\phi : x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \longmapsto \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln|x| & \text{si } n = 2 \\ \frac{|x|^{2-n}}{n(n-2)\alpha(n)} & \text{si } n \geqslant 3 \end{cases},$$

est appelée solution fondamentale de l'équation de Laplace*.*

Théorème 4.9.3. *Soit $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^n)$. On note ϕ la solution fondamentale de l'équation de Laplace en dimension n, et on considère :*

$$u : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y) f(y) \ \mathrm{d}y.$$

Alors u est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie :

$$-\Delta u = f.$$

Remarque 4.9.4.

(i) *Par un principe du maximum, on montre l'unicité des solutions de l'équation de Poisson $-\Delta u = f$.*

(ii) *Les fonctions harmoniques sont en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

5 Discrétisation des problèmes elliptiques

5.1 Différences finies en dimension 1 pour l'équation de Poisson

Notation 5.1.1. *On considère l'équation de Poisson en dimension 1 avec conditions de Dirichlet homogènes :*

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{sur }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}. \tag{EP}$$

5.1.1 Le schéma

Notation 5.1.2. *On discrétise l'intervalle* $[0,1]$ *en posant :*

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1.$$

Pour $i \in \{0,\ldots,n\}$, *on pose* $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$. *Dans le cas d'un maillage uniforme, on a* $\forall i \in \{0,\ldots,n\}\,,\ h_{i+\frac{1}{2}} = h$. *On notera* $(u_i)_{0\leqslant i\leqslant n+1}$ *les valeurs approchées de* $(u\,(x_i))_{0\leqslant i\leqslant n+1}$. *Enfin, on posera* $(f_i)_{0\leqslant i\leqslant n+1} = (f\,(x_i))_{0\leqslant i\leqslant n+1}$.

Définition 5.1.3 (Schéma des différences finies)**.** *On définit le* schéma des différences finies *par* $u_0 = u_{n+1} = 0$ *et :*

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,,\ f_i = -\frac{2}{h_{i+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2}}}\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}}\right).$$

Dans le cas d'un maillage uniforme, cette équation s'écrit sous la forme plus simple suivante :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,,\ f_i = -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}.$$

5.1.2 Propriétés du problème discret

Théorème 5.1.4. *Si on note* $U = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *et* $F = (f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, *le schéma des différences finies s'écrit sous forme matricielle comme suit :*

$$AU = F.$$

La matrice A *est appelée* matrice du laplacien discret *et vérifie les propriétés suivantes :*

(i) A *est tridiagonale.*

(ii) $\forall v \in \mathbb{R}^n,\ Av \geqslant 0 \Longrightarrow v \geqslant 0.$

(iii) A *est inversible et les coefficients de* A^{-1} *sont positifs.*

(iv) A *est symétrique définie positive pour le produit scalaire* $(\cdot \mid \cdot)$ *défini par :*

$$\forall (u,v) \in (\mathbb{R}^n)^2\,,\ (u \mid v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} u_i v_i.$$

Exemple 5.1.5. *Dans le cas d'un maillage uniforme, on a :*

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Corollaire 5.1.6. *Le schéma des différences finies admet une unique solution* $(u_i)_{0\leqslant i\leqslant n+1}$.

5.1.3 Consistance, stabilité et convergence

Définition 5.1.7 (Consistance)**.** *L'*erreur de consistance *pour le schéma des différences finies est définie par :*

$$R = \left(f_i + \frac{2}{h_{i+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2}}}\left[\frac{u\,(x_{i+1}) - u\,(x_i)}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{u\,(x_i) - u\,(x_{i-1})}{h_{i-\frac{1}{2}}}\right]\right)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n,$$

où u *est une solution de* (EP). *On dit que la consistance est d'*ordre p *pour une norme* $\|\cdot\|$ *lorsqu'il existe une constante* $C > 0$ *indépendante du maillage (mais dépendant éventuellement de* f*) t.q.*

$$\|R\| \leqslant Ch^p,$$

avec $h = \sup_{1\leqslant 0\leqslant n} h_{i+\frac{1}{2}}$.

Proposition 5.1.8.

(i) *Le schéma des différences finies pour un maillage quelconque est L^∞-consistant à l'ordre 1. Plus précisément, il existe $C > 0$ t.q.*

$$\|R\|_\infty \leqslant C \left\|u^{(3)}\right\|_\infty h.$$

(ii) *Le schéma des différences finies pour un maillage uniforme est L^∞-consistant à l'ordre 2. Plus précisément, il existe $C > 0$ t.q.*

$$\|R\|_\infty \leqslant C \left\|u^{(4)}\right\|_\infty h^2.$$

Corollaire 5.1.9.

(i) *Le schéma des différences finies pour un maillage quelconque est exact dès que f est constante.*

(ii) *Le schéma des différences finies pour un maillage uniforme est exact dès que f est affine.*

Définition 5.1.10 (Stabilité)**.** *On dit que le schéma des différences finies est* stable *pour une norme $\|\cdot\|$ lorsqu'il existe une constante $C > 0$ indépendante du maillage t.q.*

$$\forall b \in \mathbb{R}^n,\ \left\|A^{-1}b\right\| \leqslant C \|b\|.$$

Proposition 5.1.11.

(i) *Le schéma des différences finies est L^∞-stable et :*

$$\forall b \in \mathbb{R}^n,\ \left\|A^{-1}b\right\|_\infty \leqslant \frac{1}{8} \|b\|_\infty.$$

(ii) *Le schéma des différences finies est L^2-stable et :*

$$\forall b \in \mathbb{R}^n,\ \left\|A^{-1}b\right\|_2 \leqslant \|b\|_2.$$

Proposition 5.1.12. *Le schéma des différences finies est convergent : $U \underset{h\to 0}{\longrightarrow} (u(x_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$, où u est une solution de (EP).*

5.1.4 Commentaires sur le traitement des conditions aux limites

Remarque 5.1.13. *Avec des conditions de Dirichlet non homogènes (i.e. la condition $u(0) = u(1) = 0$ est remplacée par $u(0) = u_g$* et *$u(1) = u_d$), le schéma des différences finies tel qu'on la formulé plus haut s'écrit :*

$$AU = F + G,$$

avec $G = \frac{1}{h^2}(u_g, 0, \dots, 0, u_d)$.

Remarque 5.1.14. *Une autre méthode possible dans le cas des conditions de Dirichlet non homogènes est de changer le vecteur U en $U = (u_i)_{0\leqslant i\leqslant n+1}$. Le schéma s'écrira alors sous la forme $A_{ns}U = F$, où A_{ns} est une matrice non symétrique. On peut vouloir symétriser la matrice pour des raisons de calcul numérique en considérant que $\alpha u_g = \alpha u_0 - \frac{1}{h^2}u_1$ pour α assez grand (idem pour u_d).*

5.2 Méthode des éléments finis

5.2.1 Introduction

Notation 5.2.1. *On change de point du vue et on s'intéresse maintenant au problème* (EL) *:*

$$\forall v \in V,\ \int_\Omega u'v' = \int_\Omega fv. \tag{EL}$$

Notation 5.2.2. *On note* V *l'espace fonctionnel dans lequel on cherche à résoudre* (EL)*. On note* $a : (u,v) \in V^2 \longmapsto \int_\Omega u'v'$ *et* $L : v \in V \longmapsto \int_\Omega fv$*.*

(i) *Il existe un* $w > 0$ *t.q.* $\forall (u,v) \in V^2,\ |a(u,v)| \leqslant w \|u\|_V \|v\|_V$*.*

(ii) *Il existe un* $\lambda > 0$ *t.q.* $\forall v \in V,\ |L(v)| \leqslant \lambda \|v\|_V$*.*

(iii) *Il existe un* $\alpha > 0$ *t.q.* $\forall u \in V,\ |a(u,u)| \geqslant \alpha \|u\|_V^2$*.*

Remarque 5.2.3. *Si* u *est solution de* (EL)*, alors* $\|u\|_V \leqslant \frac{\lambda}{\alpha}$*.*

Méthode 5.2.4 (Méthode de Galerkine)**.** *Pour résoudre numériquement* (EL)*, on remplace* V *par un sous-espace vectoriel* V_h *de dimension finie.* V_h *est induit par un maillage de* Ω *caractérisé par un pas de discrétisation* h*. On dit que* V_h *est un* espace d'approximation*. Le problème* (EL) *est alors approché par :*

$$\forall v_h \in V_h,\ a(u_h, v_h) = L(v_h). \tag{MG}$$

Proposition 5.2.5. (MG) *a une unique solution* u_h *dans* V_h*.*

Notation 5.2.6. *Si* $u \in V$ *est la solution de* (EL) *et* $u_h \in V_h$ *celle de* (MG)*, on note* $e = u - u_h$ *l'*erreur d'approximation*.*

Lemme 5.2.7 (Lemme d'orthogonalité)**.** $\forall v_h \in V_h,\ a(e, v_h) = 0.$

Lemme 5.2.8 (Lemme de Céa)**.** $\|u - u_h\|_V \leqslant \frac{\omega}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$*.*

Remarque 5.2.9. *Si* a *est symétrique, on peut raffiner le lemme de Céa, pour obtenir* $\|u - u_h\|_V \leqslant \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$*.*

Remarque 5.2.10. *Le problème* (MG) *peut se formuler comme un système linéaire* $AU = B$*. La matrice* A *est alors appelée* matrice de rigidité*.*

5.2.2 Mise en œuvre des éléments finis en dimension 1

Notation 5.2.11. *On se place dans le cas où* Ω *est un intervalle ouvert borné* $]a,b[$*. Le maillage considéré est* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$*, de pas* $h = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(x_{i+1} - x_i)$*. Pour* $i \in \{0, \ldots, n\}$*, on note* $h_i = x_{i+1} - x_i$ *et* $K_i = [x_i, x_{i+1}]$*.*

Notation 5.2.12. *On choisit :*

$$V_h^{(1)} = \left\{ v_h \in \mathcal{C}^0\left(\overline{\Omega}\right),\ \forall i \in \{0, \ldots, n\},\ v_{h|K_i} \text{ est affine et } v_h(a) = v_h(b) = 0 \right\} \subset H_0^1(\Omega).$$

Proposition 5.2.13. *Pour* $i \in \{1, \ldots, n\}$*, on pose :*

$$\varphi_i : x \in [a,b] \longmapsto \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & si\ x \in K_{i-1} \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & si\ x \in K_i \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

Alors $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *est une base de* $V_h^{(1)}$*.*

Définition 5.2.14. *On définit l'opérateur d'interpolation* $I_h^{(1)}$ *par :*

$$I_h^{(1)} : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^0\left(\overline{\Omega}\right) & \longrightarrow & V_h^{(1)} \\ v & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v\left(x_i\right)\varphi_i \end{array} \right. .$$

Définition 5.2.15 (H^2)**.** *On note* $H^2(\Omega)$ *l'espace des fonctions* L^2 *admettant une dérivée faible d'ordre* 2*, muni de la norme* $\|\cdot\|_{H^2}$ *définie par :*

$$\forall f \in H^2(\Omega),\ \|u\|_{H^2} = \sqrt{\left(\|u\|_{L^2}\right)^2 + \left(\|u'\|_{L^2}\right)^2 + \left(\|u''\|_{L^2}\right)^2}.$$

Théorème 5.2.16. *Il existe une constante* C *indépendante de* h *t.q.*

(i) $\forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),\ \left\|v - I_h^{(1)} v\right\|_{H^1} \leqslant Ch \|v\|_{H^2}$.

(ii) $\forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),\ \left\|v - I_h^{(1)} v\right\|_{L^2} \leqslant Ch^2 \|v\|_{H^2}$.

Corollaire 5.2.17. *On revient au problème* (EL)*. Si* u *en est la solution dans* $H_0^1(\Omega)$ *et* u_h *la solution du problème en dimension finie dans* $V_h^{(1)}$*, alors il existe une constante* C *indépendante de* h *(mais dépendant* a priori *de* Ω *et* f*) t.q.*

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leqslant Ch.$$

Remarque 5.2.18. *On peut interpoler* v *de manière plus précise à l'aide de fonctions paraboliques par morceaux, à condition que* v *soit suffisamment régulière.*

Remarque 5.2.19. *En dimension* 2*, on peut appliquer la méthode des éléments finis de manière similaire en prenant comme maillage une triangulation de* Ω *(qu'on suppose ici polygonal).*

Références

[1] G. Barles. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi.*

[2] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle.*

[3] M.C. Crandall, H. Ishii, and P.-L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bulletins of the AMS.*

[4] L.C. Evans. *Partial Differential Equations.*

[5] E. Godlewski and P.-A. Raviart. *Hyperbolic systems of conservation laws.*

[6] R.J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws.*

[7] F. Riesz and B. Szőkefalvi-Nagy. *Functional Analysis.*

[8] D. Serre. *Systèmes de lois de conservation.*