Analyse Complexe

Cours de Dietrich Häfner
Notes de Alexis Marchand

ENS de Lyon
S1 2017-2018
Niveau L3

Table des matières

1 Fonctions analytiques et holomorphes

1.1 Séries entières

Définition 1.1.1 (Série dérivée d'une série entière)**.** *Soit $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On appelle* série dérivée *de la série entière $\sum a_n Z^n$ la série entière $\sum (n+1)a_{n+1}Z^n$.*

Proposition 1.1.2. *Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.*

Définition 1.1.3 (Fonction $\mathbb{C}$-dérivable, holomorphe)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$. On dit que f est* $\mathbb{C}$-dérivable *en z_0 lorsque la fonction*

$$p_{z_0} : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{U} \setminus \{z_0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \end{array} \right.$$

admet une limite en z_0. S'il en est ainsi, cette limite est notée $f'(z_0)$ et appelée dérivée *de f en z_0. On dit de plus que f est* holomorphe *sur $\mathcal{U}$ lorsqu'elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de $\mathcal{U}$. L'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathcal{U}$ est noté $\mathcal{H}(\mathcal{U})$.*

Théorème 1.1.4. *Soit $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La fonction somme S de la série entière $\sum a_n Z^n$ est holomorphe sur le disque ouvert de convergence et sa dérivée S' est égale à la fonction somme de la série dérivée $\sum (n+1)a_{n+1}Z^n$.*

Corollaire 1.1.5. *La fonction somme d'une série entière est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable et ses dérivées successives sont égales aux fonctions sommes des séries dérivées successives.*

Définition 1.1.6 (Fonction développable en série entière)**.** *Soit f une fonction définie dans un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que f est* développable en série entière *en z_0 s'il existe une série entière $\sum a_n Z^n$ de rayon de convergence non nul et un voisinage V de z_0 t.q.*

$$\forall z \in V,\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Théorème 1.1.7. *Soit f une fonction développable en série entière en 0. Alors il existe un voisinage de 0 sur lequel f est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable, et le développement en série entière de f en 0 est son développement en série de Taylor $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} Z^n$.*

Corollaire 1.1.8.

(i) *S'il existe, le développement en série entière d'une fonction est unique.*

(ii) *Si f est une fonction développable en série entière en 0, alors toutes les dérivées de f sont développables en série entière et leurs développements sont les séries entières dérivées successives du développement de f.*

(iii) *Toute combinaison linéaire de fonctions développables en série entière est développable en série entière.*

1.2 Fonctions analytiques

Définition 1.2.1 (Fonction analytique). *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$. On dit que f est* analytique *sur $\mathcal{U}$ si f est développable en série entière en tout point de $\mathcal{U}$. On note $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ l'ensemble des fonctions analytiques sur $\mathcal{U}$.*

Proposition 1.2.2. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$.*

(i) *$\mathcal{A}(\mathcal{U})$ est une $\mathbb{C}$-algèbre.*

(ii) *$\mathbb{C}[X] \subset \mathcal{A}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{H}(\mathcal{U})$.*

Théorème 1.2.3. *Si une série entière $\sum a_n Z^n$ a un rayon de convergence non nul, alors sa fonction somme est analytique sur le disque ouvert de convergence.*

1.3 La fonction exponentielle

Définition 1.3.1 (Exponentielle). *On définit :*

$$\exp : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \end{array} \right. .$$

Proposition 1.3.2. *La fonction exponentielle est analytique sur $\mathbb{C}$ et $\exp' = \exp$.*

Proposition 1.3.3. *Pour $(v,w) \in \mathbb{C}^2$, on a $\exp(v)\exp(w) = \exp(v+w)$, $\exp(v)^{-1} = \exp(-v)$ et $|\exp(v)| = \exp(\Re(v))$.*

Théorème 1.3.4. *La fonction exponentielle induit un morphisme de groupes $(\mathbb{C},+) \to (\mathbb{C}^*, \times)$. Ce morphisme est continu, surjectif mais non injectif.*

Démonstration. *Morphisme continu de groupes.* Clair avec les propriétés précédentes. *Surjectivité.* Soit $\xi \in \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}_-$. On pose $f : t \in [0,1] \longmapsto (1-t) + t\xi$; f est continue et ne s'annule pas. On pose ensuite :

$$g : t \in [0,1] \longmapsto \int_0^t \frac{f'(u)}{f(u)}\, \mathrm{d}u.$$

On a $\forall t \in [0,1],\ g'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$, d'où on déduit en dérivant que :

$$\forall t \in [0,1],\ f(t)\exp(-g(t)) = 1.$$

Il vient $\xi = f(1) = \exp(g(1)) \in \exp(\mathbb{C})$. Comme $i \in \exp(\mathbb{C})$ et exp est un morphisme, on montre aisément que $(-1) \in \exp(\mathbb{C})$ puis que $\mathbb{R}_-^* \subset \exp(\mathbb{C})$, d'où $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$. *Non injectivité.* Il existe $\eta \in \mathbb{C}$ t.q. $\exp(\eta) = -1$, d'où $\exp(2\eta) = 1 = \exp(0)$, et $2\eta \neq 0$. □

Proposition 1.3.5. *On considère :*

$$\phi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U} \\ t \longmapsto \exp(it) \end{array} \right. .$$

Alors ϕ est un morphisme de groupes surjectif et son noyau est un sous-groupe fermé strict de $\mathbb{R}$, donc de la forme $\alpha\mathbb{Z}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Le plus petit réel strictement positif de $\operatorname{Ker}\phi$ *est noté 2π.*

Corollaire 1.3.6.

(i) *Le noyau du morphisme de groupes* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ *est $2i\pi\mathbb{Z}$.*

(ii) *La fonction exponentielle est périodique et l'ensemble de ses périodes est $2i\pi\mathbb{Z}$.*

1.4 Quelques propriétés fondamentales des fonctions analytiques

1.4.1 Principe du prolongement analytique

Théorème 1.4.1 (Principe du prolongement analytique)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a \in \mathcal{U}$ et $f \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est identiquement nulle sur $\mathcal{U}$.*

(ii) *f est identiquement nulle sur un voisinage de a.*

(iii) $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(a) = 0$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) Clair. (ii) $\Rightarrow$ (i) Soit $V = \left\{z \in \mathcal{U},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(z) = 0\right\}$. V est un fermé de $\mathcal{U}$. Et selon l'équivalence (ii) $\Leftrightarrow$ (iii), V est l'ensemble des $z \in \mathcal{U}$ tel que f est identiquement nulle dans un voisinage de z. Ainsi, V est un ouvert de $\mathcal{U}$. Donc V est un ouvert fermé non vide de $\mathcal{U}$, qui est connexe, donc $V = \mathcal{U}$. □

Corollaire 1.4.2. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $(f, g) \in \mathcal{A}(\mathcal{U})^2$. Si f et g coïncident au voisinage d'un point de $\mathcal{U}$, alors $f = g$.*

1.4.2 Principe des zéros isolés

Notation 1.4.3. *Pour $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, on notera $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z - a| < r\}$ et $C(a,r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z - a| = r\}$.*

Définition 1.4.4 (Partie discrète)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $A \subset \mathcal{U}$. On dit que A est une* partie discrète *de $\mathcal{U}$ lorsque :*

$$\forall a \in A,\ \exists r > 0,\ A \cap D(a,r) = \{a\}.$$

Proposition 1.4.5. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $A \subset \mathcal{U}$. S'équivalent :*

(i) *Tout $z \in \mathcal{U}$ admet un voisinage V tel que $A \cap V$ est fini.*

(ii) *Pour tout compact K de $\mathcal{U}$, $A \cap K$ est fini.*

(iii) *A est une partie discrète et fermée de $\mathcal{U}$.*

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que A est une partie localement finie *de $\mathcal{U}$.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Soit K un compact de $\mathcal{U}$. Tout $z \in K$ admet un voisinage ouvert V_z t.q. $A \cap V_z$ est fini. Et on a $K \subset \bigcup_{z \in K} V_z$. Selon la propriété de Borel-Lebesgue, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $(z_1, \ldots, z_m) \in K^m$ t.q. $K \subset \bigcup_{i=1}^m V_{z_i}$. Ainsi $A \cap K \subset \bigcup_{i=1}^m (A \cap V_{z_i})$, donc $A \cap K$ est fini. (ii) $\Rightarrow$ (iii) *Discrète.* Soit $a \in A$. Soit V un voisinage compact de a. Alors $A \cap V$ est fini. Comme $\mathbb{C}$ est séparé, on en déduit l'existence de $r > 0$ t.q. $A \cap D(a,r) = \{a\}$. *Fermée.* Soit par l'absurde $z \in \overline{A} \backslash A$ et soit V un voisinage compact de z. Alors $A \cap V$ est fini d'où on déduit l'existence de $r > 0$ t.q. $A \cap D(z,r) = \varnothing$. Donc $z \notin \overline{A}$. C'est absurde, donc A est fermée. (iii) $\Rightarrow$ (i) Soit $z \in \mathcal{U}$. *Premier cas* : $z \in A$. Comme A est discrète, il existe $r > 0$ t.q. $A \cap D(z,r) = \{z\}$. Alors $V = D(z,r)$ convient. *Second cas* : $z \in \mathbb{C} \backslash A$. Comme $\mathbb{C} \backslash A$ est un ouvert, il existe $r > 0$ t.q. $D(z,r) \subset \mathbb{C} \backslash A$. Ainsi, $V = D(z,r)$ convient. □

Théorème 1.4.6 (Principe des zéros isolés)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$ non identiquement nulle. Alors $f^{-1}(\{0\})$ est une partie localement finie de $\mathcal{U}$.*

Démonstration. f est analytique donc continue, donc $f^{-1}(\{0\})$ est une partie fermée de $\mathcal{U}$. Reste à prouver que $f^{-1}(\{0\})$ est une partie discrète de $\mathcal{U}$. Soit donc $\omega \in f^{-1}(\{0\})$. D'après le principe du prolongement analytique (théorème 1.4.1), il existe $p \in \mathbb{N}^*$, choisi minimal, t.q. $f^{(p)}(\omega) \neq 0$. On a alors l'existence d'un voisinage V de ω, d'un $a_k \in \mathbb{C}^*$ et d'une fonction g continue en ω avec $g(\omega) = 0$ t.q.

$$\forall z \in V,\ f(z) = a_k(z-\omega)^k + g(z)(z-\omega)^k.$$

En prenant $W \subset V$ un voisinage de ω t.q. $\forall z \in W,\ |g(z)| < |a_k|$, on a $f^{-1}(\{0\}) \cap W = \{\omega\}$. Donc $f^{-1}(\{0\})$ est discrète. □

Corollaire 1.4.7. *Si $\mathcal{U}$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, alors l'anneau $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ est intègre.*

Proposition 1.4.8. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$ non identiquement nulle et $\omega \in \mathcal{U}$. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $f^{(k)}(\omega) \neq 0$ *et* $\forall p \in [\![0, k[\![,\ f^{(p)}(\omega) = 0$.

(ii) *Le premier terme non nul du développement en série entière de f en ω est de la forme $a_k(z-\omega)^k$, avec $a_k \neq 0$.*

(iii) *Il existe un voisinage V de ω dans $\mathcal{U}$ et $h \in \mathcal{A}(V)$ avec $h(\omega) \neq 0$ t.q. $\forall z \in V,\ f(z) = h(z)(z-\omega)^k$.*

*On dit que k est l'*ordre de multiplicité *de ω en tant que zéro de f.*

1.5 Fonctions holomorphes

1.5.1 Rappels

Définition 1.5.1 (Fonction différentiable en un point)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathcal{U}$. On dit que f est* différentiable *en z_0 lorsqu'il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ t.q.*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - L(z-z_0)}{|z - z_0|} = 0.$$

L'application linéaire L est alors appelée différentielle *de f en z_0 et notée $\mathrm{d}f(z_0)$. En notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{C}$, on a :*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathrm{d}f(z_0)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix},$$

avec $P = \Re(f)$ et $Q = \Im(f)$.

Lemme 1.5.2. *Soit $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. S'équivalent :*

(i) *u est $\mathbb{C}$-linéaire.*

(ii) *Il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ t.q. $\forall z \in \mathbb{C},\ u(z) = \alpha z$.*

(iii) *u est $\mathbb{R}$-linéaire et sa matrice dans la base canonique est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.*

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que u est une similitude*.*

1.5.2 Fonctions holomorphes

Proposition 1.5.3. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.*

(i) *L'ensemble des fonctions définies au voisinage de z_0 et $\mathbb{C}$-dérivables en z_0 est une algèbre.*

(ii) *Soit f (resp. g) une fonction définie au voisinage de z_0 (resp. de $f(z_0)$) et $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 (resp. en $f(z_0)$). Alors $(g \circ f)$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et : $(g \circ f)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g'(f(z_0))$.*

(iii) *Soit f une fonction définie au voisinage de z_0 et $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 avec $f(z_0) \neq 0$. Alors $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de z_0 et $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, et : $\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f^2(z_0)}$.*

Proposition 1.5.4. *Soit f une fonction définie au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0.*

(ii) *f est différentiable en z_0 et $\mathrm{d}f(z_0)$ est $\mathbb{C}$-linéaire.*

(iii) *f est différentiable en z_0 et satisfait l'*équation de Cauchy-Riemann *:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0,$$

qu'on peut aussi écrire :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0),$$

avec $P = \Re(f)$ et $Q = \Im(f)$.

Remarque 1.5.5. *Soit f une fonction définie au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, alors $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$.*

Notation 1.5.6. *Soit f une fonction définie au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. Sous réserve d'existence, on notera :*

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right).$$

*L'*équation de Cauchy-Riemann *s'écrit alors $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$.*

Proposition 1.5.7. *Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ouverts de $\mathbb{C}$.*

(i) *$\mathcal{H}(\mathcal{U})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(\mathcal{U})$.*

(ii) *Si $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$, alors $\frac{1}{f} \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$.*

(iii) *Si f est holomorphe sur $\mathcal{U}$, $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ et g est holomorphe sur $\mathcal{V}$, alors $(g \circ f)$ est holomorphe sur $\mathcal{U}$.*

Exemple 1.5.8.

(i) *$z \longmapsto z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.*

(ii) *$z \longmapsto \overline{z}$ n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.*

(iii) *Toute fonction polynomiale est holomorphe sur $\mathbb{C}$.*

(iv) *Toute fraction rationnelle F est holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash Z$, où Z est l'ensemble des pôles de F.*

(v) *La somme d'une série entière est holomorphe sur le disque ouvert de convergence.*

(vi) *Toute fonction analytique sur un ouvert $\mathcal{U}$ est holomorphe sur $\mathcal{U}$.*

2 Théorie de Cauchy pour les domaines étoilés

2.1 Intégrales curvilignes

Définition 2.1.1 (Chemin). *Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On appelle* chemin *(ou* arc paramétré*) de $\mathcal{U}$ tout couple $([a,b],\gamma)$, où $-\infty < a < b < +\infty$ et $\gamma : [a,b] \to \mathcal{U}$. On dit que $\gamma(a)$ est l'*origine *de γ et que $\gamma(b)$ est son* extrémité. *Le chemin est dit* fermé *si $\gamma(a) = \gamma(b)$. On dit alors que c'est un* lacet.

Définition 2.1.2 (Chemins équivalents). *Deux chemins de classe $\mathcal{C}^1$ (resp. $\mathcal{C}^0$) $([a,b],\gamma)$ et $([c,d],\delta)$ sont dits* équivalents *s'il existe une application $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ bijective, croissante, et telle que φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$ (resp. $\mathcal{C}^0$), vérifiant $\gamma = \delta \circ \varphi$.*

Définition 2.1.3 (Intégrale curviligne). *Soit $([a,b],\gamma)$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ et f une fonction continue sur $\gamma([a,b])$. L'*intégrale de f selon γ *est définie par :*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on pourra noter $\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$, où $\Gamma = \gamma([a,b])$, sans expliciter la définition de γ.

Proposition 2.1.4. *Si $([a,b],\gamma)$ et $([c,d],\delta)$ sont deux chemins équivalents et si f est une fonction continue sur $\gamma([a,b])$, alors $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\delta f(z)\,\mathrm{d}z$.*

Définition 2.1.5 (Longueur d'un chemin). *Étant donné un chemin $([a,b],\gamma)$, on appelle longueur du chemin γ la grandeur $L = \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$.*

Proposition 2.1.6. *Soit $([a,b],\gamma)$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ et de longueur L et f une fonction continue sur $\gamma([a,b])$. Alors :*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \leqslant L \cdot \sup_{z\in\gamma([a,b])} |f(z)|\,.$$

Définition 2.1.7 (Chemin $\mathcal{C}^1_{pm}$). *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Un chemin continu $([a,b],\gamma)$ sera dit de classe $\mathcal{C}^1_{pm}$ ($\mathcal{C}^1$ par morceaux) dans $\mathcal{U}$ s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ de $[a,b]$ t.q. la restriction de γ à chaque intervalle $[a_{j-1},a_j]$, pour $j \in [\![1,k]\!]$, est de classe $\mathcal{C}^1$.*

Proposition 2.1.8. *Soit $([a,b],\gamma)$ un chemin $\mathcal{C}^1_{pm}$ dans $\mathcal{U}$ et f une fonction continue sur $\mathcal{U}$. On suppose qu'il existe $F \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ t.q. $F' = f$. Alors :*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\,.$$

Corollaire 2.1.9. *Soit $([a,b],\gamma)$ un chemin fermé $\mathcal{C}^1_{pm}$ dans $\mathcal{U}$ et f une fonction continue sur $\mathcal{U}$ admettant une primitive. Alors $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.*

2.2 Indice

Exemple 2.2.1. *On considère le chemin $\gamma : t \in [0,2\pi] \longmapsto e^{it}$. Pour $\omega \in \mathbb{C}$ avec $|\omega| < 1$, on pose $f_\omega : z \in \mathbb{C}\backslash\{\omega\} \longmapsto \frac{1}{z-\omega}$. On obtient facilement $\int_\gamma f_0(z)\,\mathrm{d}z = 2i\pi$ et on cherche à calculer $\int_\gamma f_\omega(z)\,\mathrm{d}z$ pour $|\omega| < 1$. Pour cela, on fixe ω et on étudie la fonction $g : s \in [0,1] \longmapsto \int_\gamma f_{s\omega}(z)\,\mathrm{d}z$. On montre par convergence dominée que g est dérivable et que $g' = 0$, d'où on déduit que $\forall\omega \in \mathbb{C}$, $|\omega| < 1 \Longrightarrow \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-\omega} = 2i\pi$.*

Définition 2.2.2 (Indice d'un chemin par rapport à un point). *Si $([a,b],\gamma)$ est un chemin fermé $\mathcal{C}^1_{pm}$ et $\omega \in \mathbb{C}\backslash\gamma([a,b])$, on définit l'*indice du chemin γ par rapport à ω *le nombre :*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(\omega) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-\omega}.$$

Proposition 2.2.3. *Soit* $([a,b],\gamma)$ *un chemin fermé* $\mathcal{C}^1_{pm}$*. On note* $\Gamma = \gamma([a,b])$*. Alors* Ind_γ *est une fonction définie sur* $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ *et à valeurs dans* $\mathbb{Z}$*, constante sur chaque composante connexe de* $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ *et nulle sur la composante connexe non bornée de* $\mathbb{C}\backslash\Gamma$*.*

Démonstration. Soit $a = a_0 < \cdots < a_k = b$ une subdivision adaptée à γ. Soit $\omega \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$. On pose :

$$\varphi : s \in [a,b] \longmapsto \exp\left(\int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-\omega}\,\mathrm{d}t\right) \quad \text{et} \quad \psi : s \in [a,b] \longmapsto \frac{\varphi(s)}{\gamma(s)-\omega}.$$

Soit $i \in [\![1,k]\!]$. ψ est dérivable sur $]a_{i-1},a_i[$ et on obtient par le calcul $\forall s \in\,]a_{i-1},a_i[\,,\ \psi'(s) = 0$. Ainsi, ψ est constante sur $[a_{i-1},a_i]$. On en déduit que ψ est constante sur $[a,b]$. Donc $\psi(b) = \psi(a)$; or $\gamma(b) = \gamma(a)$, donc $\varphi(b) = \varphi(a) = 1$. On en déduit $2i\pi\,\mathrm{Ind}_\gamma(\omega) = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-\omega}\,\mathrm{d}t \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Donc Ind_γ est bien à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On montre par convergence dominée que Ind_γ est continue, d'où on déduit que Ind_γ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C}\backslash\Gamma$. De plus :

$$|\mathrm{Ind}_\gamma(\omega)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t)-\omega|}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{L}{2\pi}\sup_{t\in[a,b]}\frac{1}{|\gamma(t)-\omega|} \xrightarrow[|\omega|\to+\infty]{} 0,$$

où L est la longueur de γ. Comme Ind_γ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, ceci prouve que Ind_γ est nulle sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\backslash\Gamma$. □

Remarque 2.2.4. *Intuitivement,* $\mathrm{Ind}_\gamma(\omega)$ *est le nombre de tours (avec un signe) décrits par* $\gamma(t)$ *autour de* ω *lorsque* t *décrit* $[a,b]$*.*

Proposition 2.2.5. *Soit* $a \in \mathbb{C}$*,* $r \in \mathbb{R}_+^*$*. On considère le chemin* $\gamma : t \in [0,2\pi] \longmapsto a + re^{it}$*. On note* $\Gamma = \gamma([0,2\pi]) = C(a,r)$*. Alors :*

$$\forall\omega \in \mathbb{C}\backslash\Gamma,\ \mathrm{Ind}_\gamma(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } |\omega - a| < r \\ 0 \text{ si } |\omega - a| > r \end{cases}.$$

2.3 Existence des primitives

Définition 2.3.1 (Primitive)**.** *Soit* $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U})$*, où* $\mathcal{U}$ *est un ouvert de* $\mathbb{C}$*. On appelle* primitive *de* f *toute fonction* $F \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ *t.q.* $F' = f$*.*

Théorème 2.3.2. *Soit* $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U})$*, où* $\mathcal{U}$ *est un ouvert de* $\mathbb{C}$*. Alors* f *admet une primitive* ssi *pour tout chemin fermé* γ *de classe* $\mathcal{C}^1_{pm}$*,* $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$*.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) Voir corollaire 2.1.9. ($\Leftarrow$) Sans perte de généralité, on peut supposer $\mathcal{U}$ connexe (comme $\mathcal{U}$ est ouvert, $\mathcal{U}$ est donc connexe par arcs). Si $([a,b],\gamma)$ est un chemin $\mathcal{C}^1_{pm}$, on montre que $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ ne dépend que de $\gamma(a)$ et de $\gamma(b)$ mais pas de γ. Cela donne un sens à la notation $\int_\alpha^\beta f(z)\,\mathrm{d}z$ pour $(\alpha,\beta) \in \mathcal{U}^2$ car il existe toujours un chemin γ (qu'on peut supposer $\mathcal{C}^1_{pm}$) liant α et β et car l'intégrale $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ ne dépend pas du choix de γ. On fixe alors $z_0 \in \mathcal{U}$ et on pose :

$$F : z \in \mathcal{U} \longmapsto \int_{z_0}^z f(\omega)\,\mathrm{d}\omega \in \mathbb{C}.$$

Pour $z \in \mathcal{U}$ et $h \in \mathbb{C}^*$ suffisamment proche de 0, on a alors :

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_z^{z+h}(f(\omega)-f(z))\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \sup_{\omega\in[z,z+h]}|f(\omega)-f(z)| \xrightarrow[h\to 0]{} 0,$$

ce qui prouve que F est holomorphe et que $F' = f$. □

Remarque 2.3.3. *On a* $\int_{C(0,1)}\frac{\mathrm{d}z}{z} = 2i\pi \neq 0$ *donc* $z \mapsto \frac{1}{z}$ *n'admet pas de primitive sur* $\mathbb{C}^*$*.*

Définition 2.3.4 (Ouvert étoilé)**.** *Un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ est dit* étoilé *s'il existe un $z_0 \in \mathcal{U}$ t.q. $\forall z \in \mathcal{U}$, $[z_0, z] \subset \mathcal{U}$.*

Exemple 2.3.5. *Tout ouvert convexe non vide est étoilé par rapport à chacun de ses points.*

Théorème 2.3.6. *Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U})$, où $\mathcal{U}$ est un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$. On suppose que pour tout triangle Δ contenu dans $\mathcal{U}$, $\int_{\partial\Delta} f(z)\ \mathrm{d}z = 0$. Alors f admet une primitive sur $\mathcal{U}$.*

Démonstration. Soit z_0 un point de $\mathcal{U}$ par rapport auquel $\mathcal{U}$ est étoilé. Alors $\forall z \in \mathcal{U}$, $[z_0, z] \subset \mathcal{U}$. On pose :

$$F : z \in \mathcal{U} \longmapsto \int_{[z_0,z]} f(\omega)\ \mathrm{d}\omega = \int_0^1 f\left((1-t)z_0 + tz\right)(z - z_0)\ \mathrm{d}t \in \mathbb{C}.$$

Soit $z \in \mathcal{U}$. Soit $r > 0$ t.q. $D(z, r) \subset \mathcal{U}$. Soit $h \in D(0, r)$. Le triangle Δ de sommets $z_0, z, (z+h)$ est contenu dans $\mathcal{U}$, donc $\int_{\partial\Delta} f(\omega)\ \mathrm{d}\omega = 0$. Il vient :

$$\forall h \in D(0,r),\ F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(\omega)\ \mathrm{d}\omega.$$

On peut alors conclure avec le même raisonnement que pour le théorème 2.3.2. □

Corollaire 2.3.7. *Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U})$, où $\mathcal{U}$ est un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$. S'équivalent :*

(i) *f admet une primitive.*

(ii) *Pour tout chemin fermé γ de classe $\mathcal{C}^1_{pm}$, $\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = 0$.*

(iii) *Pour tout triangle Δ contenu dans $\mathcal{U}$, $\int_{\partial\Delta} f(z)\ \mathrm{d}z = 0$.*

2.4 Théorèmes de Cauchy

Théorème 2.4.1 (Théorème de Goursat)**.** *Soit $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$, où $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Pour tout triangle Δ contenu dans $\mathcal{U}$, on a :*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\ \mathrm{d}z = 0.$$

Démonstration. Soit Δ un triangle contenu dans $\mathcal{U}$, de sommets a, b, c. On pose $\mathfrak{I} = \int_{\partial\Delta} f(z)\ \mathrm{d}z$. On note a', b', c' les milieux respectifs de $[b, c], [a, c], [a, b]$. Et on note $\Delta^1, \ldots, \Delta^4$ les quatre triangles associés aux triplets $(a, b', c'), (a', b, c'), (a', b', c), (a', b,', c')$. Alors :

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\ \mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta^j} f(z)\ \mathrm{d}z.$$

Il existe donc $j \in [\![1, 4]\!]$ t.q. $|\int_{\partial\Delta^j} f(z)\ \mathrm{d}z| \geqslant \frac{1}{4} |\int_{\partial\Delta} f(z)\ \mathrm{d}z|$. On note $\Delta_0 = \Delta$, $\Delta_1 = \Delta^j$. On applique à Δ_1 le même raisonnement, et on itère. On obtient ainsi une suite $\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \cdots \supset \Delta_n \supset \cdots$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\int_{\partial\Delta_{n+1}} f(z)\ \mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{1}{4}\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\ \mathrm{d}z\right|$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\ \mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{\mathfrak{I}}{4^n}.$$

Or $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts dont le diamètre tend vers 0. Donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$ est un singleton, que l'on note $\{z_0\}$. On a $z_0 \in \Delta \subset \mathcal{U}$ donc f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0. Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe $r > 0$ t.q. $\forall z \in D(z_0, r)$, $|f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0)| \leqslant \varepsilon |z - z_0|$. Pour n suffisamment grand, on a $\Delta_n \subset D(z_0, r)$. De plus, la fonction $z \longmapsto f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0)$ admet une primitive dans $\mathbb{C}$ donc son intégrale sur tout chemin fermé est nulle. Ainsi :

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\ \mathrm{d}z\right| &= \left|\int_{\partial\Delta_n} [f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0)]\ \mathrm{d}z\right| \\ &\leqslant \varepsilon \int_{\partial\Delta_n} |z - z_0|\ \mathrm{d}z \leqslant \varepsilon \ell_n \sup_{z\in\partial\Delta_n} |z - z_0| \leqslant \varepsilon \ell_n^2 \leqslant \frac{\varepsilon \ell_0^2}{4^n},\end{aligned}$$

où ℓ_n est le périmètre de Δ_n, pour $n \in \mathbb{N}$. Ceci prouve que $\forall \varepsilon > 0$, $\mathfrak{I} \leqslant \varepsilon \ell_0^2$. Donc $\mathfrak{I} = 0$. □

Remarque 2.4.2. *Le théorème 2.4.1 reste vrai si on suppose que $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U})$, avec f $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathcal{U}$ sauf en un point α.*

Démonstration. Soit Δ un triangle contenu dans $\mathcal{U}$. On reprend les notations de la preuve du théorème 2.4.1. *Premier cas* : α est un sommet de Δ, par exemple $\alpha = a$. D'après le théorème 2.4.1, l'intégrale de f est nulle sur les triangles associés aux triplets $(a', b, c'), (a', b', c), (a', b', c')$. Et en faisant tendre $b' \to a$, $c' \to a$, on peut rendre l'intégrale de f sur le triangle associé au triplet (a, b', c') arbitrairement petite. Donc l'intégrale de f sur $\partial\Delta$ est nulle. *Deuxième cas* : α est sur un côté de f, par exemple $\alpha \in [b, c]$. Alors on se ramène au cas précédent en considérant les triangles associés aux triplets $(a, \alpha, b), (a, \alpha, c)$. *Troisième cas* : $\alpha \in \mathring{\Delta}$. Alors on se ramène au premier cas en considérant les triangles associés aux triplets $(a, b, \alpha), (a, c, \alpha), (b, c, \alpha)$. $\square$

Corollaire 2.4.3. *Soit $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$, où $\mathcal{U}$ est un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$. Alors f admet une primitive dans $\mathcal{U}$, et pour tout chemin fermé γ de classe $\mathcal{C}^1_{pm}$ contenu dans $\mathcal{U}$, on a $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.*

Théorème 2.4.4 (Formule de Cauchy)**.** *Soit $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$, où $\mathcal{U}$ est un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$. Soit γ un chemin fermé $\mathcal{C}^1_{pm}$ d'image $\Gamma \subset \mathcal{U}$. Alors :*

$$\forall z \in \mathcal{U} \backslash \Gamma,\ f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z}\,\mathrm{d}\omega.$$

Démonstration. Soit $z \in \mathcal{U} \backslash \Gamma$. On pose :

$$g : \omega \in \mathcal{U} \longmapsto \begin{cases} \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z} & \text{si } \omega \neq z \\ f'(z) & \text{si } \omega = z \end{cases}.$$

Alors g est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathcal{U}$ et $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathcal{U} \backslash \{z\}$. D'après la remarque 2.4.2 et le corollaire 2.3.7, on a $\int_\gamma g(\omega)\,\mathrm{d}\omega = 0$. Cette égalité peut s'écrire comme suit :

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{\omega - z}\,\mathrm{d}\omega = \int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z}\,\mathrm{d}\omega,$$

ce qui fournit la formule de Cauchy en divisant par $2i\pi$. $\square$

2.5 Analyticité des fonctions holomorphes

Théorème 2.5.1 (Formule de Cauchy pour les cercles)**.** *Soit $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$, où $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $a \in \mathcal{U}$ et $r > 0$ t.q. $\overline{D(a, r)} \subset \mathcal{U}$. Alors :*

$$\forall z \in D(a, r),\ f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z}\,\mathrm{d}\omega.$$

Corollaire 2.5.2 (Analyticité des fonctions holomorphes)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$. Alors :*

(i) *f est analytique sur $\mathcal{U}$.*

(ii) *Si $a \in \mathcal{U}$, alors le rayon de convergence de la série de Taylor de f en a est supérieur ou égal à $d(a, \mathbb{C} \backslash \mathcal{U})$.*

(iii) *Si $a \in \mathcal{U}$ et $r \in \mathbb{R}^*_+$ avec $\overline{D(a, r)} \subset \mathcal{U}$, alors :*

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(\omega)}{(\omega - a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\omega.$$

Démonstration. Partir de la formule de Cauchy (théorème 2.5.1) et développer f en série entière en utilisant $\forall z \in D(a, r)$, $\forall \omega \in C(a, r)$, $\frac{1}{\omega - z} = \frac{1}{\omega - a} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z - a}{\omega - a}\right)} = \frac{1}{\omega - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\omega - a}\right)^n$. $\square$

Remarque 2.5.3. *Pour une fonction analytique réelle, le disque de convergence de la série de Taylor n'est pas nécessairement le plus grand disque contenu dans le domaine de définition de la fonction (contrairement au cas complexe). Par exemple, considérons* $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{1+x^2} \in \mathbb{R}$*. Alors* f *est définie sur* $\mathbb{R}$ *tout entier, mais le rayon de convergence de la série de Taylor de* f *en* 0 *est* 1.

Proposition 2.5.4. *Les fonctions holomorphes sont analytiques donc vérifient le principe du prolongement analytique (théorème 1.4.1) et le principe des zéros isolés (théorème 1.4.6).*

Théorème 2.5.5 (Théorème de Morera)**.** *Soit* $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U})$*, où* $\mathcal{U}$ *est un ouvert de* $\mathbb{C}$*. S'équivalent :*

(i) f *est holomorphe sur* $\mathcal{U}$.

(ii) f *est analytique sur* $\mathcal{U}$.

(iii) f *admet localement une primitive.*

(iv) *Pour tout triangle* Δ *contenu dans* $\mathcal{U}$, $\int_{\partial\Delta} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$.

3 Propriétés élémentaires des fonctions holomorphes

3.1 Inégalité de Cauchy et conséquences

Théorème 3.1.1 (Inégalité de Cauchy)**.** *Soit* f *une fonction holomorphe sur* $D(0, R)$*. Alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in]0, R[\,,\ \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leqslant \frac{1}{r^n} \sup_{|z|=r} |f(z)|\,.$$

Démonstration. Utiliser l'expression de $f^{(n)}(0)$ du corollaire 2.5.2. □

Définition 3.1.2 (Fonction entière)**.** *Une fonction holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *tout entier est dite* entière.

Théorème 3.1.3 (Théorème de Liouville)**.** *Toute fonction entière bornée est constante.*

Théorème 3.1.4 (Théorème de d'Alembert-Gauß)**.** *Tout polynôme complexe non constant possède au moins une racine complexe.*

3.2 Suites et séries de fonctions holomorphes

Définition 3.2.1 (Convergence uniforme sur tout compact)**.** *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies sur un ouvert* $\mathcal{U}$ *de* $\mathbb{R}^n$*. On dit que la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact *vers* f *lorsque pour tout* K *compact de* $\mathcal{U}$, $\|f_n - f\|_{\infty}^{K} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Proposition 3.2.2. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies sur un ouvert* $\mathcal{U}$ *de* $\mathbb{R}^n$.

(i) *Si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f_n *est continue et si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur tout compact vers* f*, alors* f *est continue.*

(ii) *On suppose* $\mathcal{U}$ *convexe. Si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f_n *est* $\mathcal{C}^1$*, si* $(\mathrm{d}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur tout compact vers* G *et s'il existe* $x_0 \in \mathcal{U}$ *t.q.* $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, alors* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur tout compact vers une fonction* f *de classe* $\mathcal{C}^1$ *vérifiant* $\mathrm{d}f = G$.

Théorème 3.2.3 (Théorème de Weierstraß)**.** *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert* $\mathcal{U}$ *de* $\mathbb{C}$ *convergeant uniformément sur tout compact vers une fonction* f*. Alors* f *est holomorphe sur* $\mathcal{U}$ *et pour tout* $j \in \mathbb{N}$, $\left(f_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur tout compact vers* $f^{(j)}$.

Démonstration. Soit $K \subset \mathcal{U}$ un compact. On note $r = \begin{cases} \frac{1}{2} d(K, \mathbb{C}\backslash\mathcal{U}) & \text{si } \mathcal{U} \subsetneq \mathbb{C} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$. Ainsi, $\forall z \in K$, $\overline{D(z,r)} \subset \mathcal{U}$. On considère alors :

$$L = \bigcup_{z\in K} \overline{D(z,r)} = \{z \in \mathcal{U},\ d(z, K) \leqslant r\}\,.$$

Alors L est un compact de $\mathcal{U}$. Et, à l'aide de l'inégalité de Cauchy, on prouve que :

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \left\| f_p^{(j)} - f_q^{(j)} \right\|_{\substack{\infty \\ K}} \leqslant \frac{j!}{r^j} \left\| f_p - f_q \right\|_{\substack{\infty \\ L}}.$$

Ceci prouve que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\left(f_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère uniforme de Cauchy donc converge uniformément sur K, ce qui permet de conclure à l'aide de la proposition 3.2.2. $\square$

Corollaire 3.2.4. *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions holomorphes sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$ convergeant uniformément sur tout compact. Soit f la somme de la série $\sum f_n$. Alors :*

(i) *f est holomorphe sur $\mathcal{U}$ et la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout compact vers f'.*

(ii) *Si $\sum f_n$ converge normalement sur tout compact, alors il en est de même pour $\sum f_n'$.*

3.3 Intégrales à paramètre

Théorème 3.3.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \mathcal{U} \times I \to \mathbb{C}$. On suppose que :*

(i) *$\forall z \in \mathcal{U},\ f(z,\cdot)$ est intégrable sur I.*

(ii) *$\forall t \in I,\ f(\cdot,t)$ est holomorphe sur $\mathcal{U}$.*

(iii) *Pour tout compact $K \subset \mathcal{U}$, il existe une fonction $g_K : I \to \mathbb{R}$ intégrable t.q.*

$$\forall (z,t) \in K \times I,\ |f(z,t)| \leqslant g_K(t).$$

Alors la fonction $F : z \in \mathcal{U} \longmapsto \int_I f(z,t)\ \mathrm{d}t$ est holomorphe sur $\mathcal{U}$ et :

$$\forall z \in \mathcal{U},\ \forall n \in \mathbb{N},\ F^{(n)}(z) = \int_I \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration. Comme pour le théorème de Weierstraß (théorème 3.2.3), utiliser l'inégalité de Cauchy (théorème 3.1.1) pour dominer $\frac{\partial f}{\partial z}$. Soit $z_0 \in \mathcal{U}$. Alors, par convergence dominée (avec la domination de $\frac{\partial f}{\partial z}$), on a :

$$\frac{F(z_0+h) - F(z_0)}{h} = \int_I \frac{f(z_0+h,t) - f(z_0,t)}{h}\ \mathrm{d}t \xrightarrow[h\to 0]{} \int_I \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,t)\ \mathrm{d}t.$$

Ceci prouve que F est holomorphe. Le calcul des dérivées successives de F se fait ensuite par récurrence. $\square$

Remarque 3.3.2. *Si I est un segment, l'hypothèse de domination (hypothèse* (iii) *du théorème 3.3.1) est toujours vérifiée.*

3.4 Propriété de la moyenne et principe du maximum

Définition 3.4.1 (Propriété de la moyenne)**.** *On dit qu'une fonction f continue sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$ possède la* propriété de la moyenne *lorsque :*

$$\forall a \in \mathcal{U},\ \forall r > 0,\ \overline{D(a,r)} \subset \mathcal{U} \Longrightarrow f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(a + re^{i\theta}\right)\ \mathrm{d}\theta.$$

Remarque 3.4.2. *Si f possède la propriété de la moyenne, alors $\Re(f)$ et $\Im(f)$ aussi.*

Proposition 3.4.3. *Si f est holomorphe sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$, alors f possède la propriété de la moyenne.*

Démonstration. Utiliser la formule de Cauchy pour les cercles (théorème 2.5.1). $\square$

Définition 3.4.4 (Maximum relatif)**.** *Soit f une fonction continue sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$, $a \in \mathcal{U}$. On dit que f admet un* maximum relatif *en a lorsqu'il existe un voisinage V de a t.q.*

$$\forall z \in V,\ |f(z)| \leqslant |f(a)|.$$

Définition 3.4.5 (Principe du maximum)**.** *On dit qu'une fonction f continue sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$ vérifie le* principe du maximum *si pour tout maximum relatif a de f, f est constante au voisinage de a.*

Théorème 3.4.6. *Toute fonction possédant la propriété de la moyenne vérifie le principe du maximum.*

Démonstration. Soit f une fonction continue sur un ouvert $\mathcal{U}$ possédant la propriété de la moyenne. Soit a un maximum relatif de f. Soit $\rho > 0$ t.q. $D(a,\rho) \subset \mathcal{U}$ et :

$$\forall z \in D(a,\rho),\ |f(z)| \leqslant |f(a)|.$$

Si $f(a) = 0$, alors $\forall z \in D(a,\rho),\ f(z) = 0$. Sinon, quitte à multiplier f par $\frac{\overline{f(a)}}{|f(a)|}$, on peut supposer $f(a) = |f(a)| > 0$. On a alors, selon la propriété de la moyenne :

$$\begin{aligned}\forall r < \rho,\ 0 = f(a) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a + re^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(|f(a)| - f\left(a + re^{i\theta}\right)\right) \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\left(|f(a)| - \Re\left[f\left(a + re^{i\theta}\right)\right]\right)}_{\geqslant 0} \mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

Il vient $\forall r < \rho,\ \forall \theta \in [0, 2\pi]\,,\ \Re\left[f\left(a + re^{i}\theta\right)\right] = |f(a)|$, donc $\forall z \in D(a,\rho),\ \Re\left[f(z)\right] = |f(a)|$, d'où $\forall z \in D(a,\rho),\ f(z) = f(a)$. ☐

Corollaire 3.4.7. *Si f est une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$, alors f n'admet aucun maximum relatif dans $\mathcal{U}$.*

Corollaire 3.4.8. *Si f est une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$, t.q. $|f|$ admet un minimum local dans $\mathcal{U}$, alors ce minimum est nécessairement nul.*

Proposition 3.4.9. *Soit D un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur $\overline{D}$ et holomorphe sur D. Alors :*

$$\sup_{z \in D} |f(z)| = \sup_{z \in \partial D} |f(z)|.$$

De plus, s'il existe $a \in D$ t.q. $|f(a)| = \sup_{z \in D} |f(z)|$, alors f est constante sur D.

Théorème 3.4.10 (Lemme de Schwarz)**.** *Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité $D(0,1)$ de $\mathbb{C}$. On suppose que :*

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall z \in D(0,1),\ |f(z)| \leqslant 1.$$

Alors :

$$|f'(0)| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \forall z \in D(0,1)\backslash\{0\},\ |f(z)| \leqslant |z|.$$

De plus, les inégalités sont strictes sauf s'il existe un $\lambda \in \mathbb{U}$ t.q. $\forall z \in D(0,1),\ f(z) = \lambda z$.

Démonstration. On considère :

$$g : z \in D(0,1) \longmapsto \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}.$$

Alors g est holomorphe. Et on a :

$$\forall r \in]0,1[,\ \forall z \in D(0,1),\ |z| = r \Longrightarrow |g(z)| \leqslant \frac{1}{r}.$$

D'après la proposition 3.4.9, cette inégalité reste valable dès que $|z| \leqslant r$. En faisant tendre $r \to 1$, on obtient ainsi $\forall z \in D(0,1),\ |g(z)| \leqslant 1$. Ceci prouve les inégalités voulues. Supposons maintenant qu'il existe $z_0 \in D(0,1)$ t.q. $|g(z_0)| = 1$. Alors d'après le corollaire 3.4.7, g est constante, donc $\forall z \in D(0,1),\ f(z) = g(z_0)\, z$. ☐

Définition 3.4.11 (Application ouverte). *On dit qu'une application f définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$ est* ouverte *lorsque pour tout $\mathcal{O}$ ouvert de $\mathbb{C}$ inclus dans $\mathcal{U}$, $f(\mathcal{O})$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.*

Théorème 3.4.12 (Théorème de l'application ouverte). *Si f est holomorphe non constante sur un ouvert connexe $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$, alors f est une application ouverte.*

Démonstration. Soit V un ouvert de $\mathbb{C}$ inclus dans $\mathcal{U}$. Soit $a \in V$. Montrons que $f(V)$ est un voisinage de $b = f(a)$. Selon le principe des zéros isolés (théorème 1.4.6), il existe un disque ouvert D centré en a t.q. $\overline{D} \subset V$ et $(f(z) - b)$ ne s'annule pas sur $\overline{D} \backslash \{a\}$. Par compacité de ∂D, soit $\varepsilon > 0$ t.q.

$$\forall z \in \partial D,\ |f(z) - b| \geqslant \varepsilon.$$

Montrons que $D\left(b, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset f(D)$. Soit pour cela $\omega \in D\left(b, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. On considère $f_\omega : z \in \overline{D} \longmapsto f(z) - \omega \in \mathbb{C}$. Alors f_ω est continue donc $|f_\omega|$ atteint un minimum sur $\overline{D}$. Or $\forall z \in \partial D$, $|f_\omega(z)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} > |f_\omega(a)|$. Donc le minimum est atteint sur D. Selon le corollaire 3.4.8, ce minimum est nul, ce qui prouve que $\omega \in f(D)$. Ainsi, $D\left(b, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset f(D) \subset f(V)$, donc $f(V)$ est un ouvert. □

4 Fonctions méromorphes

4.1 Classification des singularités isolées

Notation 4.1.1. *Pour $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, on notera $D^*(a, r) = D(a, r)\backslash\{a\} = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < |z - a| < r\}$.*

Définition 4.1.2 (Singularités). *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in \mathcal{U}$ et $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}\backslash\{a\})$. On dit que f a une* singularité isolée *en a.*

(i) *Si f se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathcal{U}$, on dit que la singularité de f en a est* illusoire *ou* éliminable*, ou encore que a est une* fausse singularité *ou un* point régulier.

(ii) *S'il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $r > 0$ (avec $D(a, r) \subset \mathcal{U}$) et $g \in \mathcal{H}(D(a, r))$ t.q. $g(a) \neq 0$ et :*

$$\forall z \in D^*(a, r),\ f(z) = \frac{g(z)}{(z - a)^m},$$

on dit que f a un pôle *d'ordre m en a.*

(iii) *Si pour tout $r > 0$ (avec $D(a, r) \subset \mathcal{U}$), $\overline{f(D^*(a, r))} = \mathbb{C}$, on dit que f a une* singularité essentielle *en a.*

Lemme 4.1.3. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in \mathcal{U}$ et $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}\backslash\{a\})$. On suppose qu'il existe $r > 0$ t.q. f est bornée sur $\mathcal{U} \cap D^*(a, r)$. Alors a est une singularité illusoire de f.*

Démonstration. On définit :

$$g : z \in \mathcal{U} \longmapsto \begin{cases} (z - a)f(z) & \text{si } z \neq a \\ 0 & \text{si } z = a \end{cases}.$$

Alors g est continue sur $\mathcal{U}$ et holomorphe sur $\mathcal{U}\backslash\{a\}$. Avec la remarque 2.4.2 et le théorème 2.5.5, g est holomorphe sur $\mathcal{U}$. On pose alors :

$$\widetilde{f} : z \in \mathcal{U} \longmapsto \begin{cases} \frac{g(z)}{z - a} & \text{si } z \neq a \\ g'(a) & \text{si } z = a \end{cases}.$$

Comme $g(a) = 0$, $\widetilde{f}$ est holomorphe sur $\mathcal{U}$ (on le voit en développant g en série entière en a) et $\widetilde{f}$ prolonge f. □

Théorème 4.1.4. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in \mathcal{U}$ et $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}\backslash\{a\})$. Alors une et une seule des propriétés suivantes est vérifiée :*

(i) f *a une* singularité illusoire *en* a.

(ii) f *a un* pôle *en* a.

(iii) f *a une* singularité essentielle *en* a.

Démonstration. On suppose que la propriété (iii) n'est pas vérifiée. Il existe alors $b \in \mathbb{C}$ et $r, \varepsilon > 0$ t.q. $D(a,r) \subset \mathcal{U}$ et :

$$f\left(D^*(a,r)\right) \cap D(b,\varepsilon) = \varnothing.$$

Autrement dit : $\forall z \in D^*(a,r)$, $|f(z) - b| \geqslant \varepsilon$. Ainsi, la fonction $\widetilde{h} : z \in D^*(a,r) \longmapsto \frac{1}{f(z)-b}$ est holomorphe, et majorée en module par $\frac{1}{\varepsilon}$. D'après le lemme 4.1.3, $\widetilde{h}$ se prolonge en une fonction $h \in \mathcal{H}\left(D(a,r)\right)$. On a alors :

$$\forall z \in D^*(a,r),\ f(z) = b + \frac{1}{h(z)}.$$

Premier cas : $h(a) \neq 0$. Alors f a une singularité illusoire en a et (i) est vérifiée. *Second cas* : $h(a) = 0$. Soit alors m la multiplicité de a comme zéro de h. Il existe k holomorphe sur $D(a,r)$ t.q. $k(a) \neq 0$ et $\forall z \in D(a,r)$, $h(z) = (z-a)^m k(z)$. On peut supposer que r est suffisamment petit pour que k ne s'annule pas sur $D(a,r)$. Alors $\ell = \frac{1}{k}$ est holomorphe sur $D(a,r)$, $\ell(a) \neq 0$ et :

$$\forall z \in D^*(a,r),\ f(z) = \frac{\ell(z) + b(z-a)^m}{(z-a)^m}.$$

Donc f a un pôle d'ordre m en a et (ii) est vérifiée. □

4.2 Fonctions méromorphes

Définition 4.2.1 (Fonction méromorphe)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction f est dite* méromorphe *sur $\mathcal{U}$ s'il existe une partie localement finie $A \subset \mathcal{U}$ t.q. f est holomorphe sur $\mathcal{U}\backslash A$ et tout point de A est un pôle de f. On note $\mathcal{M}\left(\mathcal{U}\right)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur $\mathcal{U}$.*

Proposition 4.2.2. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, g, h deux fonctions non identiquement nulles holomorphes sur $\mathcal{U}$. Alors $\frac{g}{h}$ est holomorphe sur $\mathcal{U}\backslash h^{-1}\left(\{0\}\right)$ (donc méromorphe sur $\mathcal{U}$).*

Remarque 4.2.3. *Si $\mathcal{U}$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, on peut prouver que toute fonction méromorphe sur $\mathcal{U}$ s'écrit comme quotient de deux fonctions non identiquement nulles holomorphes sur $\mathcal{U}$.*

Lemme 4.2.4. *Toute réunion de deux parties localement finies d'un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$ est localement finie.*

Proposition 4.2.5. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$.*

(i) *$\mathcal{M}\left(\mathcal{U}\right)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre unitaire.*

(ii) *Si $\mathcal{U}$ est connexe, alors $\mathcal{M}\left(\mathcal{U}\right)$ est un corps.*

Proposition 4.2.6. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{M}\left(\mathcal{U}\right)$.*

(i) *f' est méromorphe sur $\mathcal{U}$ et a les mêmes pôles que f. Plus précisément, tout pôle d'ordre m de f est un pôle d'ordre $(m+1)$ de f'.*

(ii) *Supposons $\mathcal{U}$ connexe et f' non identiquement nulle sur $\mathcal{U}$. Alors $\frac{f'}{f}$ est méromorphe sur $\mathcal{U}$ et ses pôles sont simples (i.e. d'ordre 1).*

4.3 Théorème des résidus et conséquences

4.3.1 Théorème des résidus

Définition 4.3.1 (Résidus)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$ et $a \in \mathcal{U}$ un pôle d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ de f. Il existe alors V voisinage de a, g holomorphe sur V, $(\alpha_{-k})_{1 \leqslant k \leqslant m} \in \mathbb{C}^m$ t.q.*

$$\forall z \in V \backslash \{a\},\ f(z) = g(z) + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_{-k}}{(z-a)^k}}_{P(z)}.$$

La fonction P est appelée partie principale *de f en a. De plus, le complexe α_{-1} est appelé* résidu *de f en a et noté* $\operatorname{Res}(f,a)$*.*

Lemme 4.3.2. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, γ un chemin fermé $\mathcal{C}^1_{pm}$ dans $\mathcal{U}$ d'image Γ. Soit $a \in \mathcal{U} \backslash \Gamma$ un pôle de f, soit P la partie principale de f en a. Alors :*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma P(z)\ \mathrm{d}z = \operatorname{Ind}_\gamma(a) \cdot \operatorname{Res}(f,a).$$

Théorème 4.3.3 (Théorème des résidus)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$, $a_1, \ldots, a_n$ des points de $\mathcal{U}$ deux à deux distincts. Soit $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U} \backslash \{a_1, \ldots, a_n\})$. On suppose que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, a_k est un pôle de f. Si γ est un chemin fermé $\mathcal{C}^1_{pm}$ dans $\mathcal{U}$ d'image Γ t.q. $\Gamma \cap \{a_1, \ldots, a_k\} = \varnothing$, alors :*

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{Ind}_\gamma(a_k) \cdot \operatorname{Res}(f, a_k)\right).$$

4.3.2 Théorème de l'indice

Théorème 4.3.4 (Théorème de l'indice)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$, $g \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$. On suppose que f n'a qu'un nombre fini de zéros $a_1, \ldots, a_r$. Pour $k \in [\![1,r]\!]$, on note m_k l'ordre de multiplicité de a_k comme zéro de f. De même, on note $b_1, \ldots, b_s$ les pôles de f et $\mu_1, \ldots, \mu_s$ leurs ordres de multiplicité. Soit γ un chemin fermé $\mathcal{C}^1_{pm}$ dans $\mathcal{U}$ dont l'image ne contient aucun zéro ni aucun pôle de f. Alors :*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma g(z) \frac{f'(z)}{f(z)}\ \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{r} m_k g(a_k) \operatorname{Ind}_\gamma(a_k) - \sum_{\ell=1}^{s} \mu_\ell g(b_\ell) \operatorname{Ind}_\gamma(b_\ell).$$

En particulier (pour $g = 1$) :

$$\operatorname{Ind}_{f \circ \gamma}(0) = \sum_{k=1}^{r} m_k \operatorname{Ind}_\gamma(a_k) - \sum_{\ell=1}^{s} \mu_\ell \operatorname{Ind}_\gamma(b_\ell).$$

Démonstration. Calculer les résidus de $g\frac{f'}{f}$ en les a_k et b_k puis appliquer le théorème 4.3.3. □

Remarque 4.3.5. *L'hypothèse de finitude sur les zéros et les pôles n'est pas indispensable. En effet, l'image Γ de γ est un compact de $\mathcal{U}$ donc il existe $\varepsilon, R > 0$ t.q.*

$$\Gamma \subset V = B(0,R) \cap \{t \in \mathbb{C},\ d(t, \mathbb{C} \backslash \mathcal{U}) > \varepsilon\}.$$

Ainsi $\Gamma \subset V \subset \overline{V} \subset \mathcal{U}$. Et V est un ouvert relativement compact de $\mathcal{U}$ donc $f_{|V}$ ne possède qu'un nombre fini de zéros et de pôles. Et pour $a \notin V$, a est dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \backslash \Gamma$ donc $\operatorname{Ind}_\gamma(a) = 0$.

Théorème 4.3.6. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur $\mathcal{U}$ qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction f.*

(i) *Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$ alors $f = 0$ ou f ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$.*

(ii) *Si* $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n *est injective alors* f *est constante ou injective.*

Démonstration. Notons d'abord que selon le théorème de Weierstraß (théorème 3.2.3), f est holomorphe et $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers f'. (i) Supposons que $f \neq 0$ et soit par l'absurde $a \in \mathcal{U}$ un zéro de f. D'après le principe des zéros isolés (théorème 1.4.6), il existe $r > 0$ t.q. $\overline{D(a, 2r)} \subset \mathcal{U}$ et f ne s'annule pas sur $D^*(a, 2r)$. Selon le théorème de l'indice (théorème 4.3.4), il existe $k \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\int_{C(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = k$. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{C(a,r)} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\,\mathrm{d}z = 0$ car f_n ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$. De plus, f ne s'annule pas sur $C(a, r)$, qui est compact, donc il existe $A > 0$ t.q.

$$\forall z \in C(a, r),\ |f(z)| \geqslant A.$$

Ainsi, $\forall z \in C(a, r)$, $\left|\frac{1}{f(z)}\right| \leqslant \frac{1}{A}$. Or $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f' sur $C(a, r)$. On en déduit que $\left(\frac{f_n'}{f_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\frac{f'}{f}$ sur $C(a, r)$. Par conséquent :

$$k = \int_{C(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \lim_{n\to+\infty} \int_{C(a,r)} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\,\mathrm{d}z = 0.$$

C'est absurde. (ii) Supposons par l'absurde que f est non constante et qu'il existe $a \neq b$ t.q. $f(a) = f(b)$. Soit D_a, D_b des disques ouverts disjoints de centres respectifs a, b. Comme f est non constante, $(f - f(a))$ est non identiquement nulle mais admet un zéro sur D_a. Il résulte de (i) qu'il existe une extractrice φ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(f_{\varphi(n)} - f(a)\right)$ a un zéro dans D_a. De même, il existe une extractrice ψ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(f_{\varphi\circ\psi(n)} - f(a)\right)$ a un zéro dans D_b. Comme D_a et D_b sont disjoints, $f_{\varphi\circ\psi(n)}$ est non injective pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est absurde. □

4.3.3 Théorème de Rouché

Lemme 4.3.7. *Soit* $([\alpha, \beta], \gamma)$ *et* $([\alpha, \beta], \delta)$ *deux chemins fermés* $\mathcal{C}^1_{pm}$ *dans un ouvert* $\mathcal{U}$ *de* $\mathbb{C}$*. On suppose que :*

$$\forall t \in [\alpha, \beta],\ |\gamma(t) - \delta(t)| < |\gamma(t)|\,.$$

Alors les indices $\mathrm{Ind}_\gamma(0)$ *et* $\mathrm{Ind}_\delta(0)$ *sont bien définis et on a* $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = \mathrm{Ind}_\delta(0)$*.*

Démonstration. Posons $\varphi = \frac{\delta}{\gamma}$. Alors $\forall t \in [\alpha, \beta]$, $|1 - \varphi(t)| < 1$, i.e. $\varphi\left([\alpha, \beta]\right) \subset D\left(1, 1\right)$. Donc 0 appartient à la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\backslash\varphi\left([\alpha, \beta]\right)$. Selon la proposition 2.2.3, on a :

$$0 = \mathrm{Ind}_\varphi(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\alpha^\beta \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2i\pi}\left(\int_\alpha^\beta \frac{\delta'(t)}{\delta(t)}\,\mathrm{d}t - \int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Ind}_\delta(0) - \mathrm{Ind}_\gamma(0).$$

□

Théorème 4.3.8 (Théorème de Rouché)**.** *Soit* $\mathcal{U}$ *un ouvert étoilé de* $\mathbb{C}$*,* f, g *deux fonctions holomorphes sur* $\mathcal{U}$*,* γ *un chemin fermé* $\mathcal{C}^1_{pm}$ *dans* $\mathcal{U}$ *d'image* Γ*. On suppose que :*

(i) *La fonction* f *n'a qu'un nombre fini* $a_1, \ldots, a_r$ *de zéros dans* $\mathcal{U}$*, de multiplicités respectives* $m_1, \ldots, m_r$*.*

(ii) *La fonction* g *n'a qu'un nombre fini* $b_1, \ldots, b_s$ *de zéros dans* $\mathcal{U}$*, de multiplicités respectives* $\mu_1, \ldots, \mu_s$*.*

(iii) $\forall z \in \Gamma$, $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$.

Alors :

$$\sum_{k=1}^{r} m_k \,\mathrm{Ind}_\gamma\left(a_k\right) = \sum_{\ell=1}^{s} \mu_\ell \,\mathrm{Ind}_\gamma\left(b_\ell\right).$$

Démonstration. Appliquer le lemme 4.3.7 aux chemins $f \circ \gamma$ et $g \circ \gamma$ puis appliquer le théorème de l'indice (théorème 4.3.4). □

Corollaire 4.3.9. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in \mathcal{U}$ et $r > 0$ t.q. $\overline{D(a,r)} \subset \mathcal{U}$. Soit f et g deux fonctions holomorphes sur $\mathcal{U}$ vérifiant :*

$$\forall z \in C(a,r),\ |f(z) - g(z)| < |f(z)|\,.$$

Alors f et g ont le même nombre de zéros (comptés avec leurs multiplicités) dans $D(a,r)$.

Remarque 4.3.10. *Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X] \backslash \mathbb{C}_0[X]$, avec $d \geqslant 1$ et $a_d \neq 0$. On considère $Q = a_d X^d$. Comme $(Q - P)$ est un polynôme de degré $(d-1)$, il existe $R > 0$ t.q. $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \geqslant R \Longrightarrow |Q(z) - P(z)| < |Q(z)|$. Ainsi, ni Q ni P ne s'annule sur $\mathbb{C} \backslash D(a,R)$. Et selon le corollaire 4.3.9, P a autant de zéros que Q dans $D(a,r)$, donc P a d zéros comptés avec leurs multiplicités. Ceci redémontre le théorème de d'Alembert-Gauß (théorème 3.1.4).*

4.4 Calcul d'intégrales à l'aide du théorème des résidus

Lemme 4.4.1 (Lemme du grand cercle ou lemme de Jordan)**.** *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{C}$. Soit $\theta_1 < \theta_2$. On suppose que :*

(i) *Il existe $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $M \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $\forall z \in \mathbb{C} \backslash \overline{D(0, r_0)}$, $|zf(z)| < M$.*

(ii) *Il existe $\ell \in \mathbb{C}$ t.q. pour presque tout $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, on a $re^{i\theta} f\left(re^{i\theta}\right) \xrightarrow[r \to +\infty]{} \ell$.*

Alors, si on note $\gamma_r : \theta \in [\theta_1, \theta_2] \longmapsto re^{i\theta}$ pour $r > r_0$, on a :

$$\int_{\gamma_r} f(z)\ \mathrm{d}z \xrightarrow[r \to +\infty]{} i\ell\,(\theta_2 - \theta_1)\,.$$

Lemme 4.4.2 (Lemme du petit cercle)**.** *Soit f une fonction holomorphe sur $D^*(a, \rho)$, $\theta_1 < \theta_2$. On suppose que a est une singularité illusoire ou un pôle simple de f. Alors, si on note $\gamma_r : \theta \in [\theta_1, \theta_2] \longmapsto a + re^{i\theta}$ pour $0 < r < \rho$, on a :*

$$\int_{\gamma_r} f(z)\ \mathrm{d}z \xrightarrow[r \to 0]{} i \operatorname{Res}(f,a) \cdot (\theta_2 - \theta_1)\,.$$

Démonstration. On pose $g : z \in D^*(a,\rho) \longmapsto f(z) - \frac{\operatorname{Res}(f,a)}{z-a}$. Alors g est holomorphe et a est une singularité illusoire de g. Il existe donc $\rho' \in]0, \rho[$ et $M > 0$ t.q. $\forall z \in D^*(a, \rho')$, $|g(z)| \leqslant M$. Ainsi, pour $r \in]0, \rho'[$, $\left|\int_{\gamma_r} g(z)\ \mathrm{d}z\right| \leqslant ML\left(\gamma_r\right) = Mr\left(\theta_2 - \theta_1\right) \xrightarrow[r \to 0]{} 0$, où $L\left(\gamma_r\right)$ est la longueur de γ_r. On en déduit aisément le résultat. $\square$

Exemple 4.4.3. *On chercher à calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$, pour $t > 0$. On pose $f : z \in \mathbb{C} \backslash \{-i, i\} \longmapsto \frac{e^{itz}}{1+z^2}$. Alors f est holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash \{-i, i\}$ et méromorphe sur $\mathbb{C}$. Pour $r > 0$, on note $\gamma_r : \theta \in [0, \pi] \longmapsto re^{i\theta}$. Alors, selon le théorème des résidus (théorème 4.3.3), on a :*

$$\int_{[-r,r]} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{\gamma_r} f(z)\ \mathrm{d}z = 2i\pi \operatorname{Res}(f, i).$$

Or, à l'aide du lemme du grand cercle (lemme 4.4.1), on montre que $\int_{\gamma_r} f(z)\ \mathrm{d}z \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0$. Et $\int_{[-r,r]} f(z)\ \mathrm{d}z \xrightarrow[r \to +\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f(x)\ \mathrm{d}x$. D'où :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = 2i\pi \operatorname{Res}(f,i) = 2i\pi \lim_{z \to i} \left[(z-i)f(z)\right] = 2i\pi \lim_{z \to i} \left[(z-i)\frac{e^{itz}}{(z-i)(z+i)}\right] = \pi e^{-t}.$$

4.5 Étude locale des applications holomorphes

Théorème 4.5.1. *Soit f une fonction holomorphe non constante sur un voisinage d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$. Soit k l'ordre de la première dérivée non nulle de f en z_0 (i.e. l'ordre de multiplicité de z_0 comme zéro de $(f - f(z_0))$). Alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de z_0 t.q. $f(\mathcal{U})$ est un voisinage ouvert de $f(z_0)$ et pour tout $w \in f(\mathcal{U}) \setminus \{f(z_0)\}$, il existe k points distincts $z_1, \ldots, z_k$ dans $\mathcal{U}$ t.q. $\forall j \in [\![1, k]\!]$, $f(z_j) = w$.*

Démonstration. Comme les zéros de f' et de $(f - f(z_0))$ sont isolés (théorème 1.4.6), il existe $r > 0$ t.q. $\overline{D(z_0, r)}$ est contenu dans le domaine de définition de f et :

$$\forall z \in \overline{D(z_0, r)} \setminus \{z_0\}, \ f'(z) \neq 0 \ \text{ et } \ f(z) \neq f(z_0).$$

On note $\gamma : \theta \in [0, 2\pi] \longmapsto z_0 + re^{i\theta}$. Alors, selon le théorème de l'indice (théorème 4.3.4), on a :

$$k = \mathrm{Ind}_{f\circ\gamma - f(z_0)}(0) = \mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(f(z_0)).$$

Soit $\mathcal{V}$ la composante connexe de $\mathbb{C} \setminus f \circ \gamma([0, 2\pi])$ qui contient $f(z_0)$. On note $\mathcal{U} = D(z_0, r) \cap f^{-1}(\mathcal{V})$. Alors $\mathcal{U}$ est bien un voisinage ouvert de z_0. Et $\mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}$ est constante sur $\mathcal{V}$, qui contient $f(z_0)$, donc :

$$\forall w \in \mathcal{V}, \ \mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(w) = k.$$

Selon le théorème de l'indice (théorème 4.3.4), $(f - w)$ a k zéros (comptés avec leurs multiplicités) dans $D(z_0, r)$ pour tout $w \in \mathcal{V}$. Ces zéros sont deux à deux distincts car $\forall z \in D^*(z_0, r), \ f'(z) \neq 0$. Ceci prouve que $\mathcal{V} = f(\mathcal{U})$, ce qui permet de conclure. □

Remarque 4.5.2. *Le théorème de l'application ouverte (théorème 3.4.12) est un corollaire du théorème 4.5.1. De plus, le fait que les fonctions holomorphes vérifient le principe du maximum peut s'obtenir comme corollaire du théorème de l'application ouverte.*

Corollaire 4.5.3. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$. Si f est injective sur $\mathcal{U}$, alors :*

$$\forall z \in \mathcal{U}, \ f'(z) \neq 0.$$

Remarque 4.5.4.

(i) *La réciproque du corollaire 4.5.3 est fausse ; par exemple $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp'(z) = \exp(z) \neq 0$, mais $\exp$ est non injective.*

(ii) *Le corollaire 4.5.3 serait faux pour les fonctions de la variable réelle ; par exemple, $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^3$ est injective mais $f'(0) = 0$.*

Théorème 4.5.5 (Théorème d'inversion locale)**.** *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathcal{U}$. Si $f'(z_0) \neq 0$, alors il existe des voisinages ouverts V de z_0 et W de $f(z_0)$ t.q. f réalise une bijection de V sur W et l'application réciproque $g : W \to V$ est holomorphe et vérifie :*

$$\forall \omega \in W, \ g'(\omega) = \frac{1}{f' \circ g(\omega)}.$$

Théorème 4.5.6 (Formule d'inversion locale)**.** *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathcal{U}$ t.q. $f'(z_0) \neq 0$. Soit V et W des voisinages respectifs de z_0 et $f(z_0)$ t.q. f réalise une bijection de V sur W (selon le théorème 4.5.5). Alors, pour tout $r > 0$ t.q. $\overline{D(z_0, r)} \subset V$, l'application réciproque $g : W \to V$ de f est donnée par :*

$$\forall \omega \in W, \ g(\omega) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{z f'(z)}{f(z) - \omega} \, \mathrm{d}z.$$

Plus généralement, pour toute fonction h holomorphe sur $g(W)$, on a :

$$\forall \omega \in W, \ h \circ g(\omega) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{h(z) f'(z)}{f(z) - \omega} \, \mathrm{d}z.$$

Démonstration. Appliquer le théorème de l'indice (théorème 4.3.4) à $(f - \omega)$ et h. □

5 Homotopie et holomorphie

5.1 Homotopie et simple connexité

Définition 5.1.1 (Arc, lacet)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. On appellera* arc *dans $\mathcal{U}$ toute application continue $\gamma : [0,1] \to \mathcal{U}$. Un* lacet *est un arc γ t.q. $\gamma(0) = \gamma(1)$.*

Définition 5.1.2 (Arc composé)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Si γ_1, γ_2 sont deux arcs dans $\mathcal{U}$ t.q. $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, on définit l'*arc composé *$\gamma_1 \vee \gamma_2$ par :*

$$(\gamma_1 \vee \gamma_2) : t \in [0,1] \longmapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}.$$

Définition 5.1.3 (Déformation)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, γ_1, γ_2 deux arcs dans $\mathcal{U}$. On appelle* déformation *de γ_1 à γ_2 toute application continue $\delta : [0,1]^2 \to \mathcal{U}$ t.q.*

$$\delta(\cdot, 0) = \gamma_1 \qquad \text{et} \qquad \delta(\cdot, 1) = \gamma_2.$$

Définition 5.1.4 (Homotopie)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$.*

(i) *Deux* arcs *γ_1, γ_2 sont dits* homotopes *dans $\mathcal{U}$ (en tant qu'arcs) s'il existe une déformation δ de γ_1 à γ_2 t.q. $\delta(0, \cdot) = \gamma_1(0)$ et $\delta(1, \cdot) = \gamma_1(1)$ (en particulier, $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ et $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$). On dit alors que δ est une* homotopie *de γ_1 à γ_2.*

(ii) *Deux* lacets *γ_1, γ_2 sont dits* homotopes *dans $\mathcal{U}$ (en tant que lacets) s'il existe une déformation δ de γ_1 à γ_2 t.q. $\delta(0, \cdot) = \delta(1, \cdot)$. On dit alors que δ est une* homotopie *de γ_1 à γ_2.*

Proposition 5.1.5. *L'homotopie est une relation d'équivalence.*

Théorème 5.1.6. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $(a, b, c, d) \in \mathcal{U}^4$. S'équivalent :*

(i) *Tous les arcs allant de a à b dans $\mathcal{U}$ sont homotopes.*

(ii) *Tous les arcs allant de c à d dans $\mathcal{U}$ sont homotopes.*

(iii) *Tous les lacets dans $\mathcal{U}$ sont homotopes.*

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que $\mathcal{U}$ est simplement connexe.

Proposition 5.1.7. *Tout ouvert étoilé est simplement connexe.*

Démonstration. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert étoilé par rapport à un point $z_0 \in \mathcal{U}$. Premièrement, $\mathcal{U}$ est connexe. Soit alors γ un lacet dans $\mathcal{U}$. On définit :

$$\delta : \left| \begin{array}{l} [0,1]^2 \longrightarrow \mathcal{U} \\ (t,u) \longmapsto (1-u)\gamma(t) + uz_0 \end{array} \right. .$$

Alors δ est une homotopie de γ au lacet constant égal à z_0. Donc tout lacet est homotope au lacet constant égal à z_0, donc $\mathcal{U}$ est simplement connexe. □

5.2 Formule de Cauchy

Définition 5.2.1 (Intégrale le long d'un arc)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$. Soit γ un arc dans $\mathcal{U}$. Si $\mathcal{U} = \mathbb{C}$, on choisit $\varepsilon = 1$, sinon on choisit $\varepsilon = d(\gamma([0,1]), \mathbb{C} \backslash \mathcal{U})$. Par uniforme continuité de γ, soit $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ une subdivision de $[0,1]$ t.q. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset D(\gamma(t_i), \varepsilon)$. Selon le corollaire 2.4.3, $f_{D(\gamma(t_i), \varepsilon)}$ admet une primitive F_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, ce qui permet de définir :*

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \left(F_i(\gamma(t_i)) - F_i(\gamma(t_{i-1}))\right).$$

Cette définition de $\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z$ a bien un sens car elle est indépendante du choix de $(t_0, \ldots, t_n)$ et de $(F_1, \ldots, F_n)$. De plus, cette définition coïncide avec la définition 2.1.3 dans le cas où γ est $\mathcal{C}^1$.

Théorème 5.2.2. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, γ_1, γ_2 des arcs (resp. des lacets) homotopes dans $\mathcal{U}$ en tant qu'arcs (resp. en tant que lacets). Alors :*

$$\forall f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}),\ \int_{\gamma_1} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\ \mathrm{d}z.$$

Démonstration. Deux arcs (resp. lacets) homotopes appartiennent à la même composante connexe. On peut donc supposer $\mathcal{U}$ connexe. *Première étape.* On construit ε, $(t_0, \ldots, t_n)$ et $(F_1, \ldots, F_n)$ comme dans la définition 5.2.1. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on note $a_i = \gamma_1(t_i)$ et $b_i = \gamma(t_i)$. Alors, si γ est un arc (resp. un lacet) dans $\mathcal{U}$ t.q. $\forall t \in [0,1]$, $|\gamma(t) - \gamma_1(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} f(z)\ \mathrm{d}z - \int_{\gamma} f(z)\ \mathrm{d}z &= \sum_{i=1}^{n} \left(F_i(a_i) - F_i(a_{i-1})\right) - \sum_{i=1}^{n} \left(F_i(b_i) - F_i(b_{i-1})\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(F_i(a_i) - F_i(b_i)\right) - \sum_{i=1}^{n} \left(F_i(a_{i-1}) - F_i(b_{i-1})\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{[b_i, a_i]} f(z)\ \mathrm{d}z - \sum_{i=1}^{n} \int_{[b_{i-1}, a_{i-1}]} f(z)\ \mathrm{d}z \\
&= \int_{[b_n, a_n]} f(z)\ \mathrm{d}z - \int_{[b_0, a_0]} f(z)\ \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Si γ_1 et γ sont des arcs, alors $a_0 = b_0$ et $a_n = b_n$; si ce sont des lacets, alors $a_0 = a_n$ et $b_0 = b_n$. Dans tous les cas, $\int_{\gamma_1} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{\gamma} f(z)\ \mathrm{d}z$. *Deuxième étape.* Soit δ une homotopie de γ_1 à γ_2. Par uniforme continuité, soit $\eta' > 0$ t.q.

$$\forall t \in [0,1],\ \forall (u, u') \in [0,1]^2,\ |u - u'| < \eta' \Longrightarrow |\delta(t,u) - \delta(t,u')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On considère $\phi : u \in [0,1] \longmapsto \int_{\delta(\cdot,u)} f(z)\ \mathrm{d}z$. D'après la première étape : $\forall (u,u') \in [0,1]^2$, $|u - u'| < \eta' \Longrightarrow \phi(u) = \phi(u')$. Donc ϕ est constante et $\phi(0) = \phi(1)$. □

Corollaire 5.2.3. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ dont les composantes connexes sont simplement connexes. Alors :*

(i) *Toute fonction holomorphe admet une primitive dans $\mathcal{U}$.*

(ii) *Pour tout lacet γ de $\mathcal{U}$:*

$$\forall \omega \in \mathbb{C} \backslash \mathcal{U},\ \mathrm{Ind}_{\gamma}(\omega) = 0.$$

Démonstration. (i) Soit $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$. D'après le théorème 2.4.1, l'intégrale de f sur tout triangle est nulle. D'après le théorème 5.2.2 et le fait que toute composante connexe de $\mathcal{U}$ est simplement connexe, l'intégrale de f sur tout lacet $\mathcal{C}^1_{pm}$ est nulle. D'après le théorème 2.3.2, f admet donc une primitive. (ii) Soit $\omega \in \mathbb{C} \backslash \mathcal{U}$. Alors la fonction $z \longmapsto \frac{1}{z - \omega}$ est holomorphe sur $\mathcal{U}$ donc son intégrale sur γ est nulle. □

Remarque 5.2.4. *Comme* $\mathrm{Ind}_{C(0,1)}(0) = 1$, *et $C(0,1)$ est un lacet $\mathcal{C}^1_{pm}$ dans $\mathbb{C}^*$, le corollaire 5.2.3 prouve que $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe.*

Corollaire 5.2.5. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe sur $\mathcal{U}$. On suppose que f ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$. Alors :*

(i) *Il existe g holomorphe sur $\mathcal{U}$ t.q. $f = \exp \circ g$.*

(ii) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe h holomorphe sur $\mathcal{U}$ t.q. $f = h^n$.*

Démonstration. (i) La fonction $\frac{f'}{f}$ est holomorphe sur $\mathcal{U}$ donc admet une primitive φ selon le corollaire 5.2.3. Soit $z_0 \in \mathcal{U}$ et $w \in \mathbb{C}$ t.q. $e^w = f(z_0)$. Montrer que $g = \varphi - \varphi(z_0) + w$ convient. (ii) $h = e^{\frac{1}{n}g}$ convient. □

Théorème 5.2.6 (Formule de Cauchy)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe sur $\mathcal{U}$ et γ un lacet d'image Γ homotope à un point de $\mathcal{U}$. Alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \omega \in \mathcal{U}\backslash\Gamma,\ \frac{f^{(n)}(\omega)}{n!} \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(\omega) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\omega)^{n+1}}\ \mathrm{d}z.$$

Démonstration. Même démonstration que pour le théorème 2.4.4. □

5.3 Séries de Laurent

Notation 5.3.1 (Couronne)**.** *Pour $a \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant r < R$, on note $\mathfrak{C}(a,r,R) = \{z \in \mathbb{C},\ r < |z-a| < R\}$.*

Définition 5.3.2 (Série de Laurent)**.** *Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, $0 \leqslant r < R$. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_{-n} Z^n$ est supérieur à $\frac{1}{r}$ et que celui de $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n Z^n$ est supérieur à R. On appelle alors* série de Laurent *associée à $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n Z^n$. Elle est absolument convergente sur $\mathfrak{C}(0,r,R)$ et normalement convergente sur toute couronne fermée de centre 0 incluse dans $\mathfrak{C}(0,r,R)$.*

Théorème 5.3.3. *Soit $a \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant r < R$. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathfrak{C}(a,r,R)$. Soit $(\rho_1,\rho_2) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $r < \rho_1 < \rho_2 < R$. Alors :*

$$\forall \omega \in \mathfrak{C}\left(a,\rho_1,\rho_2\right),\ f(\omega) = \frac{1}{2i\pi}\left(\int_{C(a,\rho_2)} \frac{f(z)}{z-\omega}\ \mathrm{d}z - \int_{C(a,\rho_1)} \frac{f(z)}{z-\omega}\ \mathrm{d}z\right).$$

Démonstration. Soit $\omega \in \mathfrak{C}\left(a,\rho_1,\rho_2\right)$. On considère :

$$g : z \in \mathfrak{C}(a,r,R) \longmapsto \begin{cases} \frac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega} & \text{si } z \neq \omega \\ f'(\omega) & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors g est holomorphe sur $\mathfrak{C}(a,r,R)\backslash\{\omega\}$ et continue sur $\mathfrak{C}(a,r,R)$. D'après le lemme 4.1.3, g est holomorphe sur $\mathfrak{C}(a,r,R)$. Or $C\left(a,\rho_1\right)$ et $C\left(a,\rho_2\right)$ sont homotopes dans $\mathfrak{C}(a,r,R)$. D'après le théorème 5.2.2, $\int_{C(a,\rho_1)} g(z)\ \mathrm{d}z = \int_{C(a,\rho_2)} g(z)\ \mathrm{d}z$. On en déduit le résultat en utilisant le fait que $\mathrm{Ind}_{C(a,\rho_1)}(\omega) = 0$ et $\mathrm{Ind}_{C(a,\rho_2)}(\omega) = 1$. □

Théorème 5.3.4. *Soit $a \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant r < R$. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathfrak{C}(a,r,R)$. Alors il existe une unique suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ t.q. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n Z^n$ converge dans $\mathfrak{C}(0,r,R)$ et :*

$$\forall z \in \mathfrak{C}(a,r,R),\ f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \left(z-a\right)^n.$$

On dit que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n (Z-a)^n$ est la série de Laurent *de f dans $\mathfrak{C}(a,r,R)$. De plus, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donnée par :*

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall \rho \in \,]r,R[\,,\ \alpha_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,\rho)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\ \mathrm{d}z.$$

Démonstration. Soit $r < \rho_1 < r_1 < r_2 < \rho_2 < R$. On se place dans le compact $\overline{\mathfrak{C}\left(a,r_1,r_2\right)}$. Utiliser la formule fournie par le théorème 5.3.3. Dans le premier terme, développer en utilisant l'écriture $\frac{1}{z-\omega} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{\omega-a}{z-a}\right)}$; dans le second, utiliser l'écriture $\frac{1}{z-\omega} = -\frac{1}{\omega-a} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{z-a}{\omega-a}\right)}$. □

Corollaire 5.3.5 (Inégalité de Cauchy)**.** *Soit $a \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant r < R$. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathfrak{C}(a,r,R)$. Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n (Z-a)^n$ le développement de Laurent de f. Alors :*

$$\forall \rho \in \,]r,R[\,,\ |\alpha_n| \leqslant \frac{1}{\rho^n} \sup_{|z-a|=\rho} |f(z)|.$$

Proposition 5.3.6. *Soit $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. Soit $f \in \mathcal{H}\left(D^*(a,R)\right)$. Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n (Z-a)^n$ le développement de Laurent de f.*

(i) *Si* $\forall n<0,\ \alpha_n=0$, *alors* f *a une singularité illusoire en* a.

(ii) *Si* $\exists n_0<0,\ \alpha_{n_0}\neq 0$ et $\forall n<n_0,\ \alpha_n=0$, *alors* f *a un pôle en* a.

(iii) *Si* $\forall n_0<0,\ \exists n<n_0,\ \alpha_n\neq 0$, *alors* f *a une singularité essentielle en* a.

Proposition 5.3.7. *Soit* $a\in\mathbb{C}$, $0\leqslant r<R$. *Soit* f *une fonction holomorphe sur* $\mathfrak{C}(a,r,R)$, *de série de Laurent* $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n(Z-a)^n$. *S'équivalent :*

(i) f *admet une primitive dans* $\mathfrak{C}(a,r,R)$.

(ii) $\alpha_{-1}=0$.

5.4 Généralisations

Théorème 5.4.1 (Théorème des résidus). *Soit* $\mathcal{U}$ *un ouvert de* $\mathbb{C}$, $a_1,\dots,a_n$ *des points de* $\mathcal{U}$ *deux à deux distincts. Soit* $f\in\mathcal{H}(\mathcal{U}\setminus\{a_1,\dots,a_n\})$. *Si* γ *est un lacet d'image* Γ *homotope à un point dans* $\mathcal{U}$ *t.q.* $\Gamma\cap\{a_1,\dots,a_k\}=\varnothing$, *alors :*

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z=2i\pi\sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{Ind}_\gamma(a_k)\cdot\mathrm{Res}(f,a_k)\right).$$

Théorème 5.4.2 (Théorème de l'indice). *Soit* $\mathcal{U}$ *un ouvert de* $\mathbb{C}$, $f\in\mathcal{M}(\mathcal{U})$, $g\in\mathcal{H}(\mathcal{U})$. *On suppose que* f *n'a qu'un nombre fini de zéros* $a_1,\dots,a_r$. *Pour* $k\in[\![1,r]\!]$, *on note* m_k *l'ordre de multiplicité de* a_k *comme zéro de* f. *De même, on note* $b_1,\dots,b_s$ *les pôles de* f *et* $\mu_1,\dots,\mu_s$ *leurs ordres de multiplicité. Soit* γ *un lacet homotope à un point dans* $\mathcal{U}$ *et dont l'image ne contient aucun zéro ni aucun pôle de* f. *Alors :*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\ \mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{r}m_k g(a_k)\,\mathrm{Ind}_\gamma(a_k)-\sum_{\ell=1}^{s}\mu_\ell g(b_\ell)\,\mathrm{Ind}_\gamma(b_\ell).$$

En particulier (pour $g=1$*) :*

$$\mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0)=\sum_{k=1}^{r}m_k\,\mathrm{Ind}_\gamma(a_k)-\sum_{\ell=1}^{s}\mu_\ell\,\mathrm{Ind}_\gamma(b_\ell).$$

Théorème 5.4.3 (Théorème de Rouché). *Soit* $\mathcal{U}$ *un ouvert de* $\mathbb{C}$, f,g *deux fonctions holomorphes sur* $\mathcal{U}$, γ *un lacet homotope à un point dans* $\mathcal{U}$, *d'image* Γ. *On suppose que :*

(i) *La fonction* f *n'a qu'un nombre fini* $a_1,\dots,a_r$ *de zéros dans* $\mathcal{U}$, *de multiplicités respectives* $m_1,\dots,m_r$.

(ii) *La fonction* g *n'a qu'un nombre fini* $b_1,\dots,b_s$ *de zéros dans* $\mathcal{U}$, *de multiplicités respectives* $\mu_1,\dots,\mu_s$.

(iii) $\forall z\in\Gamma,\ |f(z)-g(z)|<|f(z)|$.

Alors :

$$\sum_{k=1}^{r}m_k\,\mathrm{Ind}_\gamma(a_k)=\sum_{\ell=1}^{s}\mu_\ell\,\mathrm{Ind}_\gamma(b_\ell).$$

6 Topologie de $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ et représentation conforme

6.1 Espaces vectoriels topologiques et espaces de Fréchet

Définition 6.1.1 (Espace vectoriel topologique). *On appelle* $\mathbb{C}$-espace vectoriel topologique *un espace topologique* E *muni d'une structure d'espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$ *vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $+:E\times E\to E$ *est continue.*

(ii) $\cdot:\mathbb{C}\times E\to E$ *est continue.*

(iii) $\{0\}$ *est un fermé de* E.

Exemple 6.1.2. *Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel topologique.*

Définition 6.1.3 (Base de voisinages d'un espace vectoriel topologique)**.** *Si E est un espace vectoriel topologique, on appelle* base de voisinages *de E toute base de voisinages de* 0 *dans E (i.e. toute famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ de voisinages de* 0 *t.q. tout voisinage de* 0 *contient un élément de $\mathcal{B}$).*

Définition 6.1.4 (Espace vectoriel topologique localement convexe)**.** *Un espace vectoriel topologique est dit* localement convexe *lorsqu'il admet une base de voisinages convexes.*

Définition 6.1.5 (Espace de Fréchet)**.** *On appelle* espace de Fréchet *tout espace vectoriel topologique localement convexe muni d'une métrique complète et invariante par translation.*

Définition 6.1.6 (Semi-norme)**.** *Soit E un espace vectoriel. On appelle* semi-norme *sur E toute application $p : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :*

(i) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$.

(ii) $\forall (x, y) \in E^2,\ p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$.

Définition 6.1.7 (Semi-normes séparantes)**.** *Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{P}$ une famille de semi-normes sur E. On dit que $\mathcal{P}$ est* séparante *lorsque :*

$$\forall x \in E \backslash \{0\},\ \exists p \in \mathcal{P},\ p(x) > 0.$$

Proposition 6.1.8. *Soit E un espace vectoriel et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable séparante de semi-normes sur E. On définit :*

$$d : \left| \begin{array}{l} E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) \longmapsto \max\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{2^{-n} p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)} \end{array} \right. .$$

Alors E, muni de la topologie induite par d, est un espace vectoriel topologique localement convexe, et d est invariante par translation. Ainsi, si d est complète, alors E est de Fréchet.

Démonstration. Le fait que d vérifie l'inégalité triangulaire vient des inégalités suivantes :

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ \frac{a+b}{1+a+b} \leqslant \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \qquad \text{et} \qquad \forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ a \leqslant b \Longrightarrow \frac{a}{1+a} \leqslant \frac{b}{1+b}.$$

La séparation vient du fait que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est séparante, et la symétrie est claire. Donc d est une distance, clairement invariante par translation. Montrer que d induit sur E une structure d'espace topologique localement convexe. □

6.2 Topologie de $\mathcal{H}(\mathcal{U})$

Lemme 6.2.1. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Alors il existe une suite, dite* exhaustive, *$(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de compacts t.q.*

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ K_n \subset \mathring{K}_{n+1}.$$

Démonstration. Montrer que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ci-dessous convient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ K_n = \begin{cases} \overline{D(0,n)} \cap \left\{ x \in \mathbb{C},\ d\left(x, \mathbb{C}\backslash\mathcal{U}\right) \geqslant \frac{1}{n+1} \right\} & \text{si } \mathcal{U} \neq \mathbb{C} \\ \overline{D(0,n)} & \text{si } \mathcal{U} = \mathbb{C} \end{cases}.$$

□

Définition 6.2.2 (Topologie de la convergence uniforme sur tout compact)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $\mathcal{C}^0(\mathcal{U})$ l'espace vectoriel des fonctions continues $\mathcal{U} \to \mathbb{C}$. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de $\mathcal{U}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une semi-norme p_n par :*

$$p_n : f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}) \longmapsto \|f\|_{K_n}^{\infty} \in \mathbb{R}_+.$$

Alors $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille séparante de semi-normes, qui munit $\mathcal{C}^0(\mathcal{U})$ d'une structure d'espace de Fréchet indépendante du choix de l'exhaustion $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Désormais, $\mathcal{C}^0(\mathcal{U})$ sera muni de cette topologie, dite topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Théorème 6.2.3. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$.*

(i) *Le sous-espace vectoriel $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ est fermé dans $\mathcal{C}^0(\mathcal{U})$.*

(ii) *$\mathcal{H}(\mathcal{U})$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact (i.e. la topologie induite par $\mathcal{C}^0(\mathcal{U})$), est un espace de Fréchet.*

(iii) *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $d_k : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{H}(\mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathcal{H}(\mathcal{U}) \\ f & \longmapsto & f^{(k)} \end{array} \right.$ est continue.*

Définition 6.2.4 (Partie bornée)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit qu'une partie $P \subset \mathcal{C}^0(\mathcal{U})$ est* bornée *lorsque :*

$$\forall K \text{ compact de } \mathcal{U},\ \exists M_K \in \mathbb{R}_+,\ \forall f \in P,\ \|f\|_K^{\infty} \leqslant M_K.$$

Lemme 6.2.5. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact de $\mathcal{U}$. Soit $r > 0$ t.q. $\forall a \in K$, $\overline{D(a,r)} \subset \mathcal{U}$. On note $L = \bigcup_{a\in K} \overline{D(a,r)}$. Alors L est un compact de $\mathcal{U}$ et on a :*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}),\ \left\|f^{(k)}\right\|_K^{\infty} \leqslant \frac{k!}{r^k} \|f\|_L^{\infty}.$$

En particulier, si P est une partie bornée de $\mathcal{H}(\mathcal{U})$, alors $\left\{f^{(k)},\ f \in P\right\}$ est aussi une partie bornée de $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Définition 6.2.6 (Partie équicontinue)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Une partie P de $\mathcal{C}^0(\mathcal{U})$ est dite* équicontinue *en un point $z_0 \in \mathcal{U}$ lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall f \in P,\ \forall z \in \mathcal{U},\ |z - z_0| < \eta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

De plus, P est dite équicontinue *sur $\mathcal{U}$ lorsque P est équicontinue en tout point de $\mathcal{U}$.*

Théorème 6.2.7 (Théorème d'Arzelà-Ascoli)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Une partie $P \subset \mathcal{C}^0(\mathcal{U})$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact* ssi *P est équicontinue et bornée.*

Théorème 6.2.8 (Théorème de Montel)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Une partie $P \subset \mathcal{H}(\mathcal{U})$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact* ssi *P est bornée.*

6.3 Biholomorphismes

Définition 6.3.1 (Biholomorphisme)**.** *Soit $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ deux ouverts de $\mathbb{C}$. On dit qu'une application $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est un* biholomorphisme *lorsque f est bijective, holomorphe, et f^{-1} est holomorphe. S'il existe un biholomorphisme $\mathcal{U} \to \mathcal{V}$, on dit que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont biholomorphes.*

Proposition 6.3.2. *Soit $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ deux ouverts de $\mathbb{C}$. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ une bijection holomorphe. Alors f est un biholomorphisme.*

Démonstration. Appliquer le corollaire 4.5.3 et le théorème 4.5.5. $\square$

Notation 6.3.3. *Par la suite, on notera $D = D(0,1)$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.*

Remarque 6.3.4. $\mathbb{C}$ *est homéomorphe à D, mais $\mathbb{C}$ n'est pas biholomorphe à D (à cause du théorème 3.1.3).*

Définition 6.3.5. *Pour $a \in D$, on pose :*

$$\varphi_a : z \in D \longmapsto \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \in D.$$

Alors φ_a est un biholomorphisme de D, et $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{-a}$.

Proposition 6.3.6. *Une application $\psi : D \to D$ est un biholomorphisme* ssi *il existe $a \in D$ et $\lambda \in \mathbb{U}$ t.q.*

$$\psi = \lambda\varphi_a.$$

Démonstration. ($\Leftarrow$) Clair. ($\Rightarrow$) Supposons que ψ est un biholomorphisme. Soit $b = \psi(0)$. On pose $\xi = \varphi_b \circ \psi$. Ainsi, ξ est un biholomorphisme de D et $\xi(0) = 0$. Selon le lemme de Schwarz (théorème 3.4.10) appliqué à ξ et ξ^{-1}, on a :

$$\forall z \in D,\ |\xi(z)| \leqslant z \qquad \text{et} \qquad \forall z \in D,\ \left|\xi^{-1}(z)\right| \leqslant |z|\,.$$

Il vient $\forall z \in D,\ |\xi(z)| = |z|$. On est donc dans le cas d'égalité du lemme de Schwarz ; ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{U}$ t.q. $\forall z \in D,\ \xi(z) = \lambda z$. Donc :

$$\forall z \in D,\ \psi(z) = \varphi_{-b} \circ \xi(z) = \varphi_{-b}(\lambda z) = \lambda\varphi_a(z) \qquad \text{avec } a = -\overline{\lambda}b.$$

□

6.4 Théorème de la représentation conforme de Riemann

Lemme 6.4.1. *Soit f une fonction holomorphe non injective sur D vérifiant $f(D) \subset D$. Alors $|f'(0)| < 1$.*

Démonstration. Soit $b = f(0)$. On pose $g = \varphi_b \circ f$. Ainsi, g est holomorphe non injective sur D, $g(D) \subset D$ et $g(0) = 0$. D'après le lemme de Schwarz (théorème 3.4.10), $|g'(0)| \leqslant 1$. Et si on avait égalité, g serait une rotation, ce qui est impossible car g est non injective. Donc :

$$1 > |g'(0)| = |f'(0)| \cdot |\varphi_b'(b)| = \frac{|f'(0)|}{1-|b|^2} \geqslant |f'(0)|\,.$$

□

Théorème 6.4.2. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $\mathcal{U} \neq \mathbb{C}$ et $\mathcal{U} \neq \varnothing$. On suppose que pour tout $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ ne s'annulant pas sur $\mathcal{U}$, il existe $g \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ t.q. $f = g^2$. Alors $\mathcal{U}$ est biholomorphe à D.*

Démonstration. On note :

$$P = \{f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}),\ f \text{ injective et } f(\mathcal{U}) \subset D\}\,.$$

Première étape : $P \neq \varnothing$. On va construire une application g holomorphe, injective sur $\mathcal{U}$ et t.q. $\exists c \in \mathbb{C},\ \exists r > 0,\ g(\mathcal{U}) \cap \overline{D(c,r)} = \varnothing$. On pourra alors poser $f : z \in \mathcal{U} \longmapsto \frac{r}{g(z)-c} \in \mathbb{C}$, et on aura $f \in P$. Pour construire g, fixons $a \in \mathbb{C}\backslash\mathcal{U}$. La fonction $z \longmapsto z - a$ est holomorphe sur $\mathcal{U}$ et ne s'annule pas. Par hypothèse, il existe $g \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ t.q.

$$\forall z \in \mathcal{U},\ g(z)^2 = z - a.$$

Alors g est injective, et on a $\forall (z, z') \in \mathcal{U}^2,\ g(z) = -g(z') \Longrightarrow z = z'$. Or g ne s'annule pas, donc $\forall \omega \in g(\mathcal{U}),\ (-\omega) \in \mathbb{C}\backslash g(\mathcal{U})$. De plus, $\mathcal{U}$ est connexe, g est holomorphe non constante sur $\mathcal{U}$, donc g est ouverte selon le théorème 3.4.12. Donc il existe $b \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ t.q. $\overline{D(b,r)} \subset g(\mathcal{U})$. En notant $c = -b$, on a donc :

$$\overline{D(c,r)} \subset \mathbb{C}\backslash g(\mathcal{U}).$$

Deuxième étape : $\forall z_0 \in \mathcal{U},\ \forall f \in P,\ f(\mathcal{U}) \subsetneq D \Longrightarrow \exists h \in P,\ |h'(z_0)| > |f'(z_0)|$. En effet, soit $z_0 \in \mathcal{U}$ et $f \in P$ t.q. $f(\mathcal{U}) \subsetneq D$. Soit $a \in D\backslash f(\mathcal{U})$. Alors $\varphi_a \circ f : \mathcal{U} \to D$ est holomorphe et ne s'annule pas. Soit donc $g \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ t.q. $\varphi_a \circ f = g^2$. On note $b = g(z_0)$ et $h = \varphi_b \circ g$. Notons que $g \in P$, d'où on déduit $h \in P$. De plus, $h(z_0) = 0$. On note enfin $\psi = \varphi_{-a} \circ \left(\varphi_{-b}^2\right)$. Alors $\psi : D \to D$ est holomorphe, non injective. Selon le lemme 6.4.1, $|\psi'(0)| < 1$. Or $f = \psi \circ h$, d'où comme $h'(z_0) \neq 0$ (car h est injective) :

$$|f'(z_0)| = |\psi'(0)| \cdot |h'(z_0)| < |h'(z_0)|.$$

Troisième étape. Soit $z_0 \in \mathcal{U}$. Montrons qu'il existe $f \in P$ t.q. $|f'(z_0)| = \max_{g\in P} |g'(z_0)|$. Notons que P est une partie bornée de $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ (car $\forall f \in P,\ f(\mathcal{U}) \subset D$). Selon l'inégalité de Cauchy, $M = \sup_{g\in P} |g'(z_0)| < +\infty$. Et $M > 0$ car les éléments de P sont injectifs. On se donne $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in P^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$|f_n'(z_0)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} M.$$

Selon le théorème de Montel (théorème 6.2.8), on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathcal{U}$ vers une fonction $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$. Et on a $|f'(z_0)| = M$. Comme $M \neq 0$, f est non constante. Selon le théorème 4.3.6, f est injective. De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(\mathcal{U}) \subset D$, donc $f(\mathcal{U}) \subset \overline{D}$. Or f est holomorphe non constante sur $\mathcal{U}$ connexe, donc selon le théorème 3.4.12, $f(\mathcal{U}) \subset \mathring{\overline{D}} = D$. Donc $f \in P$ et :

$$|f'(z_0)| = \max_{g\in P} |g'(z_0)|.$$

Selon la deuxième étape, f est surjective, donc $f : \mathcal{U} \to D$ est une bijection holomorphe, donc un biholomorphisme. $\square$

Théorème 6.4.3 (Théorème de la représentation conforme de Riemann)**.** *Tout ouvert de $\mathbb{C}$, simplement connexe, non vide et distinct de $\mathbb{C}$ est biholomorphe à D.*

7 Produits infinis

7.1 Produits infinis de nombres complexes

Définition 7.1.1 (Produit infini)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On appelle* produit infini *de terme général u_n, noté $\prod u_n$, la suite $(u_n, \prod_{k=0}^n u_k)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^2)^{\mathbb{N}}$. On dit que $\prod_{k=0}^n u_k$ est le* produit partiel *au rang n de $\prod u_n$. Le produit $\prod u_n$ est dit* convergent *lorsque $(\prod_{k=0}^n u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite dans $\mathbb{C}$. On note alors :*

$$\prod_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} u_k.$$

Si en outre $\prod_{n=0}^{\infty} u_n \neq 0$, on dit que $\prod u_n$ est strictement convergent.

Proposition 7.1.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\prod u_n$ est strictement convergent, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.*

Lemme 7.1.3. *Soit $(u_0, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. On note $P_n = \prod_{k=0}^n (1 + u_k)$ et $Q_n = \prod_{k=0}^n (1 + |u_k|)$. Alors :*

(i) $Q_n \leqslant \exp\left(\sum_{k=0}^n |u_k|\right)$,

(ii) $|P_n - 1| \leqslant Q_n - 1$.

Définition 7.1.4 (Produit commutativement convergent)**.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$*. Le produit infini* $\prod u_n$ *est dit* commutativement convergent *lorsque pour toute permutation* $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$*,* $\prod u_{\sigma(n)}$ *est convergent.*

Proposition 7.1.5. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$*. On suppose que* $\sum u_n$ *converge absolument. Alors :*

(i) $\prod(1+u_n)$ *est convergent. Et* $\prod(1+u_n)$ *est strictement convergent* ssi $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq -1$.

(ii) $\prod(1+u_n)$ *est commutativement convergent, et pour toute permutation* $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$*, on a :*

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+u_n) = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1+u_{\sigma(n)}\right).$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, on note $P_n = \prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$ et $T_n^{\sigma} = \prod_{k=0}^{n}\left(1+u_{\sigma(k)}\right)$. Selon le lemme 7.1.3, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |P_n| \leqslant C.$$

Soit $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\sum_{n=n_0}^{\infty}|u_n| \leqslant \varepsilon$. On se donne $n \geqslant n_0$. Il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\{0,\ldots,n\} \subset \{\sigma(0),\ldots,\sigma(m_0)\}$. Ainsi, si $A_m = \{\sigma(0),\ldots,\sigma(m)\}\setminus\{0,\ldots,n\}$ pour $m \geqslant m_0$, on a :

$$\forall m \geqslant m_0,\ |T_m^{\sigma} - P_n| \leqslant |P_n|\left(\exp\left(\sum_{k\in A_m}|u_k|\right) - 1\right) \leqslant |P_n|\left(e^{\varepsilon}-1\right) \leqslant 2|P_n|\varepsilon \leqslant 2C\varepsilon. \qquad (*)$$

En appliquant cette inégalité avec $\sigma = id$, on peut prendre $m_0 = n_0$ (qui est indépendant de n), et on a :

$$\forall m \geqslant n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ |P_m - P_n| \leqslant 2C\varepsilon.$$

Donc $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc converge vers $P \in \mathbb{C}$. Et $(*)$ fournit $T_n^{\sigma} \xrightarrow[n\to+\infty]{} P$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. Ceci prouve la première partie de (i), ainsi que (ii). Reste à étudier la stricte convergence de $\prod(1+u_n)$. Pour cela, notons que $\forall n \geqslant n_0,\ |P_n - P_{n_0}| \leqslant 2|P_{n_0}|\varepsilon$. Donc :

$$\forall n \geqslant n_0,\ |P_n| \geqslant (1-2\varepsilon)|P_{n_0}|.$$

Ainsi $|P| \geqslant (1-2\varepsilon)|P_{n_0}|$. Ainsi, si $P_{n_0} \neq 0$, alors $P \neq 0$. Et si $P_{n_0} = 0$, alors il existe $k \in \{0,\ldots,n_0\}$ t.q. $u_k = -1$, et $P = 0$. □

Corollaire 7.1.6. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1[^{\mathbb{N}}$*. S'équivalent :*

(i) *La série* $\sum u_n$ *converge.*

(ii) *Le produit* $\prod(1-u_n)$ *est strictement convergent.*

Notation 7.1.7. *On note* $\mathrm{Log} \in \mathcal{H}(\mathcal{C}\setminus\mathbb{R}_-)$ *la détermination principale du logarithme (qui existe selon le corollaire 5.2.5 car* $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ *est simplement connexe).*

Proposition 7.1.8. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ *t.q.* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$*. S'équivalent :*

(i) *Le produit* $\prod u_n$ *est strictement convergent.*

(ii) *La série* $\sum \mathrm{Log}\, u_n$ *est convergente (*$\mathrm{Log}\, u_n$ *n'étant défini que pour* n *assez grand).*

Démonstration. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geqslant n_0,\ \Re(u_n) > 0$. On note $P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$ et $S_n = \sum_{k=n_0}^{n}\mathrm{Log}\, u_k$ pour $n \geqslant n_0$. On note de plus $C = \prod_{k=0}^{n_0-1} u_k \neq 0$. Alors :

$$\forall n \geqslant n_0,\ P_n = C\exp(S_n).$$

Cette écriture fait apparaître clairement l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i). Réciproquement, supposons que $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} P \neq 0$. Alors $\exp(S_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{P}{C}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. $\exp\lambda = \frac{P}{C}$. Alors :

$$\exp(S_n - \lambda) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Soit maintenant $n_1 \geqslant n_0$ t.q. $\forall n \geqslant n_1$, $\Re\left(\exp\left(S_n - \lambda\right)\right) > 0$. Pour $n \geqslant n_1$, il existe $k_n \in \mathbb{Z}$ t.q. $S_n - \lambda = \operatorname{Log} \circ \exp\left(S_n - \lambda\right) + 2i\pi k_n$. Donc $S_n - \lambda - 2i\pi k_n = \operatorname{Log} \circ \exp\left(S_n - \lambda\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Or $S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, donc $k_n - k_{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Mais $\left(k_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, donc il existe $n_2 \geqslant n_1$ et $k \in \mathbb{Z}$ t.q. $\forall n \geqslant n_2$, $k_n = k$. Ainsi $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda + 2i\pi k$, d'où le résultat. □

Corollaire 7.1.9. *Soit $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \left(\mathbb{C}^*\right)^{\mathbb{N}}$ t.q. $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$. S'équivalent :*

(i) *Le produit $\prod u_n$ est strictement convergent et commutativement convergent.*

(ii) *La série $\sum \operatorname{Log} u_n$ est absolument convergente.*

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que $\prod u_n$ est absolument convergent.

Proposition 7.1.10. *Soit $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \left(\mathbb{C} \backslash \{-1\}\right)^{\mathbb{N}}$ t.q. $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. S'équivalent :*

(i) *Le produit $\prod \left(1 + u_n\right)$ est absolument convergent.*

(ii) *La série $\sum u_n$ est absolument convergente.*

7.2 Produits infinis de fonctions holomorphes

Définition 7.2.1 (Produit infini de fonctions holomorphes)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\left(f_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}\left(\mathcal{U}\right)^{\mathbb{N}}$. On dit que $\prod f_n$* converge *dans $\mathcal{U}$ lorsque la suite $\left(\prod_{k=0}^{n} f_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens de $\mathcal{H}\left(\mathcal{U}\right)$ (i.e. converge uniformément sur tout compact de $\mathcal{U}$). S'il en est ainsi, la fonction $f = \prod_{n=0}^{\infty} f_n$ est holomorphe.*

Définition 7.2.2 (Convergence absolue uniforme, convergence normale)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\left(f_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}\left(\mathcal{U}\right)^{\mathbb{N}}$.*

(i) *On dit que le produit $\prod f_n$* converge absolument uniformément *(resp.* normalement*) sur une partie $K \subset \mathcal{U}$ lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :*

  (a) *La suite $\left(f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 1 sur K.*

  (b) *La série $\sum \left|\operatorname{Log} f_n\right|$ converge uniformément (resp. normalement) sur K ($\operatorname{Log} f_n$ n'étant définie que pour n assez grand).*

(ii) *On dit que le produit $\prod f_n$ converge absolument uniformément (resp. normalement) sur tout compact de $\mathcal{U}$ lorsque pour tout K compact de $\mathcal{U}$, $\prod f_n$ converge absolument uniformément (resp. normalement) sur K.*

Proposition 7.2.3. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}\left(\mathcal{U}\right)^{\mathbb{N}}$. Soit $K \subset \mathcal{U}$. S'équivalent :*

(i) *Le produit $\prod \left(1 + u_n\right)$ converge absolument uniformément (resp. normalement) sur K.*

(ii) *La série $\sum \left|u_n\right|$ converge uniformément (resp. normalement) sur K.*

Théorème 7.2.4. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\left(f_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}\left(\mathcal{U}\right)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\prod f_n$ converge absolument uniformément (resp. normalement) sur tout compact de $\mathcal{U}$. Alors :*

(i) *La fonction $f = \prod_{n=0}^{\infty} f_n$ est holomorphe sur $\mathcal{U}$.*

(ii) *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $f = f_0 \cdots f_p \cdot \prod_{n=p+1}^{\infty} f_n$.*

(iii) *Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, on a :*

$$\prod_{n=0}^{\infty} f_n = \prod_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}.$$

(iv) *On a :*

$$f^{-1}\left(\{0\}\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}\left(\{0\}\right).$$

De plus, si $a \in f^{-1}\left(\{0\}\right)$, alors l'ordre de multiplicité de a comme zéro de f est la somme des ordres de multiplicité de a comme zéro de chaque f_n.

(v) *La série* $\sum \frac{f_n'}{f_n}$ *converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de* $\mathcal{U}$ *et on a :*

$$\frac{f'}{f} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n'}{f_n}.$$

Exemple 7.2.5. *On définit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ *par* $f_0 = id_{\mathbb{C}}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall z \in \mathbb{C},\ f_n(z) = 1 - \left(\frac{z}{n}\right)^2$. *Alors* $\prod f_n$ *converge normalement sur tout compact de* $\mathbb{C}$. *On note* $f = \prod_{n=n}^{\infty} f_n$. *Alors :*

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z},\ \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi \operatorname{cotan}(\pi z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)},$$

où $\sigma : z \in \mathbb{C} \longmapsto \sin(\pi z)$. *Par connexité de* $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, *on en déduit l'existence de* $c \in \mathbb{C}$ *t.q.* $\sigma = cf$. *En étudiant* σ *et* f *au voisinage de* 0, *on voit que* $c = \pi$, *d'où :*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{n}\right)^2\right).$$

8 Holomorphie et parties localement finies

8.1 Produit canonique de Weierstraß

Définition 8.1.1 (Facteurs élémentaires de Weierstraß). *Pour* $p \in \mathbb{N}$, *on définit :*

$$E_p : z \in \mathbb{C} \longmapsto (1 - z)\exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right).$$

E_p *est appelé* p-ième facteur élémentaire de Weierstraß. *Et on a :*

$$\forall z \in D(0,1),\ E_p(z) = \exp\left(-\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{z^k}{k}\right).$$

Lemme 8.1.2. *Soit* $p \in \mathbb{N}$. *Alors :*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant 1 \Longrightarrow |E_p(z) - 1| \leqslant |z|^{p+1}.$$

Démonstration. Notons que $\forall z \in \mathbb{C},\ -E_p'(z) = z^p \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right)$. Il existe donc une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$ t.q. $\forall z \in \mathbb{C},\ -E_p'(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n z^n$. Comme $E_p(0) = 1$, on en déduit :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ 1 - E_p(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

D'où, pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \leqslant 1$: $\left|\frac{1-E_p(z)}{z^{p+1}}\right| \leqslant \sum_{n=p}^{\infty} a_n \frac{1}{n+1} = 1 - E_p(1) = 1.$ □

Théorème 8.1.3. *Soit* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ *vérifiant* $|z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. *Soit* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *t.q.*

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*,\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{1+p_n} < +\infty.$$

Alors le produit infini $E(z) = \prod_{n=0}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$ *converge normalement sur tout compact de* $\mathbb{C}$. *De plus, l'ensemble des zéros de* E *est* $\{z_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, *et la multiplicité du zéro* a *de* E *est* $|\{n \in \mathbb{N},\ a = z_n\}|$. *On dit que* E *est le* produit canonique de Weierstraß *associé aux suites* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. Soit K un compact de $\mathbb{C}$; soit $r > 0$ t.q. $K \subset D(0,r)$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geqslant n_0,\ |z_n| \geqslant r$. Alors, selon le lemme 8.1.2 :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \forall z \in K,\ \left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \leqslant \left|\frac{z}{z_n}\right|^{1+p_n} \leqslant \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{1+p_n}.$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum \left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|$ est normalement convergente sur K, d'où le résultat avec la proposition 7.2.3. □

8.2 Applications

Théorème 8.2.1 (Théorème de factorisation de Weierstraß)**.** *Soit f une fonction entière ayant un nombre infini de zéros et t.q. $f(0) \neq 0$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des zéros de f, comptés avec leurs multiplicités. Alors il existe une fonction entière g et une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ t.q.*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=0}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Démonstration. Selon le principe des zéros isolés (théorème 1.4.6), $|a_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Il existe donc une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\forall r \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{1+p_n} < +\infty$ (par exemple, $p_n = n$ convient). Selon le théorème 8.1.3, on peut considérer le produit canonique de Weierstraß E associé aux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, la fonction $\frac{f}{E}$ se prolonge en une fonction entière h sans zéros. Par simple connexité de $\mathbb{C}$ (c.f. corollaire 5.2.5), il existe une fonction entière g t.q. $h = e^g$. Donc $f = e^g E$. □

Notation 8.2.2. *Dans la suite du chapitre, étant donné un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$, on considérera la suite exhaustive de compacts $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\forall p \in \mathbb{N},\ K_p = \begin{cases} \overline{D(0,p)} \cap \left\{x \in \mathbb{C},\ d\left(x, \mathbb{C}\backslash\mathcal{U}\right) \geqslant \frac{1}{p+1}\right\} & si\, \mathcal{U} \neq \mathbb{C} \\ \overline{D(0,p)} & si\, \mathcal{U} = \mathbb{C} \end{cases}.$$

Proposition 8.2.3. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ l'exhaustion associée (c.f. notation 8.2.2). Soit $p \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathcal{U}\backslash K_p$.*

(i) *Il existe $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ injective vérifiant $f(a) = 1$ et $\|f\|_{K_p}^{\infty} < 1$.*

(ii) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ admettant a comme unique zéro, l'ordre de ce zéro étant égal à 1, et vérifiant $\|g-1\|_{K_p}^{\infty} \leqslant \varepsilon$.*

Démonstration. (i) Si $|a| > p$, alors $z \longmapsto \frac{z}{a}$ convient. Si $d\left(a, \mathbb{C}\backslash\mathcal{U}\right) < \frac{1}{p+1}$, alors il existe $b \in \mathbb{C}\backslash\mathcal{U}$ t.q. $|a-b| < \frac{1}{p+1}$. Ainsi, $z \longmapsto \frac{a-b}{z-b}$ convient. (ii) Soit f comme dans (i). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $g_n = E_n \circ f$. Comme f est injective, $f'(a) \neq 0$, d'où on déduit $g_n'(a) \neq 0$. Ainsi, a est un zéro d'ordre 1 de g_n. Et d'après le lemme 8.1.2, on a :

$$\|g_n - 1\|_{K_p}^{\infty} \leqslant \left(\|f\|_{K_p}^{\infty}\right)^{n+1}.$$

Comme $\|f\|_{K_p}^{\infty} < 1$, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\|g_n - 1\|_{K_p}^{\infty} \leqslant \varepsilon$. Ainsi, g_n convient. □

Lemme 8.2.4. $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$, $|\alpha\beta - 1| \leqslant |\alpha - 1| \cdot |\beta - 1| + |\alpha - 1| + |\beta - 1|$.

Théorème 8.2.5 (Théorème de Weierstraß)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, A une partie localement finie de $\mathcal{U}$ et $m \in (\mathbb{N}^*)^A$. Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ t.q.*

(i) *Les zéros de f sont exactement les éléments de A.*

(ii) *Pour tout $a \in A$, l'ordre de multiplicité de a comme zéro de f est égal à $m(a)$.*

Démonstration. Soit $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ l'exhaustion associée à $\mathcal{U}$ (c.f. notation 8.2.2). On pose $A_0 = A \cap K_0$, puis, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $A_p = A \cap (K_p\backslash K_{p-1})$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, d'après la proposition 8.2.3 et le lemme 8.2.4, comme A_p est fini, il existe $g_p \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ t.q. $g_p^{-1}(\{0\}) = A_p$, tout $a \in A_p$ est zéro d'ordre $m(a)$ de g_p, et $\|g_p - 1\|_{K_{p-1}}^{\infty} \leqslant 2^{-p}$. Comme tout compact de $\mathcal{U}$ est contenu dans un K_p, la série de fonctions $\sum(g_p - 1)$ converge normalement sur tout compact de $\mathcal{U}$. D'après la proposition 7.2.3, $\prod g_p$ converge normalement sur tout compact de $\mathcal{U}$. Donc $f : z \longmapsto \left(\prod_{a\in A_0}(z-a)^{m(a)}\right)\left(\prod_{p=1}^{\infty} g_p(z)\right)$ convient. □

Corollaire 8.2.6. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$. Alors il existe des fonctions g, h holomorphes sur $\mathcal{U}$ sans zéro commun et t.q. $f = \frac{g}{h}$.*

8.3 Théorème de Mittag-Leffler

8.3.1 Séries de fonctions méromorphes

Définition 8.3.1 (Convergence des séries de fonctions méromorphes)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(\mathcal{U})^{\mathbb{N}}$.*

(i) *On dit que la série $\sum f_n$* converge uniformément *(resp.* normalement*) sur une partie $K \subset \mathcal{U}$ lorsqu'il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q.*

  (a) *$\forall n \geqslant N$, f_n n'a aucun pôle dans K,*

  (b) *La série $\sum_{n\geqslant N} f_n$ converge uniformément (resp. normalement) sur K.*

(ii) *On dit que la série $\sum f_n$ converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de $\mathcal{U}$ lorsque pour tout K compact de $\mathcal{U}$, $\sum f_n$ converge uniformément (resp. normalement) sur K.*

Théorème 8.3.2. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(\mathcal{U})^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de $\mathcal{U}$. Alors la fonction somme $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est méromorphe, la série $\sum f_n'$ converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de $\mathcal{U}$, et on a :*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'.$$

8.3.2 Théorème de Mittag-Leffler

Théorème 8.3.3 (Théorème de Mittag-Leffler)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, A une partie localement finie de $\mathcal{U}$. Pour $a \in A$, soit $P_a \in \mathbb{C}[X]\backslash\{0\}$ sans coefficient constant. Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$ t.q.*

(i) *Les pôles de f sont exactement les éléments de A.*

(ii) *Pour tout $a \in A$, la partie principale de f en a est égale à $P_a\left(\frac{1}{z-a}\right)$.*

Démonstration. *Première étape* : $A = \{a\}$ est un singleton. On écrit $P_a = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k X^k$, avec $\alpha_q \neq 0$. Soit $K \subset \mathcal{U}$ un compact t.q. $a \notin K$. On se donne $f_1 \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ t.q.

$$f_1(a) = 1 \qquad \text{et} \qquad \|f_1\|_K^\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{q\cdot|\alpha_q|}\,[d(a,K)]^q\,.$$

On pose alors $h_1 : z \longmapsto \frac{\alpha_q f_1(z)}{(z-a)^q}$. On a $\|h_1\|_K^\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{q}$, a est le seul pôle de h_1 et sa partie principale est de la forme $P_a\left(\frac{1}{z-a}\right) - \sum_{k=1}^{q-1} \frac{\beta_k}{(z-a)^k}$. Par récurrence, on construit une fonction $h \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$ ayant a pour unique pôle, dont la partie principale en a est $P_a\left(\frac{1}{z-a}\right)$ et t.q. $\|h\|_K^\infty \leqslant \varepsilon$. *Deuxième étape* : cas général. Soit $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ l'exhaustion associée à $\mathcal{U}$ (c.f. notation 8.2.2). On pose $A_0 = A \cap K_0$, puis, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $A_p = A \cap (K_p\backslash K_{p-1})$. D'après la première étape, pour $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $g_p \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$ dont les seuls pôles sont les éléments de A_p, t.q. la partie principale de g_p en $a \in A_p$ est $P_a\left(\frac{1}{z-a}\right)$ et avec $\|g_p\|_{K_{p-1}}^\infty \leqslant 2^{-p}$. Ainsi, $f : z \longmapsto \sum_{a\in A_0} P_a\left(\frac{1}{z-a}\right) + \sum_{p=1}^{\infty} g_p(z)$ convient. □

9 Théorèmes de Bloch, Picard et Schottky

9.1 Théorème de Bloch

Notation 9.1.1. *Si $A \subset \mathbb{C}$, on note $\mathcal{H}\left(\overline{A}\right)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur un voisinage de A.*

Théorème 9.1.2 (Théorème de Bloch)**.** *Soit $f \in \mathcal{H}\left(\overline{D}\right)$ t.q. $f'(0) = 1$ (D est le disque unité ouvert). Alors $f(D)$ contient un disque ouvert de rayon $\frac{1}{16}$.*

Démonstration. Pour $\rho \in [0,1]$, on note $M(\rho) = \max_{|z| \leqslant \rho} |f'(z)|$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $r_k = 1 - 2^{-k}$. (1) Montrer d'abord que $\left\{k \in \mathbb{N},\ 2^{-k} M(r_k) \geqslant 1\right\}$ est fini et non vide ; soit k_0 le plus grand élément de cet ensemble. On note $r = 2^{-k_0}$. (2) Montrer qu'il existe $z_0 \in D$ avec $|z_0| = 1 - r$ et $|f'(z_0)| \geqslant \frac{1}{r}$. (3) On considère maintenant $g : z \in D(0,r) \longmapsto f(z+z_0) - f(z_0)$. Pour $|z| \leqslant \frac{r}{2}$, montrer que $|g'(z)| < \frac{2}{r}$, puis que $|g(z)| \leqslant 1$. (4) Soit $\omega \in \mathbb{C} \backslash g\left(\overline{D\left(0, \frac{r}{2}\right)}\right)$. Montrer l'existence de $h \in \mathcal{H}\left(D\left(0, \frac{r}{2}\right)\right)$ t.q. $h^2 = 1 - \frac{g}{\omega}$. (5) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ t.q. $\forall z \in D\left(0, \frac{r}{2}\right),\ h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Prouver que :

$$|a_1| = |h'(0)| \geqslant \frac{1}{2r|\omega|} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \left(\frac{r}{2}\right)^{2n} \leqslant 1 + \frac{1}{|\omega|}.$$

(6) Montrer que $|\omega| \geqslant \frac{1}{16}$ et en déduire le résultat. □

Corollaire 9.1.3. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ et $c \in \mathcal{U}$ t.q. $f'(c) \neq 0$. Alors pour tout $s \in]0, d(c, \mathbb{C} \backslash \mathcal{U})[$, $f(\mathcal{U})$ contient un disque de rayon $\frac{1}{16} s |f'(c)|$.*

Corollaire 9.1.4. *Si f est une fonction entière non constante, alors $f(\mathbb{C})$ contient des disques de rayon arbitrairement grand.*

9.2 Petit théorème de Picard

Lemme 9.2.1. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ t.q. $\{0,1\} \subset \mathbb{C} \backslash f(\mathcal{U})$. Alors il existe $g \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ t.q.*

$$f = -\exp(i\pi \cosh(2g)).$$

On a de plus :

(i) $\left\{\varepsilon \ln\left(\sqrt{m} + \sqrt{m-1}\right) + \frac{1}{2} in\pi,\ m \in \mathbb{N}^*,\ n \in \mathbb{Z},\ \varepsilon \in \{-1,1\}\right\} \subset \mathbb{C} \backslash g(\mathcal{U})$.

(ii) *$g(\mathcal{U})$ ne contient aucun disque ouvert de rayon 1.*

(iii) *Pour tout $r \in [2, +\infty[$, il existe $M(r) \in \mathbb{R}_+$ t.q. pour tout f comme ci-dessus et vérifiant $\frac{1}{r} \leqslant |f(0)| \leqslant r$, on peut choisir g de sorte que $|g(0)| \leqslant M(r)$.*

Démonstration. Comme $\mathcal{U}$ est simplement connexe et $0 \notin f(\mathcal{U})$, d'après le corollaire 5.2.5, il existe $h \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ t.q.

$$f = \exp(2i\pi h).$$

De plus, $1 \notin f(\mathcal{U})$, donc h et $(h-1)$ ne s'annulent pas. Toujours selon le corollaire 5.2.5, il existe des fonctions u, v holomorphes sur $\mathcal{U}$ t.q. $h = u^2$ et $h - 1 = v^2$. On a alors $(u-v)(u+v) = u^2 - v^2 = 1$. Par conséquent, $(u-v)$ ne s'annule pas donc il existe $g \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ t.q. $u - v = \exp(g)$. On a alors $u + v = \frac{1}{u-v} = \exp(-g)$, d'où on déduit que $2h = 1 + \cosh(2g)$, donc :

$$f = -\exp(i\pi \cosh(2g)).$$

(i) On note $A = \left\{\varepsilon \ln\left(\sqrt{m} + \sqrt{m-1}\right) + \frac{1}{2} in\pi,\ m \in \mathbb{N}^*,\ n \in \mathbb{Z},\ \varepsilon \in \{-1,1\}\right\}$. Soit par l'absurde $\omega \in \mathcal{U}$ t.q. $g(\omega) \in A$. Alors il existe $(\varepsilon, p, q) \in \{-1,1\} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ t.q.

$$\exp(g(\omega)) = i^q \left(\sqrt{p} + \sqrt{p-1}\right)^{\varepsilon} = i^q \left(\sqrt{p} + \varepsilon\sqrt{p-1}\right).$$

Il vient $\exp(-g(\omega)) = i^{-q}\left(\sqrt{p} - \varepsilon\sqrt{p-1}\right)$. Donc :

$$2\cosh(2g(\omega)) = (-1)^q \left[\left(\sqrt{p} + \sqrt{p-1}\right)^2 + \left(\sqrt{p} - \sqrt{p-1}\right)^2\right] = 2(-1)^q (2p-1),$$

d'où $f(\omega) = 1$, ce qui est impossible. Donc $A \subset \mathbb{C} \backslash g(\mathcal{U})$. (ii) Soit $b \in \mathbb{C}$. Alors il existe $a \in A$ t.q. $|\Re(a-b)| < \frac{1}{2}$ et $|\Im(a-b)| < \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $|a-b| < 1$. Ceci prouve que $D(b,1) \cap A \neq \varnothing$, donc $D(b,1) \not\subset g(\mathcal{U})$. (iii) Dans la construction de g, on peut choisir h t.q. $|\Re(h(0))| < \frac{1}{2}$. Or :

$$|f(z)| = \exp(-2\pi \Im(h(z))) \qquad \text{donc} \qquad |\ln|f(0)|| = 2\pi |\Im(h(0))|.$$

On définit maintenant :

$$p : r \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \max_{x \in \left[\frac{1}{r}, r\right]} \frac{|\ln x|}{2\pi}.$$

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $|f(0)| \in \left[\frac{1}{r}, r\right]$. Alors :

$$|h(0)| \leqslant |\Re\left(h(0)\right)| + |\Im\left(h(0)\right)| < \frac{1}{2} + p(r).$$

Or $|u(0) - v(0)| \leqslant \sqrt{|h(0)|} + \sqrt{|h(0) - 1|}$ et $\frac{1}{|u(0)-v(0)|} = |u(0) + v(0)| \leqslant \sqrt{|h(0)|} + \sqrt{|h(0) - 1|}$. Il existe donc $(p_1(r), p_2(r)) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ t.q.

$$p_1(r) \leqslant |u(0) - v(0)| \leqslant p_2(r).$$

On a $u - v = \exp(g)$; on peut choisir g t.q. $|\Im\left(g(0)\right)| \leqslant \pi$. Ainsi :

$$|g(0)| \leqslant |\Re\left(g(0)\right)| + |\Im\left(g(0)\right)| \leqslant \ln|u(0) - v(0)| + \pi \leqslant \pi + \max_{x \in [p_1(r), p_2(r)]} |\ln x| = M(r).$$

□

Lemme 9.2.2. *Soit f une fonction entière t.q. $\{0,1\} \subset \mathbb{C} \backslash f\left(\mathbb{C}\right)$. Alors f est constante.*

Démonstration. D'après le lemme 9.2.1, soit g entière t.q. $f = -\exp\left(i\pi\cosh\left(2g\right)\right)$. On sait que $g\left(\mathbb{C}\right)$ ne contient aucun disque ouvert de rayon 1. D'après le corollaire 9.1.4, g est constante, donc f aussi. □

Théorème 9.2.3 (Petit théorème de Picard)**.** *Soit f une fonction entière non constante. Alors $\mathbb{C} \backslash f\left(\mathbb{C}\right)$ contient au plus un élément.*

Théorème 9.2.4 (Petit théorème de Picard pour les fonctions méromorphes)**.** *Soit h une fonction méromorphe non constante sur $\mathbb{C}$. Alors $\mathbb{C} \backslash h\left(\mathbb{C}\right)$ contient au plus deux éléments.*

Démonstration. Soit a, b, c trois complexes deux à deux distincts t.q. $\{a, b, c\} \subset \mathbb{C} \backslash h\left(\mathbb{C}\right)$. Alors $\frac{1}{h-a}$ est entière et évite deux valeurs distinctes : $\frac{1}{b-a}$ et $\frac{1}{c-a}$. Selon le petit théorème de Picard (théorème 9.2.3), $\frac{1}{h-a}$ est constante, donc h aussi. □

Théorème 9.2.5. *Soit f, g deux fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ et $n \geqslant 3$ t.q. $f^n + g^n = 1$. Alors f et g sont constantes ou admettent un pôle commun.*

Démonstration. On suppose que f et g n'ont pas de pôle commun. Comme f et g ont les mêmes pôles, cela implique que f et g sont entières. Supposons $g \neq 0$. Considérons la fonction méromorphe $\frac{f}{g}$ (qui est bien définie car $f^{-1}\left(\{0\}\right) \cap g^{-1}\left(\{0\}\right) = \varnothing$). Si $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sont les racines de $X^n + 1$, on a :

$$\prod_{\nu=1}^{n} \left(f - \xi_\nu g\right) = 1.$$

Il s'ensuit que $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \subset \mathbb{C} \backslash \left(\frac{f}{g}\right)\left(\mathbb{C}\right)$. Comme $n \geqslant 3$, $\frac{f}{g}$ est constante selon le petit théorème de Picard pour les fonctions méromorphes (théorème 9.2.4). En déduire que f et g sont constantes. □

9.3 Théorème de Schottky

Notation 9.3.1. *Pour $r \in \mathbb{R}_+^*$, on note ici $S(r) = \left\{f \in \mathcal{H}\left(\overline{D}\right),\ |f(0)| \leqslant r \text{ et } \{0,1\} \subset \mathbb{C} \backslash f(D)\right\}$, où D est le disque unité ouvert.*

Lemme 9.3.2. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $g \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ t.q. $g(\mathcal{U})$ ne contient aucun disque ouvert de rayon 1. Si γ est un chemin $\mathcal{C}^1_{pm+}$ dans $\mathcal{U}$ de longueur L allant de a à b, alors :*

$$|g(b)| - |g(a)| \leqslant \frac{16L}{d(\gamma, \mathbb{C}\backslash\mathcal{U})}.$$

Démonstration. Avec le corollaire 9.1.3, obtenir $\forall z \in \mathcal{U},\ |g'(z)| \leqslant \frac{16}{d(z,\mathbb{C}\backslash\mathcal{U})}$. En déduire le résultat en écrivant $|g(b)| - |g(a)| \leqslant |g(b) - g(a)| = \left|\int_\gamma g'(z)\ \mathrm{d}z\right|$. □

Théorème 9.3.3 (Théorème de Schottky)**.** *Il existe une application $L :]0,1[\times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ t.q.*

$$\forall(\theta, r) \in]0,1[\times \mathbb{R}_+^*,\ \forall f \in S(r),\ \forall z \in D(0,\theta),\ |f(z)| \leqslant L(\theta, r).$$

Démonstration. Soit $(\theta, r) \in]0,1[\times \mathbb{R}_+^*$, $f \in S(r)$. D'après le lemme 9.2.1, il existe $g \in \mathcal{H}\left(\overline{D}\right)$ t.q. $f = -\exp(i\pi\cosh(2g))$ et $g\left(\overline{D}\right)$ ne contient aucun disque ouvert de rayon 1. Soit $z \in D(0,\theta)$. On a $d([0,z], \partial D) \geqslant 1 - \theta$. Avec le lemme 9.3.2 :

$$|g(z)| \leqslant |g(0)| + \frac{16}{1-\theta}.$$

On peut supposer que $r \geqslant 2$, et on distingue deux cas. *Premier cas* : $|f(0)| \in \left[\frac{1}{r}, r\right]$. Soit alors $M(r)$ comme dans le lemme 9.2.1. Si on pose $L_1(\theta, r) = \exp\left(\pi\cosh\left(2M(r) + \frac{32}{1-\theta}\right)\right)$, on a $|f(z)| \leqslant L_1(\theta, r)$. *Second cas* : $|f(0)| \in \left[0, \frac{1}{r}\right[$. Comme $r \geqslant 2$, on a alors $\frac{1}{2} \leqslant |1 - f(0)| \leqslant 2$. En appliquant le premier cas à $(1-f)$, on obtient $|f(z)| \leqslant 1 + L_1(\theta, 2)$. *Bilan* : $L(\theta, r) = \max(L_1(\theta, r), 1 + L_1(\theta, 2))$ convient. □

9.4 Amélioration du théorème de Montel

Notation 9.4.1. *Si $\mathcal{U}$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{F}(\mathcal{U}) = \{f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}),\ \{0,1\} \subset \mathbb{C}\backslash f(\mathcal{U})\}$.*

Lemme 9.4.2. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $\omega \in \mathcal{U}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mathcal{F}_* \subset \mathcal{F}(\mathcal{U})$ t.q.*

$$\forall g \in \mathcal{F}_*,\ |g(\omega)| \leqslant r.$$

Alors il existe un voisinage V de ω t.q. $\mathcal{F}_*$ est bornée sur V.

Démonstration. Soit $t > 0$ t.q. $\overline{D(\omega, 2t)} \subset \mathcal{U}$. On se ramène au cas où $\omega = 0$ et $t = \frac{1}{2}$. Alors, selon le théorème de Schottky (théorème 9.3.3) :

$$\forall g \in \mathcal{F}_*,\ \|g\|_{D(\omega,t)}^{\infty} \leqslant L\left(\frac{1}{2}, r\right).$$

□

Lemme 9.4.3. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $p \in \mathcal{U}$. On pose $\mathcal{F}_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathcal{U}),\ |f(p)| \leqslant 1\}$. Alors $\mathcal{F}_1$ est une partie bornée de $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ (au sens de la définition 6.2.4).*

Démonstration. L'ensemble $V = \{\omega \in \mathcal{U},\ \mathcal{F}_1$ est bornée sur un voisinage de $\omega\}$ est un ouvert de $\mathcal{U}$. De plus, d'après le lemme 9.4.2, $p \in V$. Supposons par l'absurde $V \neq \mathcal{U}$. Alors il existe $\omega \in \partial V \cap \mathcal{U}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{F}_1)^{\mathbb{N}}$ t.q. $|f_n(\omega)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. On considère $g_n = \frac{1}{f_n} \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$. On a $g_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'après le lemme 9.4.2, $\{g_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est bornée dans un voisinage de ω. On applique alors le théorème de Montel (théorème 6.2.8) pour extraire de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $\left(g_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans un disque Δ centré en ω vers une fonction $g \in \mathcal{H}(\Delta)$. Comme aucun des g_n ne possède de zéro et $g(\omega) = 0$, le théorème 4.3.6 fournit $g = 0$. Soit $\omega' \in V \cap \Delta$ (car $\omega \in \partial V$ et Δ est un voisinage de ω). On a alors $\left|f_{\varphi(n)}(\omega')\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, ce qui contredit $\omega' \in V$. □

Théorème 9.4.4. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathcal{U})^{\mathbb{N}}$. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite $\left(f_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie l'une des propriétés suivantes :*

(i) $\left(f_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur tout compact vers une fonction f holomorphe.*

(ii) $\left(f_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur tout compact vers ∞.*

Démonstration. Soit $p \in \mathcal{U}$ et $\mathcal{F}_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathcal{U}),\ |f(p)| \leqslant 1\}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite dans $\mathcal{F}_1$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente selon le lemme 9.4.3 et le théorème de Montel (théorème 6.2.8). Sinon, $\left(\frac{1}{f_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite dans $\mathcal{F}_1$. Avec le lemme 9.4.3 et le théorème de Montel, $\left(\frac{1}{f_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $\left(\frac{1}{f_{\varphi(n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers $g \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$. Si g n'a pas de zéro, $\left(f_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers $\frac{1}{g}$. Sinon, $g = 0$ (d'après le théorème 4.3.6), donc $\left(f_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers ∞. □

9.5 Grand théorème de Picard

Théorème 9.5.1 (Grand théorème de Picard)**.** *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(D^*(z_0,1))$. Si f a une singularité essentielle en z_0, alors il existe $\xi_0 \in \mathbb{C}$ t.q. $f(D^*(z_0,1)) \supset \mathbb{C}\setminus\{\xi_0\}$. De plus, tout point de $\mathbb{C}\setminus\xi_0$ est atteint une infinité de fois par f.*

Démonstration. Il suffit de prouver que si $f \in \mathcal{H}(D^*(z_0,1))$ t.q. $\{0,1\} \subset \mathbb{C}\setminus f(D^*(z_0,1))$, alors f ou $\frac{1}{f}$ est bornée. Pour cela, on se ramène au cas où $z_0 = 0$ et on considère $f_n : z \in D^*(0,1) \longmapsto f\left(\frac{z}{n+1}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Selon le théorème 9.4.4, il existe une extractrice φ t.q. $\left(f_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $\left(\frac{1}{f_{\varphi(n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée sur $\partial D\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Dans le premier cas, le principe du maximum permet de prouver que f est bornée autour de 0. Dans le second cas, le même argument montre que $\frac{1}{f}$ est bornée autour de 0. □

Références

[1] H. Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques.*

[2] C. Laurent-Thiébaut. *Fonctions holomorphes.*

[3] C. Laurent-Thiébaut. *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables.*

[4] R. Remmert. *Theory of complex functions.*

[5] P. Tauvel. *Analyse complexe pour la licence 3.*