Recueil d'exercices de mathématiques
pour la première année

Alexis Marchand

16 mai 2019

Table des matières

I Fondements et techniques de base

I.1 Complexes

Exercice I.1.1 ($\star$)**.** *Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ a-t-on $(1+i)^n \in \mathbb{R}$?*

Indications. Penser à la forme exponentielle.

Exercice I.1.2 ($\star$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un point M d'affixe z tel que $nz^n = 1 + \dots + z^{n-1}$. Le point M est-il à l'intérieur du disque unité ?*

Exercice I.1.3 ($\star$)**.**

1. *Écrire sous forme algébrique :*
   a. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{15}$ **b.** $(1+j)^3 + \left(1+j^2\right)^3$, *avec* $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$.
2. *Écrire sous forme exponentielle :*
   a. $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{2018}$ **b.** $1 + e^{i\theta}$.

Indications. Réponses :

1. **a.** $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{15} = -i$ **b.** $(1+j)^3 + \left(1+j^2\right)^3 = -2$.
2. **a.** $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{2018} = 2^{1009}e^{-\frac{5i\pi}{6}}$ **b.** $1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Exercice I.1.4 ($\star$)**.** *Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Donner une CNS pour que $||z| - |z'|| = |z - z'|$.*

Exercice I.1.5 ($\star$)**.** *On pose $u = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Calculer u^4. En déduire $|u|$ et un argument de u.*

Exercice I.1.6 ($\star\star$)**.** *Déterminer les $z \in \mathbb{C}\setminus\{-i\}$ t.q. $\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R}$.*

Exercice I.1.7 ($\star\star$)**.** *On note $H = \{z \in \mathbb{C},\ \Im(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. On définit :*

$$g : \left|\begin{array}{l} \mathbb{C}\setminus\{-i\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \qquad z \longmapsto \dfrac{z-i}{z+i} \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad f : \left|\begin{array}{l} H \longrightarrow D \\ z \longmapsto \dfrac{z-i}{z+i} \end{array}\right. .$$

1. *f et g sont-elles bien définies ?*
2. **a.** *Tout complexe admet-il un antécédent par g ?*
   b. *Deux complexes distincts peuvent-ils avoir la même image par g ?*
3. *Mêmes questions avec f.*

Exercice I.1.8 ($\star\star$)**.** *On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :*

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 2\cos\alpha.$$

Indications. Poser $Z = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$.

Exercice I.1.9 ($\star\star$)**.** *Déterminer l'ensemble E des complexes z t.q. les points d'affixes i, z et iz sont alignés.*

Exercice I.1.10 ($\star\star$)**.** *Soit $z \in \mathbb{C}$.*

1. *Donner une CNS sur z pour que 1, z et z^3 soient alignés.*
2. *Donner une CNS sur z pour que 1, z et $(z+i)$ soient les affixes des sommets d'un triangle dont le cercle circonscrit a pour centre l'origine du repère.*

Exercice I.1.11 ($\star\star$)**.** *Soit $z \in \mathbb{C}$. Donner une CNS sur z pour que l'orthocentre du triangle dont les sommets ont pour affixes z, z^2 et z^3 soit l'origine.*

Indications. Réponse : L'orthocentre est l'origine ssi $\Re(z) = \Re(z^2)$.

Exercice I.1.12 (Droite d'Euler, $\star\star$)**.** *On considère trois points (non alignés) A, B, C dans le plan, d'affixes respectives a, b, c. Le centre de gravité G du triangle (ABC) est l'unique point vérifiant :*

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0.$$

1. *Montrer que G est bien défini et exprimer son affixe en fonction de a, b, c.*

On appelle hauteur issue de A (resp. B, C) la droite passant par A (resp. B, C) et orthogonale à la droite (BC) (resp. (AC), (AB)).

2. *Si M est un point du plan d'affixe z, donner une CNS sur z pour que M appartienne à la hauteur issue de A*

On appelle centre du cercle circonscrit de (ABC) l'unique point Ω vérifiant $A\Omega = B\Omega = C\Omega$.

3. *Montrer que Ω est bien défini.*

4. *Montrer que les trois hauteurs de (ABC) s'intersectent en un point H, appelé orthocentre de (ABC), et vérifiant $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$. En particulier, Ω, H et G sont alignés.*

Exercice I.1.13 ($\star\star$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Déterminer les complexes z t.q. $(z+i)^n = (z-i)^n$.*

Indications. On a $(z+i)^n = (z-i)^n$ ssi $\frac{z+i}{z-i} \in \mathbb{U}_n$.

Exercice I.1.14 ($\star\star$)**.** *Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \leqslant 1$. Montrer que $\Re(z^2 + 4z + 3) \geqslant 0$.*

Indications. Écrire z sous forme exponentielle et se rappeler des formules de trigonométrie..

Exercice I.1.15 ($\star\star$)**.**

1. *En considérant les racines cinquièmes de (-1), montrer que $2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) - 1 = 0$.*

2. *En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$*

Indications.

2. Noter que $\left(-\frac{1}{2}\right)$ est racine de $8X^3 - 4X - 1$. On obtient finalement $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Exercice I.1.16 ($\star\star$)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note respectivement ℓ_n et A_n le périmètre et l'aire du polygone régulier dont les sommets sont les racines n-ièmes de l'unité.*

1. *Donner une expression simple de ℓ_n et A_n.*

2. *Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \ell_n$ et $\lim_{n\to+\infty} A_n$.*

Indications.

1. Réponses : $\ell_n = 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ et $A_n = \frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

2. Utiliser $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Exercice I.1.17 ($\star\star$)**.** *Soit $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une CNS pour que l'équation $(1+iz)^n = q(1-iz)^n$ ait une solution réelle.*

Indications. Montrer d'abord qu'il existe toujours $p \in \mathbb{C}$ t.q. $p^n = q$.

Exercice I.1.18 ($\star\star\star$)**.** *Décrire l'ensemble $\left\{z \in \mathbb{C},\ \exists\lambda \in \mathbb{R},\ z^2 - \lambda z + 1 = 0\right\}$.*

Exercice I.1.19 ($\star\star\star$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. On pose* $P_n : \left|\begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z^2 + \cdots + z^{2n} \end{array}\right.$.

1. *Calculer $\sum_{k=1}^{n-1} \exp\left(i\frac{k\pi}{n}\right)$ et en déduire $\sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.*

2. *Déterminer toutes les racines de* P_n.

3. *En déduire une factorisation de* P_n.

4. *En considérant* $P_n(1)$, *en déduire* $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

5. *En utilisant le coefficient de* z^{2n-1} *de* P_n *retrouver le résultat du* **1.**.

Indications.

3. Écrire $P_n(z) = z^2 \cdot \frac{z^{2n}-1}{(z-1)(z+1)}$.

4. Dans l'expression factorisée de $P_n(1)$, regrouper les facteurs deux par deux pour faire apparaître un complexe multiplié par son conjugué.

Exercice I.1.20 $(\star\star\star)$**.** *Soit* A, B, C *trois points du plan d'affixes respectives* a, b, c.

1. *Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*
   (i) *Le triangle* (ABC) *est équilatéral.*
   (ii) j *ou* j^2 *est racine du polynôme* $aX^2 + bX + c$.
   (iii) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

2. *Généraliser à* n *points.*

Indications. Pour (i) $\Leftrightarrow$ (ii), noter que le triangle (ABC) est équilatéral ssi il existe $\omega \in \mathbb{C}$, $r > 0$, et $u \in \mathbb{U}$ t.q. $(a, b, c) = (\omega + ru, \omega + rju, \omega + rj^2u)$ ou $(a, b, c) = (\omega + ru, \omega + rj^2u, \omega + rju)$. Pour (ii) $\Leftrightarrow$ (iii), calculer $(aj^2 + bj + c)(aj + bj^2 + c)$.

Exercice I.1.21 $(\star\star\star)$**.** *On se propose de déterminer les rationnels* r *t.q.* $\cos(\pi r) \in \mathbb{Q}$. *On se donne* $r = \frac{p}{q}$ *un tel rationnel (avec* $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $p \wedge q = 1$*) et on fixe* $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ *avec* $a \wedge b = 1$ *t.q.* $2\cos(\pi r) = \frac{a}{b}$. *Pour* $k \in \mathbb{N}$, *on pose* $u_k = 2\cos\left(2^k \pi r\right)$.

1. *Exprimer* u_{k+1} *en fonction de* u_k.

2. *Montrer que* $u_k \in \mathbb{Q}$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, *on écrit* $u_k = \frac{a_k}{b_k}$, *avec* $(a_k, b_k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ *et* $a_k \wedge b_k = 1$.

3. *Exprimer* b_{k+1} *en fonction de* b_k.

4. *En remarquant que* $\exp\left(i2^k\pi r\right)$ *est racine* $2q$*-ième de l'unité pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *montrer que l'ensemble* $\{u_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ *est fini.*

5. *En déduire que l'on peut choisir* $k_0 \in \mathbb{N}$ *t.q.* b_{k_0} *soit maximal.*

6. *En considérant* $(k_0 + 1)$, *montrer que* $b_{k_0} = 1$, *puis que* $2\cos(\pi r) \in \mathbb{Z}$.

7. *Conclure.*

Exercice I.1.22 $(\star\star\star)$**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Pour* $k \in \mathbb{Z}$, *calculer* $A_k = \sum_{z \in \mathbb{U}_n} z^k$.

2. *Soit* $N \in \mathbb{N}$ *avec* $N < n$. *Soit* $(a_0, \ldots, a_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$. *On définit* $P : z \in \mathbb{C} \longmapsto \sum_{q=0}^{N} a_q z^q$. *Si* $M = \max\{|P(z)|,\ z \in \mathbb{U}_n\}$, *montrer que* $\forall q \in \{0, \ldots, N\}$, $|a_q| \leqslant M$.

Indications.

1. Réponse : $A_k = n$ si n divise k, $A_k = 0$ sinon.

2. Calculer $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z^{-q} P(z)$ pour $q \in \{0, \ldots, N\}$.

I.2 Logique

Exercice I.2.1 ($\star$).

1. *Soit p, q, r des variables propositionnelles. Montrer que les formules suivantes sont des tautologies :*
   a. $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \Rightarrow p$ **b.** $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (p \vee \neg r) \Rightarrow p$.
2. *Montrer que l'énoncé suivant est vrai quels que soient les prédicats P et Q :*
$$[(\forall x,\ P(x)) \vee (\forall x,\ Q(x))] \Rightarrow [\forall x,\ (P(x) \vee Q(x))]\,.$$
3. *Trouver deux prédicats P et Q qui rendent faux l'énoncé suivant :*
$$[\forall x,\ (P(x) \vee Q(x))] \Rightarrow [(\forall x,\ P(x)) \vee (\forall x,\ Q(x))]\,.$$

Exercice I.2.2 ($\star$). *Utiliser le formalisme mathématique pour écrire les propriétés suivantes :*

1. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction, $\mathcal{P}(f)$ est la propriété "f n'est pas décroissante".*
2. *Si $X \subset \mathbb{N}$ est un ensemble, $\mathcal{P}(X)$ est la propriété "X est majoré".*
3. *Si $X, Y \subset \mathbb{N}$ sont deux ensembles, $\mathcal{P}(X, Y)$ est la propriété "les entiers impairs de X sont plus petits que les entiers pairs de Y".*

I.3 Ensembles, applications et relations

Exercice I.3.1 (Lois de Morgan, $\star$). *Soit E un ensemble et $A, B \subset E$. Montrer que :*
1. $E \backslash (A \cup B) = (E \backslash A) \cap (E \backslash B)$ **2.** $E \backslash (A \cap B) = (E \backslash A) \cup (E \backslash B)$.

Exercice I.3.2 ($\star$). *Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que :*

1. ($g \circ f$ *injective* et f *surjective*) $\Longrightarrow g$ *injective.*
2. ($g \circ f$ *surjective* et g *injective*) $\Longrightarrow f$ *surjective.*

Exercice I.3.3 ($\star$). *On considère $f : E \to F$ une application. Montrer que :*

1. f *est injective* ssi $\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2,\ f(X) \cap f(Y) = f(X \cap Y)$.
2. *Si f est injective, alors $\forall X \in \mathcal{P}(E),\ f\left(\overline{X}\right) \subset \overline{f(X)}$.*
3. *Si f est surjective, alors $\forall X \in \mathcal{P}(E),\ \overline{f(X)} \subset f\left(\overline{X}\right)$.*
4. f *est bijective* ssi $\forall X \in \mathcal{P}(E),\ f\left(\overline{X}\right) = \overline{f(X)}$.

Exercice I.3.4 ($\star$). *Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application. Une partie $X \subset E$ est dite f-stable lorsque $f(X) \subset X$.*

1. *Montrer que $\varnothing$, E et $f(E)$ sont des parties f-stables.*
2. *Montrer que si $X \subset E$ est f-stable, alors $f(X)$ aussi.*
3. *Montrer que si $X \subset E$ est f-stable, alors $f^{-1}(X)$ aussi.*

Exercice I.3.5 ($\star$). *Soit $f : E \to F$ une application. On définit une relation $\mathcal{R}_f$ sur E par :*
$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \mathcal{R}_f y \Longleftrightarrow f(x) = f(y).$$

1. *Montrer que $\mathcal{R}_f$ est d'équivalence.*
2. *Caractériser l'injectivité de f en fonction des classes d'équivalence de $\mathcal{R}_f$.*

Exercice I.3.6 ($\star\star$). *On considère :*
$$f : \left|\begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{sinon} \end{cases} \end{array}\right. .$$

f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice I.3.7 ($\star\star$)**.** *Soit E un ensemble, $A, B \subset E$. On définit :*

$$f : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right. .$$

Donner une CNS sur A et B pour que f soit injective (resp. surjective).

Exercice I.3.8 ($\star\star$)**.** *Soit $f : E \to F$ une application et $B \subset F$. Que vaut $f\left(f^{-1}(B)\right)$?*

Exercice I.3.9 ($\star\star$)**.** *Soit $f : E \to F$.*

1. *Si $(B_i)_{i\in I}$ est une partition de F, montrer que $\left(f^{-1}(B_i)\right)_{i\in I}$ est une partition de E.*

2. *Donner un exemple où f est surjective, $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E, mais $(f(A_i))_{i\in I}$ n'est pas une partition de F.*

Exercice I.3.10 (Fonctions indicatrices, $\star\star$)**.** *Soit E un ensemble. Pour $A \subset E$, on définit la fonction indicatrice de A par :*

$$\mathbb{1}_A : \left| \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right. .$$

1. *Soit $A, B \subset E$. Montrer que $A = B \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.*

2. *Exprimer $\mathbb{1}_{E\setminus A}$, $\mathbb{1}_{A\cap B}$, $\mathbb{1}_{A\cup B}$ (et $\mathbb{1}_{A\triangle B}$) en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.*

Exercice I.3.11 ($\star\star$)**.** *On se place dans $(\mathbb{Q}, \leqslant)$. On considère l'ensemble B des $x \in \mathbb{Q}_+$ t.q. $\lfloor x \rfloor$ a exactement deux chiffres dans son écriture décimale.*

1. *Décrire B.*

2. *B est-il majoré (dans $\mathbb{Q}$) ?*

3. *B a-t-il un plus grand élément ?*

4. *B a-t-il une borne supérieure ?*

Exercice I.3.12 ($\star\star\star$)**.** *On définit :*

$$f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{2}(z + |z|) \end{array} \right. .$$

1. *f est-elle injective ? Déterminer l'image de f.*

2. *Mêmes questions en définissant maintenant $f : \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{C}$.*

Exercice I.3.13 ($\star\star\star$)**.** *Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre. On dit que E est un treillis lorsque tout sous-ensemble de E admet une borne supérieure (dans E).*

1. *Déterminer si les ensembles suivants sont des treillis : $([0,1], \leqslant)$, $(]0,1[, \leqslant)$, $(\mathbb{R}, \leqslant)$, $(\mathcal{P}(X), \subset)$, $(\mathbb{N}, \mid)$.*

2. *Soit E un treillis et $f : E \to E$ une fonction croissante. Montrer que f admet un point fixe.*

Indications.

2. On pourra considérer l'ensemble $A = \{x \in E,\ x \leqslant f(x)\}$ et sa borne supérieure.

Exercice I.3.14 ($\star\star\star$)**.** *Soit E, F, G trois ensembles. Montrer que les ensembles $\left(E^F\right)^G$ et $E^{F\times G}$ sont en bijection.*

Exercice I.3.15 (Théorème de Cantor, $\star\star\star$)**.** *Soit E un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de surjection $E \to \mathcal{P}(E)$.*

Indications. Si $\psi : E \to \mathcal{P}(E)$ est une surjection, on pourra considérer un antécédent par ψ de $\{x \in E,\ x \notin f(x)\}$.

I.4 Raisonnements par récurrence

Exercice I.4.1 ($\star$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer les égalités suivantes :*

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3$.

Exercice I.4.2 ($\star\star$)**.** *Soit X un ensemble. Pour $f : X \to X$, on définit f^n par récurrence en posant $f^0 = \mathrm{id}_X$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{n+1} = f \circ f^n$.*

1. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{n+1} = f^n \circ f$.*

2. *Si f est bijective, montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(f^{-1}\right)^n = \left(f^n\right)^{-1}$.*

Exercice I.4.3 ($\star\star$)**.** *Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |\sin(nx)| \leqslant n\,|\sin x|$.*

Exercice I.4.4 ($\star\star$)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $\mathcal{P}(n) : 2^n > n^2$.*

1. *Pour quelles valeurs de n l'implication $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est-elle vraie ?*

2. *Pour quelles valeurs de n la propriété $\mathcal{P}(n)$ est-elle vraie ?*

Exercice I.4.5 (Inégalité de Bernoulli, $\star\star$)**.**

1. *Montrer (de deux manières différentes) que $\forall a \in \left]-1, +\infty\right[,\ \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\},\ (1+a)^n \geqslant 1 + na$.*

2. *Étudier les cas d'égalité.*

Indications. On pourra raisonner par récurrence ou utiliser le binôme de Newton.

Exercice I.4.6 ($\star\star$)**.** *On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $F_1 = F_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}.$$

Exercice I.4.7 ($\star\star$)**.** *Soit $A \subset \mathbb{N}^*$ t.q.* (i) *$1 \in A$,* (ii) *$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \in A \Longrightarrow 2n \in A$ et* (iii) *$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n+1 \in A \Longrightarrow n \in A$.*

1. *Montrer que $\forall m \in \mathbb{N},\ 2^m \in A$.*

2. *Montrer que $A = \mathbb{N}^*$.*

Exercice I.4.8 (Inégalité arithmético-géométrique, $\star\star\star$)**.** *On cherche à montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \left(x_1, \ldots, x_n\right) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n,\ \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

1. *Démontrer l'inégalité dans le cas $n = 2$ et étudier les cas d'égalité.*

2. *En utilisant le résultat de l'exercice I.4.7, démontrer l'inégalité dans le cas général.*

3. *Étudier les cas d'égalité.*

Indications.

1. Penser au fait que $(a-b)^2 \geqslant 0$.

I.5 Calculs de sommes

Exercice I.5.1 ($\star\star$). *Calculer les sommes suivantes :*

1. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ **2.** $\sum_{k=1}^{n} k\left(k^2+1\right)$ **3.** $\sum_{k=1}^{n}(k-2)(k+3)$.

Indications. Réponses :

1. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
2. $\sum_{k=1}^{n} k\left(k^2+1\right) = \frac{n(n+1)\left(n^2+n+2\right)}{4}$.
3. $\sum_{k=1}^{n}(k-2)(k+3) = \frac{n\left(n^2+3n-16\right)}{3}$.

Exercice I.5.2 ($\star\star$). *Calculer les sommes suivantes :*

1. $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} i^2 j^3$ **2.** $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{i+3} 2j^2 i$ **3.** $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j+1}$ **4.** $\sum_{0\leqslant i+j\leqslant n}(i+j)$.

Indications. Réponses :

1. $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} i^2 j^3 = \frac{n^3(n+1)^3(2n+1)}{24}$.
2. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{i+3} 2j^2 i = 2n(n+1)\left(n^2+5n+9\right)$.
3. $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j+1} = \frac{n(n+1)}{4}$.
4. $\sum_{0\leqslant i+j\leqslant n}(i+j) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

I.6 Systèmes linéaires

Exercice I.6.1 ($\star$). *Résoudre les systèmes* 2×2 *suivants (en discutant éventuellement selon les valeurs des paramètres réels) :*

1. $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ x-my=2 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} (1-\lambda)x+y=-1 \\ x+\lambda y=0 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x+(1+a)y=a \\ -x+y=-a \end{cases}$.

Exercice I.6.2 ($\star\star$). *Résoudre le système suivant selon la valeur du paramètre* $m\in\mathbb{C}$ *:*

$$\begin{cases} x+y+z=m+1 \\ mx+y+(m-1)z=m \\ x+my+z=1 \end{cases}.$$

Indications. Réponse : si $m=1$, le système n'a aucune solution, sinon il a une unique solution donnée par $(x,y,z)=\left(\frac{m^3-m^2-2m+1}{1-m}, \frac{m}{1-m}, m+m^2\right)$.

Exercice I.6.3 ($\star\star$). *Résoudre le système suivant selon la valeur du paramètre* $m\in\mathbb{C}$ *:*

$$\begin{cases} 2x-y+z+t=1 \\ x+2y-z+4t=2 \\ x+7y-4z+11t=m \end{cases}.$$

Indications. Réponse : si $m\neq 5$, le système n'a aucune solution, sinon l'ensemble de solutions est $\left\{\left(-\frac{1}{5}z-\frac{6}{5}t+\frac{4}{5}, \frac{3}{5}z-\frac{7}{5}t+\frac{3}{5}, z, t\right), (z,t)\in\mathbb{C}^2\right\}$.

Exercice I.6.4 ($\star\star$). *Résoudre le système suivant selon la valeur du paramètre* $a\in\mathbb{R}$ *:*

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+2y+az=2 \\ 2x+ay+2z=3 \end{cases}.$$

Indications. Réponse : si $a\notin\{1,-2\}$, le système possède une unique solution donnée par $(x,y,z)=\left(1, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}\right)$; si $a=1$, l'ensemble des solutions est $\left\{\left(\frac{1}{4}-z, \frac{1}{3}, z\right),\ z\in\mathbb{C}\right\}$; si $a=-2$, le système n'a aucune solution.

I.7 Fonctions usuelles

Exercice I.7.1 ($\star$). *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes :*

$$\arctan(\tan x) = x \qquad \textit{et} \qquad \tan(\arctan x) = x.$$

Exercice I.7.2 ($\star$). *Tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :*

$$\begin{array}{ll} a : x \in \mathbb{R} \longmapsto \arcsin(\sin x), & b : x \in \mathbb{R} \longmapsto \arccos(\cos x), \\ c : x \in \mathbb{R} \longmapsto \arcsin(\cos x), & d : x \in \mathbb{R} \longmapsto \arccos(\sin x). \end{array}$$

Exercice I.7.3 ($\star$). *Montrer que toute fonction monotone et périodique est constante.*

Exercice I.7.4 ($\star\star$). *Soit $k \in \mathbb{R}$.*

1. *On suppose ici que $k > 0$. Montrer que l'équation $2^x + 3^x = k$ possède une unique solution réelle.*
2. *Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation $2^x - 3^x = k$.*

Exercice I.7.5 ($\star\star$). *On fixe $n \in \mathbb{Z}$. On définit, pour $N \in \mathbb{N}$:*

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} \left\lfloor \frac{n + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor.$$

1. *Montrer que la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.*
2. *Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ en fonction de $\lfloor 2x \rfloor$.*
3. *Déterminer $S = \lim_{N \to +\infty} S_N$.*

Exercice I.7.6 ($\star\star$).

1. *Comparer $\lim_{x \to 0^+} x^{(x^x)}$ et $\lim_{x \to 0^+} (x^x)^x$.*
2. *Soit $a > 1$. Comparer les fonctions $x \mapsto a^{(a^x)}$ et $x \mapsto x^{(x^a)}$ au voisinage de $+\infty$.*

Exercice I.7.7 ($\star\star$). *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$.*

Indications. Se souvenir que $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

Exercice I.7.8 ($\star\star$).

1. *Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\arctan(n+1) - \arctan(n)$.*
2. *Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.*

Indications. Se souvenir que $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

Exercice I.7.9 ($\star\star$). *On définit $\tanh : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.*

1. *Justifier que $\tanh$ admet une fonction réciproque, notée $\operatorname{argtanh}$.*
2. *Pour $x \in \left]-1, 1\right[$, exprimer $\operatorname{argtanh} x$ en utilisant la fonction $\ln$.*

Exercice I.7.10 ($\star\star$). *Montrer que :*

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ \frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x \leqslant x.$$

Exercice I.7.11 ($\star\star$). *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit :*

$$f_\lambda : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{1}{2} \lambda x^2 - \ln x.$$

Déterminer, s'il existe, le maximum de f_λ.

Exercice I.7.12 ($\star\star$). *On considère $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+x+1}$.*

1. *Déterminer le domaine de définition de f.*
2. *Calculer f'.*
3. *Préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse* 1.
4. *Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de f.*
5. *Tracer la courbe représentative de f.*

Exercice I.7.13 ($\star\star$). *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que $\forall x \in I,\ f(x)^2 = 1$. Montrer que f est constante.*

Exercice I.7.14 ($\star\star$). *On considère $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^{\frac{1}{x}}$.*

1. *Étudier les variations de f.*
2. *Montrer l'existence de et déterminer* $\max f(\mathbb{N}^*)$.

Exercice I.7.15 ($\star\star$). *Déterminer les fonctions convexes et bornées sur $\mathbb{R}$.*

Exercice I.7.16 ($\star\star$). *Comparer π^e et e^π.*

Indications. Se ramener à l'étude de $x \longmapsto \frac{\ln x}{x}$.

Exercice I.7.17 ($\star\star\star$). *Soit A un ensemble, $f : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que, pour tout $a \in A$, $f(a, \cdot)$ est convexe sur $\mathbb{R}$. On pose :*

$$g : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sup_{a \in A} f(a, x).$$

Montrer que g est convexe.

I.8 Équations différentielles

Exercice I.8.1 ($\star$). *On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $xy' = \alpha y$.*

Indications. Réponse : $y(x) = \lambda x^\alpha$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice I.8.2 ($\star\star$). *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 4xy' + \left(3 + 4x^2\right) y = 0$.*

Indications. On pourra introduire $z(x) = \exp\left(x^2\right) y(x)$ et montrer que $z'' + z = 0$.

Exercice I.8.3 ($\star\star$). *On considère l'équation différentielle $xy' = 2y$. Donner l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Exprimer les solutions comme combinaisons linéaires de deux fonctions particulières.*

Indications. Réponse : $y(x) = \lambda \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)x^2 + \mu \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x)x^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice I.8.4 (Équation de Bernoulli, $\star\star$). *Montrer que l'équation $y' = ay^n + by$ se ramène à une équation linéaire, où a et b sont des fonctions continues, $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$.*

Indications. En supposant que y ne s'annule pas, considérer $z = \frac{1}{y^{n-1}}$ et montrer que $z' + (n-1)bz + (n-1)a = 0$.

Exercice I.8.5 ($\star\star$). *Caractériser les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ t.q. toute solution de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ soit bornée sur $\mathbb{R}$.*

Exercice I.8.6 ($\star\star$). *Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $4xy'' + 2y' - y = 0$.*

Indications. Poser $t = \sqrt{x}$ et se ramener à l'équation $z'' = z$.

Exercice I.8.7 ($\star\star$)**.** *On s'intéresse au problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} y'' + |y| = 0 \\ y(0) = a \quad \text{et} \quad y'(0) = 0 \end{cases},$$

où $a \in \mathbb{R}$. Soit y une solution (si elle existe).

1. *Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) \leqslant a$.*

2. *Déterminer y lorsque $a \leqslant 0$.*

Dans la suite, on suppose que $a > 0$.

3. *Montrer que y s'annule en exactement deux points $b_- < 0$ et $b_+ > 0$, que l'on déterminera.*

4. *Déterminer y.*

Exercice I.8.8 ($\star\star\star$)**.** *Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(2-x).$$

Indications. Dériver l'équation fonctionnelle (après justification).

Exercice I.8.9 ($\star\star\star$)**.** *Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = x + \cos x.$$

Indications. Poser $u : x \longmapsto f(x) + f(-x)$ et $v : x \longmapsto f(x) - f(-x)$ et trouver des équations du second ordre vérifiées par u et v.

II Analyse

II.1 Réels

Exercice II.1.1 ($\star$)**.** *Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ t.q. $\forall (a,b) \in A \times B,\ a \leqslant b$. Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leqslant \inf B$.*

Exercice II.1.2 ($\star$)**.** *Soit A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. On suppose que $A \subset B$. Comparer $\inf A$, $\sup A$, $\inf B$ et $\sup B$.*

Exercice II.1.3 ($\star$)**.** *Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que A, B et $A \cup B$ admettent une borne supérieure et que :*

$$\sup (A \cup B) = \max (\sup A, \sup B).$$

Exercice II.1.4 ($\star$)**.** *Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note $A + B = \{a+b,\ (a,b) \in A \times B\}$. Montrer que A, B et $A+B$ admettent une borne supérieure et que :*

$$\sup (A+B) = \sup A + \sup B.$$

Exercice II.1.5 ($\star\star$)**.** *Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer les assertions suivantes :*

1. $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

2. $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor$.

3. $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Exercice II.1.6 ($\star\star$)**.** *Soit A, B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On considère $AB = \{ab,\ (a,b) \in A \times B\}$ et $A + B = \{a+b,\ (a,b) \in A \times B\}$.*

1. *On suppose que A et B sont denses. Les ensembles AB et $A+B$ sont-ils denses ?*

2. *Étude de la réciproque.*

Exercice II.1.7 ($\star\star$). *Soit $A \subset \mathbb{R}$ vérifiant :*

(i) $\forall (a,b) \in A^2,\ \frac{a+b}{2} \in A$,

(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (a,b) \in A^2,\ a < x < b$.

Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Indications. Montrer d'abord que si $(a,b) \in A^2$, alors $[a,b] \cap A$ est dense dans $[a,b]$.

Exercice II.1.8 (Automorphismes de $\mathbb{R}$, $\star\star\star$). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application vérifiant $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y),\ f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.*

1. *Montrer que $f_{|\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$.*

2. *On suppose ici que f est continue. Montrer que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.*

3. *On suppose ici que f vérifie $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x)f(y)$.*

- **a.** *Montrer que f est croissante.*
- **b.** *En déduire que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.*

4. *Qu'en conclut-on si on supprime l'hypothèse $f(1) = 1$?*

Indications.

3. a. Montrer d'abord que $x \geqslant 0 \Longrightarrow f(x) \geqslant 0$ (en utilisant le fait que $f\left(x^2\right) = f(x)^2$).

II.2 Suites numériques

Exercice II.2.1 ($\star$). *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n - 1$. Étudier le comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice II.2.2 ($\star$). *Soit $1 < a < b$. Déterminer les limites des suites définies ci-dessous :*

1. $u_n = \left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n$ **2.** $u_n = \left(3 \cdot 2^{1/n} - 2 \cdot 3^{1/n}\right)^n$.

Exercice II.2.3 ($\star$). *Donner un équivalent simple des suites dont les termes généraux sont les suivants :*

1. $\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \exp\left(\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$ **2.** $\ln\left(\frac{1+en^2}{n^2+n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice II.2.4 ($\star\star$). *Montrer que la suite $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

Exercice II.2.5 (Moyenne arithmético-géométrique, $\star\star$).

1. *Montrer que $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ 2\sqrt{ab} \leqslant a + b$.*

On définit deux suites de réels positifs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n).$$

2. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant v_n$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et $v_{n+1} \leqslant v_n$.*

3. *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite, appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et notée $M(a,b)$.*

4. *Calculer $M(a,a)$ et $M(a,0)$ pour $a \in \mathbb{R}_+$.*

5. *Exprimer $M(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $M(a,b)$ pour $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$.*

Exercice II.2.6 (Théorème de Cesàro, $\star\star$). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :*

$$c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1. *Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, montrer que $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.*

2. *On souhaite étudier la réciproque. On suppose donc que* $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.

a. *Donner un exemple montrant que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas nécessairement convergeante.*

b. *En supposant de plus* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monotone, montrer que* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Soit maintenant $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs avec* $\alpha_0 > 0$. *On définit :*

$$\hat{c}_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k}{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k}.$$

3. *Donner une CNS sur la suite* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pour que, pour toute suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergeant vers* $\ell \in \mathbb{R}$, *la suite* $(\hat{c}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ.

Exercice II.2.7 (Suites de Cauchy, $\star\star$)**.** *Une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite de Cauchy lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geqslant N,\ |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon.$$

1. *Montrer que toute suite convergeante est de Cauchy.*

2. *On se donne* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy. Le but est de montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

a. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*

b. *Étudier les suites* $(\alpha_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *et* $(\beta_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *définies par* $\alpha_p = \inf_{n\geqslant p} u_n$ *et* $\beta_p = \sup_{n\geqslant p} u_n$.

c. *Conclure.*

Exercice II.2.8 ($\star\star$)**.** *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on définit* $g_n : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto nx\ln x - 1$.

1. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *montrer qu'il existe un unique* $\pi_n \in \mathbb{R}_+^*$ *t.q.* $g_n(\pi_n) = 0$.

2. *La suite* $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?*

3. *On note* $\ell = \lim_{n\to+\infty} \pi_n$. *Déterminer* $\lim_{n\to+\infty} n(\pi_n - \ell)$.

Exercice II.2.9 ($\star\star$)**.** *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on définit* $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^{n+1} + x^n + 2x - 1$.

1. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *montrer qu'il existe un unique* $u_n \in \mathbb{R}_+$ *t.q.* $f_n(u_n) = 0$.

2. *Étudier la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice II.2.10 ($\star\star$)**.** *Étudier la suite* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $z_0 \in \mathbb{C}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$.

Exercice II.2.11 ($\star\star$)**.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

2. *Montrer que* $u_n \sim \sqrt{2n}$.

Indications.

2. En utilisant le fait que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \infty$, montrer que $u_{n+1}^2 - u_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$

Exercice II.2.12 (Lemme de Hadamard, $\star\star$)**.**

1. *Soit* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *t.q.* $w_{n+1} - w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. *Démontrer (à l'aide du théorème de Cesàro) que* $\frac{w_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

2. *On s'intéresse à la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ *et :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^2}.$$

a. *Étudier la convergence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. *Déterminer un réel* $\alpha > 0$ *t.q.* $\left(\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

c. *En déduire un équivalent simple de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice II.2.13 ($\star\star$). *Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et on note $r_n = \frac{p_n}{q_n}$, avec $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ et $p_n \wedge q_n = 1$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*

Exercice II.2.14 ($\star\star$). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $[0,1]$. On suppose que $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.*

Exercice II.2.15 ($\star\star\star$). *Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une bijection. Montrer que si la suite $\left(\frac{f(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\ell = 1$.*

Exercice II.2.16 ($\star\star\star$). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On note :*

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n = \lim_{p\to+\infty}\left(\sup_{n\geqslant p} u_n\right) = \inf_{p\in\mathbb{N}}\left(\sup_{n\geqslant p} u_n\right).$$

1. *Montrer que $\limsup_{n\to+\infty} u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Proposer une définition analogue de $\liminf_{n\to+\infty} u_n$ de telle sorte que $\liminf_{n\to+\infty} u_n$ soit la plus petite valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
2. *Pour $\ell \in \mathbb{R}$, montrer que $\ell = \limsup_{n\to+\infty} u_n$* ssi *pour tout $a > \ell$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant a\}$ est fini et pour tout $a < \ell$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant a\}$ est infini.*

Exercice II.2.17 ($\star\star\star$). *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = 2a_{n+1} + a_n.$$

Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Indications. L'équivalence est-elle encore vraie avec $b_n = a_{n+1} + a_n$? Avec $b_n = a_{n+1} + 2a_n$? Que se passe-t-il si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante ? Si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire ?

Exercice II.2.18 ($\star\star\star$). *Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer si elle existe la limite de la suite $\left(\lfloor a^n \rfloor^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*

Exercice II.2.19 ($\star\star\star$). *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle u_n le dernier chiffre de l'écriture en base 10 de n^n. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est périodique et donner une période de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*

Exercice II.2.20 (Centrale '16, $\star\star\star$). *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$.*

1. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ t.q. $P_n(x_n) = 1$.*
2. *Étudier $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*

Exercice II.2.21 (Mines-Pont '16, $\star\star\star$). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donner un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II.3 Limites et fonctions

Exercice II.3.1 ($\star$). *Étudier la continuité en 0 des applications suivantes :*

1. $\lfloor\cdot\rfloor$

2. $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$

3. $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$

4. $x \longmapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

5. $x \longmapsto \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

6. $x \longmapsto \begin{cases} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Exercice II.3.2 ($\star$). *Étudier la continuité de $x \in [0,2] \longmapsto \lfloor x\rfloor + \sqrt{x - \lfloor x\rfloor}$.*

Exercice II.3.3 ($\star$)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue non constante. Montrer que l'ensemble $f(\mathbb{R})$ est infini.*

Exercice II.3.4 ($\star\star$)**.** *Des fonctions vérifiant les propriétés suivantes existent-elles ?*

1. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ discontinue en tout point telle que $|f|$ soit continue en tout point.*
2. *Une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ bijective et discontinue en tout point.*
3. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique non constante n'admettant pas de plus petite période strictement positive.*
4. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique non bornée.*
5. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée sur $\mathbb{R}$ qui n'atteint ses bornes sur aucun segment.*
6. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique non constante et admettant une limite en $+\infty$.*
7. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue t.q. $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.*
8. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injective et non strictement monotone.*

Exercice II.3.5 ($\star\star$)**.** *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue t.q. $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(\mathbb{R}_+) \supset [f(0), \ell[$.*

Exercice II.3.6 ($\star\star$)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Montrer qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en a* ssi *pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.*

Indications. Pour la réciproque, raisonner par contraposée.

Exercice II.3.7 ($\star\star$)**.** *Un marcheur parcourt dix kilomètres en deux heures. Montrer qu'il existe un intervalle d'une heure pendant lequel il parcourt exactement cinq kilomètres.*

Exercice II.3.8 ($\star\star$)**.** *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue t.q.*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f\left(x^2\right) = f(x).$$

Montrer que f est constante.

Indications. On pourra montrer d'abord que $f_{|[0,1]}$ est constante, puis que $f_{|[1,+\infty[}$ aussi.

Exercice II.3.9 ($\star\star$)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante. Montrer que f possède un unique point fixe.*

Exercice II.3.10 ($\star\star$)**.** *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant un point a. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en a. Montrer que $\max(f,g)$ est continue en a.*

Exercice II.3.11 ($\star\star$)**.** *Déterminer l'image de $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x\cos x$.*

Exercice II.3.12 ($\star\star$)**.** *Soit $a < b$ deux réels. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. Montrer que f est continue.*

Exercice II.3.13 ($\star\star$)**.** *Une fonction vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires est-elle nécessairement continue ?*

Indications. Penser à $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice II.3.14 ($\star\star$)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Le but est de démontrer que $\sup_{[a,b]} f = \sup_{]a,b[} f$.*

1. *Quelle inégalité est immédiate ?*
2. *En utilisant le fait que la borne supérieure de f sur $[a,b]$ est atteinte en un point x_0, montrer l'égalité (on pourra distinguer les cas $x_0 \in]a,b[$ et $x_0 \in \{a,b\}$).*

Exercice II.3.15 ($\star\star$)**.**

1. *Montrer qu'il n'existe pas de surjection continue* $[0,1] \to]0,1[$.

2. *Construire une sujection continue* $]0,1[\to [0,1]$.

Exercice II.3.16 ($\star\star$)**.** *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On pose :*

$$g : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \sup_{t\in[0,x]} f(t).$$

Montrer que g *est continue.*

Exercice II.3.17 ($\star\star$)**.** *Soit* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues.*

1. *On suppose que* $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) < g(x)$.

  a. *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant g(x)$.

  b. *Donner un exemple où* $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x)$.

2. *On suppose que* $f_{|\mathbb{Q}}$ *est strictement croissante. Montrer que* f *est strictement croissante.*

Exercice II.3.18 ($\star\star$)**.** *Soit* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue t.q.* $\lim_a f = \lim_b f$. *Montrer que* f *n'est pas injective.*

Exercice II.3.19 (ENSI '85, $\star\star$)**.** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Montrer que* f *est affine si et seulement si* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

Exercice II.3.20 ($\star\star\star$)**.** *Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction* f *strictement croissante est au plus dénombrable.*

Indications. Si $x_1 < x_2$ sont des points de discontinuité de f, montrer l'existence d'intervalle ouverts $I_1 \ni x_1$ et $I_2 \ni x_2$ t.q. $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ et injecter ensuite les points de discontinuité de f dans $\mathbb{Q}$.

Exercice II.3.21 ($\star\star\star$)**.** *Soit* $f, g : [a,b] \to [a,b]$ *deux applications continues telles que* $f \circ g = g \circ f$. *On cherche à prouver l'existence de* $c \in [a,b]$ *t.q.* $f(c) = g(c)$. *On note* f^n *et* g^n *les* n*-ièmes itérées respectives de* f *et* g.

1. *Montrer que* $f > g$ *entraîne* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^n > g^n$.

2. *Montrer que* $f > g$ *entraîne* $\exists K > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b],\ f^n(x) \geqslant Kn + g^n(x)$.

3. *Conclure.*

Indications.

2. Poser $K = \min_{x\in[a,b]} (f(x) - g(x))$.

Exercice II.3.22 ($\star\star\star$)**.** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(x+1) - f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$. *Montrer que*

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell.$$

Indications. On pourra commencer par étudier le cas $\ell = 0$.

Exercice II.3.23 ($\star\star\star$)**.** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *On note* A *l'ensemble des points* x *tels que* f *a un maximum local en* x.

1. *Montrer que* $f(A)$ *est dénombrable.*

2. *On suppose* f *continue et* $A = \mathbb{R}$. *Que dire de* f *?*

Indications.

1. Trouver une injection $f(A) \hookrightarrow \mathbb{Q}^2$.

2. Se rappeler que $f(A)$ est un intervalle.

Exercice II.3.24 ($\star\star\star$)**.** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vérifiant* $f(x) = x - ax^b + o_0(x^b)$, *avec* $a \in]0,+\infty[$, $b \in]1,+\infty[$. *On définit la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $u_0 \in \mathbb{R}_+$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. *Montrer qu'il existe un voisinage V de 0 tel que, si $u_0 \in V$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

2. *Trouver un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Indications.

1. Étudier d'abord la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - av_n^b$.

2. Trouver un $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1}^{\gamma} - u_n^{\gamma} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Utiliser ensuite le théorème de Cesàro.

Exercice II.3.25 (Mines '02, $\star\star\star$). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $f \circ f(a) = a$.*

1. *f admet-elle un point fixe ?*

2. *Généraliser.*

Indications. Si f n'admet pas de point fixe, se ramener au cas où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) < x$ (d'où $a = f \circ f(a) < f(a) < a$).

II.4 Dérivabilité

Exercice II.4.1 ($\star$). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable strictement croissante et bijective. L'application f^{-1} est-elle nécessairement dérivable ? Sinon, quelle hypothèse supplémentaire faut-il ajouter ?*

Indications. Penser à x^3.

Exercice II.4.2 ($\star$). *Étudier la régularité de :*

$$f_\alpha : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases},$$

pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

Exercice II.4.3 ($\star$). *Vrai ou faux ?*

1. *Une fonction dérivable strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ a une dérivée strictement négative.*

2. *Si une fonction n'est pas dérivable en un point a, alors elle n'est pas continue en a.*

3. *Si une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ présente un extremum local en un point a t.q. f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.*

4. *Une fonction dérivable sur un segment est lipschitzienne.*

Exercice II.4.4 ($\star\star$). *Par application du théorème des accroissements finis à* $\ln$ *sur* $[n, n+1]$, *montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ et donner une estimation du comportement asymptotique de cette suite.*

Exercice II.4.5 ($\star\star$). *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue sur $[0,1]$ et dérivable en 0 t.q. $f(0) = 0$. Montrer l'existence de $k \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\forall x \in [0,1]$, $|f(x)| \leqslant kx$.*

Exercice II.4.6 ($\star\star$). *Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f' est décroissante.*

1. *Montrer que $\forall x \in]1, +\infty[$, $f(x+1) - f(x) \leqslant f'(x) \leqslant f(x) - f(x-1)$.*

2. *Montrer que si f a une limite finie en $+\infty$ alors $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.*

3. *La réciproque du* **2.** *est-elle vraie ?*

4. *Le* **2.** *reste-t-il vrai sans l'hypothèse f' décroissante ?*

Indications.

1. Pour $x \in]1, +\infty[$, étudier $u \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{f(x+u)-f(x)}{u} - f'(x)$.

Exercice II.4.7 ($\star\star$)**.** *Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable et s'annulant en $(n+1)$ points de $]a,b[$. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule sur $]a,b[$.*

Exercice II.4.8 ($\star\star$)**.** *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et dérivable t.q. $\lim_{+\infty} f = f(0)$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $f'(c) = 0$.*

Exercice II.4.9 ($\star\star$)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable t.q. $ff' \geqslant 0$. Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un intervalle.*

Exercice II.4.10 ($\star\star$)**.** *On considère :*

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

1. *Tracer (sommairement) la courbe représentative de f.*

2. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un $\alpha_n \in \mathbb{N}$ t.q.*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{\alpha_n}} f(x).$$

3. *En déduire que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

Exercice II.4.11 ($\star\star$)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$. Montrer l'existence de $c \in]a,b[$ t.q.*

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c).$$

Exercice II.4.12 ($\star\star$)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable t.q. $f^2 + (1+f')^2 \leqslant 1$. Montrer que $f = 0$.*

Exercice II.4.13 ($\star\star\star$)**.** *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction deux fois dérivable t.q. il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $\alpha f \leqslant f''$.*

1. *Montrer que f' a une limite en $+\infty$ et déterminer cette limite.*

2. *Montrer que f est décroissante et que $\lim_{+\infty} f = 0$.*

3. *Soit $g : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \alpha f^2(x) - f'^2(x)$. Montrer que g est croissante et que $\lim_{+\infty} g = 0$.*

4. *En posant $h : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto f(x)\exp(\sqrt{\alpha}x)$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leqslant f(0)\exp(-\sqrt{\alpha}x)$.*

Indications.

1. Remarquer d'abord que $f'' > 0$.

4. Calculer h' et remarquer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = (\sqrt{\alpha}f(x) + f'(x))(\sqrt{\alpha}f(x) - f'(x))$.

Exercice II.4.14 ($\star\star\star$)**.** *Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifiant :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f'(x)f''(x) = 0.$$

Indications. Montrer que f est localement affine.

Exercice II.4.15 (Théorème de Darboux, $\star\star\star$)**.** *Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On cherche à montrer que pour tout intervalle $J \subset I$, $f'(J)$ est un intervalle.*

1. *Sous l'hypothèse f $\mathcal{C}^1$, de quel théorème découle le résultat ?*

2. *Montrer le résultat dans le cas général.*

Indications.

2. Si $a, b \in J$, et $d \in [f'(a), f'(b)]$, considérer les fonctions (continues) $\varphi : t \in I \longmapsto \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ et $\psi : t \in I \longmapsto \frac{f(t)-f(b)}{t-b}$. En vertu du théorème des accroissements finis, il suffit de montrer l'existence de $t \in J$ t.q. $\varphi(t) = d$ ou $\psi(t) = d$. Autrement dit, montrer que $d \in \varphi(J) \cup \psi(J)$.

Exercice II.4.16 ($\star\star\star$)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :*

(i) *f est strictement croissante sur I.*

(ii) *L'ensemble $\{x \in I,\ f'(x) > 0\}$ est dense dans I.*

II.5 Développements limités

Exercice II.5.1 ($\star$)**.** *Donner un développement limité en le point et à l'ordre indiqués des fonctions suivantes :*

1. $\tan x$*, en* 0*, à l'ordre* $o\left(x^5\right)$.
2. $e^x \ln(1+x)$*, en* 0*, à l'ordre* $o\left(x^4\right)$.
3. $\ln(1-\sin x)$*, en* 0*, à l'ordre* $o\left(x^4\right)$.
4. $\arctan\left(e^x\right)$*, en* 0*, à l'ordre* $o\left(x^3\right)$.
5. $\frac{\ln x}{x^2}$*, en* 1*, à l'ordre* $o\left((x-1)^3\right)$.
6. $2^x - x^2$*, en* 2*, à l'ordre* $o\left((x-2)^3\right)$.
7. $\sqrt[3]{x^3+x+1} - \sqrt{x^2-x-1}$*, en* $+\infty$*, à l'ordre* $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Indications. Réponses :

1. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right)$.
2. $e^x \ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^4\right)$.
3. $\ln(1-\sin x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o\left(x^4\right)$.
4. $\arctan\left(e^x\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)$.
5. $\frac{\ln x}{x^2} = (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right)$.
6. $2^x - x^2 = 4(\ln 2 - 1)(x-2) + \left(2\ln^2 2 - 1\right)(x-2)^2 + \frac{2}{3}\left(\ln^3 2\right)(x-2)^3 + o\left((x-2)^3\right)$.
7. $\sqrt[3]{x^3+x+1} - \sqrt{x^2-x-1} = \frac{1}{2} + \frac{23}{24x} + \frac{31}{48x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Exercice II.5.2 ($\star$)**.** *Déterminer les limites suivantes :*

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sh}(\sin x)}{\left(e^x-1-x\right)^2}$.
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{1-\sin x} - \sin\left(\frac{x}{1-x}\right)}{x^4}$.
3. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2-\sin^2 x}{(\sin x - x\cos x)^2} - \frac{3}{x^2}\right)$.
4. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^{n^4}$.

Indications. Réponses :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sh}(\sin x)}{\left(e^x-1-x\right)^2} = 0$.
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{1-\sin x} - \sin\left(\frac{x}{1-x}\right)}{x^4} = \frac{1}{6}$.
3. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2-\sin^2 x}{(\sin x - x\cos x)^2} - \frac{3}{x^2}\right) = \frac{1}{5}$.
4. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^{n^4} = \sqrt[24]{e}$.

Exercice II.5.3 ($\star\star$)**.** *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$*, on définit* $f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \left(e^x-1\right)^n$*. Calculer* $f_n^{(k)}(0)$ *pour* $0 \leqslant k \leqslant n$.

Exercice II.5.4 ($\star\star$)**.** *Soit* $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto xe^{x^2}$.

1. *Justifier l'existence de réels* a, b, c *t.q.*

$$f(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o_0\left(x^5\right).$$

2. *Déterminer en fonction de* a, b, c *un développement limité à l'ordre* $o\left(x^5\right)$ *de* f^{-1} *en* 0.

Exercice II.5.5 (Principe des zéros isolés, $\star\star$)**.**

1. *Soit* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction* $\mathcal{C}^\infty$ *et* $a \in \mathbb{R}$ *un zéro de* g *d'ordre fini (i.e.* $g(a) = 0$ *et* $\exists p \in \mathbb{N},\ g^{(p)}(a) \neq 0$*). Montrer que* a *est un zéro isolé, i.e. il existe un* $\eta > 0$ *t.q.* g *ne s'annule en aucun point de* $]a-\eta, a+\eta[\setminus\{a\}$.
2. *On considère :*

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leqslant 0 \end{cases}.$$

   a. *Tracer (sommairement) la courbe représentative de* f.

   b. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, il existe une fonction polynomiale* $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et un* $\alpha_n \in \mathbb{N}$ *t.q.*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{\alpha_n}} f(x).$$

   c. *En déduire que* f *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.

   d. *Que peut-on dire de la série de Taylor de* f *en* 0 *?*
3. *Étudier la réciproque du* **1.**.

Exercice II.5.6 ($\star\star$)**.** *Soit* $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x + \sin x$.

1. *Montrer que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une bijection.*
2. *Donner le développement limité à l'ordre* $o(x^5)$ *de* f^{-1} *en* 0.

Exercice II.5.7 ($\star\star$)**.** *On considère :*

$$f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \int_x^{1/x} e^{-t} \ln t \ \mathrm{d}t.$$

Déterminer un développement limité à l'ordre $o\left((x-1)^5\right)$ *de* f *en* 1.

Exercice II.5.8 ($\star\star$)**.** *On définit une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$.

1. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers une limite que l'on précisera.*
2. *Trouver un* $\gamma \in \mathbb{R}$ *t.q. la suite* $\left(u_{n+1}^\gamma - u_n^\gamma\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
3. *Utiliser le théorème de Cesàro pour en déduire un équivalent de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice II.5.9 ($\star\star$)**.** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^2$*. On suppose que* $M_0 = \sup_{\mathbb{R}} |f|$ *et* $M_2 = \sup_{\mathbb{R}} |f''|$ *sont finis. Montrer que* $M_1 = \sup_{\mathbb{R}} |f'|$ *est fini et que* $M_1^2 \leqslant 2M_0M_2$.

Exercice II.5.10 ($\star\star$)**.** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^2$*. On suppose que* $\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} f'' = 0$.

1. *À l'aide d'une formule de Taylor, majorer* f' *à l'aide de* f *et* f''.
2. *Montrer que* $\lim_{+\infty} f' = 0$.
3. *Trouver des contre-exemples en supprimant l'hypothèse* $\lim_{+\infty} f = 0$ *ou* $\lim_{+\infty} f'' = 0$.

Exercice II.5.11 ($\star\star$)**.**

1. *Pour* $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$*, montrer l'existence de* $\vartheta_x \in]0,1[$ *t.q.*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} \cos(x\vartheta_x).$$

2. *Étudier* $\lim_{x\to 0} \vartheta_x$.

Exercice II.5.12 (ENSI '85, $\star\star$)**.** *Montrer l'existence de* $(a_0, \ldots, a_3) \in \mathbb{N}^4$ *et de* $\varepsilon :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ *avec* $\lim_0 \varepsilon = 0$ *t.q.*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(1+x) = \cfrac{x}{a_0 + \cfrac{x}{a_1 + \cfrac{x}{a_2 + \cfrac{4x}{a_3 + \varepsilon(x)}}}}.$$

Exercice II.5.13 (Mines '01, $\star\star$)**.**

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence d'un unique $x_n \in \mathbb{R}$ t.q. $x_n + e^{x_n} = n$.*

2. *Déterminer la limite puis un équivalent de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

3. *Former un développement asymptotique à deux voire trois termes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice II.5.14 (Polytechnique '17, $\star\star$)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par :*

$$u_0 = a \qquad \textit{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \tanh u_n.$$

Donner la limite, puis un équivalent, puis un développement asymptotique à deux termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II.6 Intégrales sur un segment

Exercice II.6.1 ($\star$)**.** *Calculer les intégrales suivantes :*

1. $\int_{-1}^{1} \frac{e^{2t}}{e^t+1}\,\mathrm{d}t$ **2.** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ **3.** $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$

4. $\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$ **5.** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ **6.** $\int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$

7. $\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Indications. Réponses :

1. $\int_{-1}^{1} \frac{e^{2t}}{e^t+1}\,\mathrm{d}t = e - 1 - e^{-1}$ **2.** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$ **3.** $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{6}$

4. $\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \delta_{m,n}\cdot\pi$ **5.** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}} = \frac{\pi}{2}$ **6.** $\int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}} = \sqrt{2}-1$

7. $\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 4 + 2\sqrt{2}\,(\ln 2 - 1)$.

Exercice II.6.2 ($\star$)**.** *Démontrer que :*

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X],\ \int_{-1}^{1} Q = -i\int_0^{\pi} Q\left(e^{i\theta}\right) e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Exercice II.6.3 (Uniforme continuité, $\star\star$)**.** *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.*

1. *Montrer l'existence de $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f(x)| \leqslant ax + b$.*

2. *Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(nx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.*

Exercice II.6.4 ($\star\star$)**.** *Calculer* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}$.

Indications. Passer au logarithme pour reconnaître une somme de Riemann.

Exercice II.6.5 ($\star\star$)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k\pi}{n^2}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad \textit{et} \qquad v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n^2}\right)\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

1. *Calculer* $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

2. *En déduire* $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

Indications.

1. Utiliser une somme de Riemann.

2. Utiliser le fait que $\sin x = x + \mathcal{O}_0\left(x^3\right)$.

Exercice II.6.6 ($\star\star$)**.** *Étudier la suite de terme général* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k+1)(n+k)}}$.

Indications. On pourra introduire une suite voisine dans laquelle on reconnaîtra une somme de Riemann.

Exercice II.6.7 ($\star\star$)**.** *On pose :*

$$\zeta : x \in]1,+\infty[\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

1. *Montrer que ζ est bien définie.*
2. *Déterminer* $\lim_{1^+} \zeta$.

Indications. Utiliser une comparaison série-intégrale.

Exercice II.6.8 ($\star\star$)**.** *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue t.q. $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.*

Indications. Noter que $\left|f - \mathrm{id}_{[0,1]}\right|$ est une fonction continue sur un segment.

Exercice II.6.9 ($\star\star$)**.** *On fixe $a < b$ deux réels. Donner une CNS sur $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ pour que :*

$$\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|\,.$$

Indications. On pourra écrire $\int_a^b f = \left|\int_a^b f\right| e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice II.6.10 ($\star\star$)**.** *Soit $a < b$ des réels. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q.*

$$\forall k \in \{0,\ldots,n\}\,,\ \int_a^b x^k f(x)\ \mathrm{d}x = 0.$$

Montrer que f admet au moins $(n+1)$ zéros sur $]a,b[$.

Indications. Le résultat suivant est plus fort mais plus facile à montrer : f change de signe au moins $(n+1)$ fois sur $]a,b[$.

Exercice II.6.11 ($\star\star$)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que pour toute application $g \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant $g(0) = g(1) = 0$, $\int_0^1 fg = 0$. Montrer que $f = 0$.*

Indications. Suppose par l'absurde qu'il existe un segment sur lequel f est strictement positive.

Exercice II.6.12 ($\star\star\star$)**.** *On définit :*

$$F : x \longmapsto \int_x^{2x} \frac{t^2\ \mathrm{d}t}{t^2 - \sin^2(t)}.$$

1. *Déterminer le domaine de définition de F et étudier son comportement aux bornes de ce domaine.*
2. *F est elle-dérivable ? A-t-elle des propriétés de parité ?*

Exercice II.6.13 ($\star\star\star$)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Déterminer :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f\left(t^n\right)\ \mathrm{d}t.$$

Indications. Essayer de deviner d'abord le résultat.

Exercice II.6.14 ($\star\star\star$)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}_+)$. Déterminer :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\int_0^1 f^n}.$$

Indications. Noter que f atteint sa borne supérieure.

Exercice II.6.15 (Lemme de Riemann-Lebesgue, $\star\star\star$). *Soit $a<b$ deux réels. Si $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ est continue par morceaux, on souhaite montrer que :*

$$\int_a^b f(x)e^{inx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

1. *Comment prouver le résultat si f est supposée $\mathcal{C}^1$?*

2. *Prouver le résultat dans le cas général.*

Indications.

1. Intégrer par parties.
2. Le prouver d'abord pour les fonctions en escalier.

Exercice II.6.16 (Polytechnique '17, $\star\star\star$). *Soit $a<b$ des réels. Montrer que :*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists C>0,\ \forall f\in\mathcal{C}^1\left([a,b],\mathbb{C}\right),\ \forall x\in[a,b],\ \left|f^2(x)-f^2(a)\right|\leqslant C\int_a^x f^2+\varepsilon\int_a^x f'^2.$$

Indications. Réécrire $|f^2(x)-f^2(a)|$ à l'aide du théorème fondamental de l'analyse. Penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et à l'inéaglité arithmético-géomérique.

II.7 Séries numériques

Exercice II.7.1 ($\star$). *Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :*

1. $1-\tanh n$ **2.** $\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$ **3.** $\frac{1}{\ln(\cosh n)}$

4. $\sqrt[n]{n}-1$ **5.** $\frac{n!}{n^n}$ **6.** $\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\ln n}\right)}\right)^2$.

Exercice II.7.2 ($\star$). *Montrer la convergence et calculer les sommes des séries dont les termes généraux sont les suivants :*

1. $\frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$ **2.** $\arctan^2\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$ **3.** $\frac{n}{n^4+n^2+1}$ **4.** $\frac{n+1}{3^n}$.

Exercice II.7.3 ($\star\star$). *Montrer la convergence de la série de terme général $u_n=\frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}$ et en calculer la somme.*

Indications. On pourra introduire la suite de terme général $v_n=\sqrt{n}u_n$ et calculer $v_{n-1}-v_n$.

Exercice II.7.4 ($\star\star$). *Soit $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$. On définit, pour $n\in\mathbb{N}^*$:*

$$u_n=\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\frac{n}{\ln^\alpha n}}.$$

Pour quelles valeurs de α la série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ? Convergente ?

Indications. La somme d'une série semi-convergente et d'une série absolument convergente est semi-convergente.

Exercice II.7.5 ($\star\star$). *On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$:*

$$u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Étudier la convergence, puis l'absolue convergence, de $\sum u_n$.

Indications. Penser au critère spécifique des séries alternées.

Exercice II.7.6 (Série harmonique, $\star\star$). *Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $H_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}$. Montrer que la suite $(H_n-\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite notée γ. Prolonger le développement asymptotique de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ jusqu'à l'ordre $o\left(\frac{1}{n}\right)$.*

Exercice II.7.7 ($\star\star$)**.** *Quels sont les triplets $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ t.q. la série $\sum \left(a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} + c\sqrt{n+2}\right)$ converge ? En cas de convergence, calculer la somme de la série.*

Indications. Pour le calcul de la somme, faire apparaître une somme télescopique.

Exercice II.7.8 ($\star\star$)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $v_n = \sum_{k=1}^n \ln^2 k$ et $u_n = \frac{1}{v_n}$. Donner un équivalent simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et étudier la convergence de $\sum u_n$.*

Exercice II.7.9 ($\star\star$)**.** *Déterminer un équivalent simple de $\left(\sum_{k=n}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*

Exercice II.7.10 ($\star\star$)**.** *Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une injection. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{f(n)}{n^2}$?*

Exercice II.7.11 ($\star\star$)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ t.q. $\sum u_n$ diverge. Que peut-on dire des séries $\sum u_n^2$, $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$, $\sum \frac{u_n}{1+nu_n}$ et $\sum \frac{u_n}{1+n^2u_n}$?*

Exercice II.7.12 ($\star\star\star$)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note w_n le n-ième entier naturel non nul ne contenant pas de 9 dans son écriture décimale. Déterminer la nature de $\sum \frac{1}{w_n}$.*

Indications. On pourra étudier d'abord le nombre ν_n d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$ ne contenant pas de 9 dans leurs écritures décimales.

Exercice II.7.13 ($\star\star\star$)**.** *Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose :*

$$u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + \alpha n + \beta}\right).$$

Étudier la nature de $\sum u_n$ en fonction des valeurs de α et β.

Indications. Utiliser le fait que $n^2 + \alpha n + \beta = (n + \frac{\alpha}{2})^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4}$ puis effectuer un développement limité.

Exercice II.7.14 (Un exemple de transformation d'Abel, $\star\star\star$)**.** *On fixe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.*

1. *Quelle est la nature de $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$? Lorsque $\alpha \leqslant 1$ et $\theta \equiv 0 \mod 2\pi$?*

On suppose désormais que $\alpha \leqslant 1$ et $\theta \not\equiv 0 \mod 2\pi$. On introduit la suite de terme général $\sigma_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$.

2. *Montrer que $\sigma_n = \mathcal{O}(1)$.*

3. *En écrivant $\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} = \frac{\sigma_n - \sigma_{n-1}}{n^\alpha}$, conclure quant à la nature de la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.*

Indications.

3. On pourra tenter de passer de $\frac{\sigma_n - \sigma_{n-1}}{n^\alpha}$ à une écriture de la forme $\sigma_n\left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)$.

Exercice II.7.15 (Polytechnique '16, $\star\star\star$)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.*

1. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite notée ℓ et dont on précisera le signe.*

2. *Montrer que $\ell = -\left(1 + \sqrt{2}\right)\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{\sqrt{p}}$.*

3. *Montrer que $u_n = \ell + \frac{1}{2\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.*

4. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = -\sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{p}\left(\sqrt{p}+\sqrt{p-1}\right)^2}$.*

III Algèbre générale

III.1 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Exercice III.1.1 ($\star$)**.** *On suppose que a, b, c sont des entiers relatifs non multiples de 3. Montrer que $a^2+b^2+c^2$ est multiple de 3.*

Exercice III.1.2 ($\star$)**.** *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 4^n + 15n \equiv 1 \mod 9$.*

Indications. Raisonner sur les classes de congruence de n modulo 3.

Exercice III.1.3 ($\star$)**.** *Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations diophantiennes suivantes :*
1. $3s + 20t = 7$ **2.** $12x + 15y + 20z = 7$.

Exercice III.1.4 ($\star$)**.** *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. Si $a \wedge b = 1$, montrer que $a \wedge (bc) = a \wedge c$.*

Exercice III.1.5 ($\star$)**.** *Résoudre les systèmes suivants :*

1. $\begin{cases} x \equiv 2 & \mod 140 \\ x \equiv -3 & \mod 99 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 2x+3y \equiv 5 & \mod 8 \\ 4x+3y \equiv 1 & \mod 8 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 6x+7y \equiv 0 & \mod 37 \\ 6x-7y \equiv 30 & \mod 37 \end{cases}$.

Exercice III.1.6 ($\star\star$)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On note de plus v_2 la valuation 2-adique.*

1. *On pose $\alpha = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} v_2(k)$. Montrer qu'il existe un unique $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$ t.q. $\alpha = v_2(k_0)$.*

2. *En déduire que $h_n \notin \mathbb{N}$.*

Exercice III.1.7 (Nombres de Mersenne et de Fermat, $\star\star$)**.**

1. *Si p est un nombre premier, l'entier $M_p = 2^p - 1$ est appelé p-ième nombre de Mersenne.*

  a. *Soit $(a, n) \in (\mathbb{N}_{\geqslant 2})^2$. Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.*

  b. *Les nombres de Mersenne sont-ils tous premiers ?*

2. *Pour $n \in \mathbb{N}$, l'entier $F_n = 2^{2^n} + 1$ est appelé n-ième nombre de Fermat.*

  a. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $2^k + 1$ est premier, alors k est une puissance de 2.*

  b. *Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Si $m \neq n$, montrer que $F_m \wedge F_n = 1$.*

Indications.

1. b. $M_{11} = 2047 = 23 \cdot 89$.

Exercice III.1.8 ($\star\star$)**.** *Soit p un nombre premier et $k \in \{1, \ldots, p-1\}$. Montrer que $\binom{p}{k} \equiv 0 \mod p$.*

Exercice III.1.9 ($\star\star$)**.** *Soit p un nombre premier et a un entier non divisible par p. Montrer que :*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a^{(p-1)p^k} \equiv 1 \mod p^{k+1}.$$

Indications. Raisonner par récurrence sur k.

Exercice III.1.10 ($\star\star$)**.** *Trouver le dernier chiffre de l'écriture décimale de $7^{7^{7^7}} = 7^{\left(7^{\left(7^7\right)}\right)}$.*

Indications. Calculer d'abord $7^2 \mod 10$ puis $7^4 \mod 10$. Réponse : $7^{7^{7^7}} \equiv 3 \mod 10$.

Exercice III.1.11 (Centrale '86, $\star\star$)**.** *Combien de chiffres y a-t-il dans l'écriture en base 10 de 4444^{4444} ?*

Exercice III.1.12 (Rennes '17, $\star\star$)**.** *Résoudre l'équation diophantienne $x^4 - y^2 = 5z + 3$, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$.*

Indications. Observer $\{x^2,\ x \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\}$.

Exercice III.1.13 ($\star\star\star$)**.** *On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers, $E_1 = \{k \in \mathbb{Z},\ k \equiv 1 \mod 4\}$ et $E_3 = \{k \in \mathbb{Z},\ k \equiv 3 \mod 4\}$.*

1. *Montrer que* $E_1 \cap \mathbb{P} \neq \varnothing$ *et* $E_3 \cap \mathbb{P} \neq \varnothing$.

2. *Redémontrer rapidement que* $\mathbb{P}$ *est infini.*

3. *On cherche à montrer que* $E_3 \cap \mathbb{P}$ *est infini.*

a. *Montrer que* E_1 *est stable par produit.*

b. *Montrer que* $E_3 \cap \mathbb{P}$ *est infini.*

4. *En admettant le résultat de l'exercice III.1.14, montrer que* $E_1 \cap \mathbb{P}$ *est infini.*

Indications.

3. b. Si $E_3 \cap \mathbb{P}$ est fini, considérer $a = 4\prod_{p\in E_3\cap\mathbb{P}} p - 1$.

4. Si $E_1 \cap \mathbb{P}$ est fini, considérer $a = \left(\prod_{p\in E_1\cap\mathbb{P}} p\right)^2 + 1$.

Exercice III.1.14 ($\star\star\star$)**.** *On recherche les nombres premiers impairs* p *pour lesquels* (-1) *est résidu quadratique modulo* p *(i.e. tels que* $\exists x \in \mathbb{Z},\ x^2 \equiv -1 \mod p$*).*

1. *On fixe* p *un nombre premier impair. Montrer que l'inversion* $\cdot^{-1} : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ *est une involution et déterminer ses points fixes. En regroupant chaque terme avec son image, montrer le théorème de Wilson* $(p-1)! \equiv -1 \mod p$.

2. *Considérer maintenant :*

$$g : \left| \begin{array}{rcl} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \\ x & \longmapsto & -x^{-1} \end{array} \right. .$$

Montrer que $(p-1)! \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \mod p$ *si* (-1) *n'est pas résidu quadratique modulo* p *et* $(p-1)! \equiv (-1)^{\frac{p-3}{2}} \mod p$ *si* (-1) *est résidu quadratique modulo* p.

3. *En déduire que* (-1) *est résidu quadratique modulo* p ssi $p \equiv 1 \mod 4$.

4. *Déterminer les racines carrées de* (-1) *modulo* 17 *(resp.* 29*).*

Exercice III.1.15 ($\star\star\star$)**.** *Soit* p *un nombre premier. Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on note* $s_p(n)$ *la somme des chiffres de l'écriture en base* p *de* n. *On note de plus* v_p *la valuation* p*-adique.*

1. a. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N},\ v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

b. *En déduire que* $\forall n \in \mathbb{N},\ v_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p-1}$.

2. *Retrouver le résultat en raisonnant par récurrence sur* n.

3. *En déduire le nombre de zéros à la fin de l'écriture décimale de* $2019!$.

Exercice III.1.16 (Centrale '16, $\star\star\star$)**.** *Pour* $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, *on note* $p(n)$ *le plus grand diviseur premier de* n. *On pose de plus :*

$$E = \{n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2},\ p(n) < p(n+1) < p(n+2)\}.$$

On fixe q *un nombre premier impair. Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on note* $u_n = q^{2^n} - 1$ *et* $v_n = q^{2^n} + 1$.

1. *Montrer que* $u_n \in E \iff (p(u_n) < q$ et $p(v_n) > q)$.

2. *Montrer que si* $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ *avec* $m \neq n$, *alors* $\left(\frac{v_m}{2}\right) \wedge \left(\frac{v_n}{2}\right) = 1$.

3. *En déduire que* E *est infini.*

III.2 Groupes

Exercice III.2.1 ($\star$)**.** *Soit* G *un groupe,* H, K, L *trois sous-groupes de* G. *Si* $H \subset K \cup L$, *montrer que* $H \subset K$ ou $H \subset L$.

Exercice III.2.2 ($\star$)**.** *Soit* G *et* H *deux groupes,* $\varphi : G \to H$ *un morphisme de groupes. Montrer que* φ *est injectif* ssi $\operatorname{Ker}\varphi = \{e_G\}$.

Exercice III.2.3 ($\star$). *Soit G un groupe, H un sous-groupe de G. On définit le centralisateur de H par :*

$$C(H) = \{g \in G,\ \forall h \in H,\ gh = hg\}.$$

Montrer que $C(H)$ est un sous-groupe de G.

Exercice III.2.4 ($\star$). *On definit une loi de composition interne $\diamond$ sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \diamond y = x + y + xy.$$

Montrer qu'il existe un réel a que l'on déterminera tel que $(\mathbb{R}\backslash\{a\}, \diamond)$ est un groupe.

Exercice III.2.5 ($\star\star$). *Donner tous les morphismes de groupes $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.*

Exercice III.2.6 ($\star\star$). *Soit G et G' deux groupes et $\varphi : G \to G'$ un morphisme de groupes.*

1. *Si H est un sous-groupe de G, montrer que $\varphi^{-1}(\varphi(H)) = H + \operatorname{Ker}\varphi$.*

2. *Si H' est un sous-groupe de G', montrer que $\varphi(\varphi^{-1}(H')) = H' \cap \operatorname{Im}\varphi$.*

Exercice III.2.7 ($\star\star$). *Soit E un ensemble.*

1. *Montrer que $(\mathcal{P}(E), \triangle, \cap)$ est un anneau commutatif dont on explicitera les éléments neutres.*

2. *Préciser les opposés et les inverses (lorsqu'ils existent). Cet anneau est-il intègre ?*

3. *Si E est fini, montrer que $\mathcal{P}(E) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{|E|}$.*

4. *Si $F \subset E$, $\mathcal{P}(F)$ est-il un sous-groupe de $\mathcal{P}(E)$? Un idéal ? Un sous-anneau ?*

Exercice III.2.8 ($\star\star$). *Soit G un groupe multiplicatif de neutre e t.q. $\forall g \in G,\ g^2 = e$.*

1. *Montrer que G est abélien.*

2. *Soit H un sous-groupe propre de G (i.e. $H \neq G$) et $a \in G\backslash H$. Montrer que $H \cap aH = \varnothing$ et que $H \cup aH$ est un sous-groupe de G.*

3. *On suppose de plus que G est fini. En déduire que son cardinal est une puissance de 2.*

Indications.

1. Noter que $\forall (x, y) \in G^2,\ (xy)^2 = e$.

3. Trouver un sous-groupe de G de cardinal $|G|/2$ (on pourra considérer un sous-groupe propre maximal) puis raisonner par récurrence.

Exercice III.2.9 (Sous-groupes de $\mathbb{R}$, $\star\star$). *Le but est de montrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit monogène, soit dense dans $\mathbb{R}$. On se donne donc H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ qui n'est pas dense dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que $H \neq \{0\}$.*

1. *Justifier l'existence de $\alpha = \min\left(H \cap \mathbb{R}_+^*\right)$.*

2. *Montrer que $H = \alpha\mathbb{Z}$.*

3. *Si $\beta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, en déduire que $\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Exercice III.2.10 ($\star\star$). *Soit G un groupe fini.*

1. *Soit H un sous-groupe de G.*

  a. *Montrer que $(gH)_{g\in G}$ forme une partition de G.*

  b. *En déduire le théorème de Lagrange : $|H|$ divise $|G|$.*

2. *Soit A et B deux sous-groupes de G t.q. $A \cap B = \{e\}$. Montrer que $|A| \cdot |B| \leqslant |G|$.*

Indications.

2. Si $(a, a') \in A^2$ avec $a \neq a'$, que dire de aB et $a'B$?

Exercice III.2.11 ($\star\star$).

1. *Si G est un groupe dont le cardinal est un nombre premier, montrer que G est cyclique et en déduire un groupe classique auquel G est isomorphe. On pourra utiliser le théorème de Lagrange.*
2. *Déterminer (à isomorphisme près) tous les groupes de cardinal inférieur ou égal à 7.*
3. *Déterminer (à isomorphisme près) tous les groupes de cardinal 8.*

Exercice III.2.12 ($\star\star$)**.** *Soit G un groupe d'ordre pair. Montrer que G admet un élément d'ordre 2.*

Indications. On pourra considérer l'involution $g \in G \longmapsto g^{-1} \in G$.

Exercice III.2.13 ($\star\star$)**.** *Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini. Soit A, B deux sous-ensembles de G vérifiant $|A| + |B| > |G|$. On note $AB = \{ab,\ (a, b) \in A \times B\}$. Montrer que $AB = G$.*

Indications. Pour $g \in G$, considérer l'injection $a \in A \longmapsto a^{-1}g \in G$.

Exercice III.2.14 (Groupes quotients, $\star\star\star$)**.** *Soit G un groupe. Un sous-groupe N de G est dit distingué lorsque $\forall g \in G,\ gNg^{-1} \subset N$.*

1. *On considère $G = \mathfrak{S}_3$. Les sous-groupes $\langle(1\,2)\rangle$ et $\langle(1\,2\,3)\rangle$ sont-ils distingués ?*
2. *Si H est un groupe et $\varphi : G \to H$ est un morphisme de groupes, montrer que $\operatorname{Ker}\varphi$ est distingué dans G.*

Si N est un sous-groupe distingué de G, on note $G/N = \{gN,\ g \in G\}$ l'ensemble des classes à gauches de N. On note de plus $p : g \in G \longmapsto gN \in G/N$ la projection canonique.

3. *Montrer qu'il existe une unique structure de groupe sur G/N t.q. $p : G \to G/N$ est un morphisme de groupes.*
4. *Si H est un groupe et $\varphi : G \to H$ est un morphisme de groupes, montrer que $G/\operatorname{Ker}\varphi \simeq \operatorname{Im}\varphi$.*

Exercice III.2.15 ($\star\star\star$)**.** *Trouver les groupes finis G tels que $\operatorname{Aut}(G) = \{id_G\}$.*

Indications. En considérant les automorphismes intérieurs, montrer d'abord que G est abélien. On pourra ensuite considérer l'automorphisme $g \mapsto g^{-1}$.

Exercice III.2.16 ($\star\star\star$)**.** *Soit G un sous-groupe abélien de $\mathfrak{S}_n$ tel que :*

$$\forall (a, b) \in [\![1, n]\!]^2,\ \exists g \in G,\ g(a) = b.$$

Montrer que $|G| = n$.

Exercice III.2.17 (Centrale '16, $\star\star\star$)**.** *Soit G un groupe fini de cardinal n, $S \subset G$ une partie non vide. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose :*

$$A_k = \left\{ s_1 \cdots s_k,\ (s_1, \ldots, s_k) \in S^k \right\}.$$

On pose de plus $a_k = |A_k|$.

1. *Montrer que la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ croît.*
2. *Montrer que $a_{k+1} = a_k$ pour $k \geqslant n$.*
3. *Montrer que A_n est un sous-groupe de G.*

Indications.

1. Trouver une injection $A_k \to A_{k+1}$.
2. Si $a_n < a_{n+1}$, montrer que $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $a_k < a_{k+1}$ et en déduire que $a_n > n$.
3. Montrer d'abord que $\forall q \in \mathbb{N}^*,\ A_n = A_{qn}$.

III.3 Anneaux et corps

Exercice III.3.1 ($\star$)**.** *Soit A un anneau. Montrer que A est un corps* ssi *ses seuls idéaux sont $\{1\}$ et A.*

Exercice III.3.2 (Entiers de Gauß, $\star\star$)**.** *On définit $\mathbb{Z}[i] = \{x + iy,\ (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$, muni des lois induites par $\mathbb{C}$.*

1. *Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau commutatif intègre. Est-ce un corps ?*

2. *Décrire le groupe $\mathbb{Z}[i]^\times$ des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.*

3. *Donner tous les endomorphismes d'anneaux de $\mathbb{Z}[i]$.*

Indications.

2. On pourra considérer $|z|^2$ pour $z \in \mathbb{Z}[i]$.

3. Il n'y en a que deux.

Exercice III.3.3 ($\star\star$)**.** *Soit $(A, +, \times)$ un anneau.*

1. *Si $x \in A$ est nilpotent, montrer que $(1 - x)$ est inversible (et préciser son inverse).*

2. *Soit $(a, b) \in A^2$.*

- **a.** *Si ab est nilpotent, montrer que ba est nilpotent.*
- **b.** *Si a et b sont nilpotents et commutent, montrer que $a + b$ est nilpotent.*
- **c.** *Si $1 - ab$ est inversible, montrer que $1 - ba$ est inversible.*

Indications.

1. Penser à la formule $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$.

Exercice III.3.4 (Radical d'un idéal, $\star\star$)**.** *Soit A un anneau commutatif et I, J deux idéaux de A. On note :*

$$\sqrt{I} = \{x \in A,\ \exists n \in \mathbb{N},\ x^n \in I\}.$$

1. *Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.*

2. *Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.*

3. *Montrer que $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.*

4. *On se place ici dans le cas où $A = \mathbb{Z}$.*

- **a.** *Déterminer $\sqrt{24\mathbb{Z}}$.*
- **b.** *Plus généralement, si $N \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\sqrt{N\mathbb{Z}}$ connaissant la décomposition de N en facteurs premiers.*

Exercice III.3.5 ($\star\star\star$)**.** *Soit $(A, +, \times)$ un anneau, $a \in A$. Soit $\mathcal{H} = \{x \in A,\ xa = 1_A\}$. Montrer que $\mathcal{H}$ est soit vide, soit un singleton, soit infini.*

Exercice III.3.6 ($\star\star\star$)**.** *Trouver les éléments nilpotents de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et les compter.*

III.4 Polynômes

Exercice III.4.1 ($\star$)**.** *On considère $P = 2X^3 + 5X^2 + X - 2$.*

1. *Déterminer les racines de P.*

2. *Résoudre l'équation $2\sin^3\theta + 5\sin^2\theta + \sin\theta - 2 = 0$.*

Indications.

1. Remarquer que $P(-1) = 0$.

Exercice III.4.2 ($\star$)**.** *Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, $a \neq b$. Quel est le reste de la division euclidienne de $P \in \mathbb{K}[X]$ par $(X - a)(X - b)$?*

Exercice III.4.3 ($\star$). *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X\sin\theta + \cos\theta)^n$ par $\left(X^2+1\right)$ puis pas par $\left(X^2+1\right)^2$.*

Exercice III.4.4 ($\star$). *Montrer que le polynôme $\left(X^2+X+1\right)$ divise $\left(X^{3m+2}+X^{3n+1}+X^{3p}\right)$ pour tout $(m,n,p) \in \mathbb{N}^3$.*

Indications. Décomposer (X^2+X+1) en produit d'irréductibles.

Exercice III.4.5 ($\star\star$).

1. *Soit $(m,n,k) \in \mathbb{N}^3$. En développant l'égalité $(1+X)^{m+n} = (1+X)^m (1+X)^n$, montrer que :*

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i+j=k} \binom{m}{i}\binom{n}{j}.$$

2. *Quelle égalité obtient-on grâce au coefficient de X^n dans $(1+X)^{2n}(1-X)^{2n} = \left(1-X^2\right)^{2n}$?*

Exercice III.4.6 ($\star\star$). *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant. Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' l'est aussi.*

Exercice III.4.7 ($\star\star$). *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé. Montrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P''(x)P(x) \leqslant P'^2(x).$$

Indications. Calculer $(\ln|P|)'$ et $(\ln|P|)''$.

Exercice III.4.8 ($\star\star$). *Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]\backslash\{0\}$ t.q. $P\left(X^2\right) = P(X)P(X+1)$.*

Exercice III.4.9 ($\star\star$). *Déterminer un polynôme à coefficients entiers dont $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est racine, puis montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est irrationnel.*

Exercice III.4.10 (Extensions quadratiques de $\mathbb{Q}$, $\star\star$). *Soit $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$ t.q. il existe $\mu \in \mathbb{Q}[X]$ avec $\deg\mu = 2$ t.q. $\mu(\omega) = 0$. On pose $\mathbb{Q}[\omega] = \{P(\omega),\ P \in \mathbb{Q}[X]\}$.*

1. *Montrer que $\mathbb{Q}[\omega]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.*
2. *Montrer que $\mathbb{Q}[\omega] = \left\{x\omega + y,\ (x,y) \in \mathbb{Q}^2\right\}$.*
3. *Montrer que $\mathbb{Q}[\omega]$ est un corps.*

Indications.

3. Si $z \in \mathbb{Q}[\omega]\backslash\mathbb{Q}$, on pourra d'abord prouver que z est algébrique de degré 2 (i.e. il existe $\mu_z \in \mathbb{Q}[X]$ avec $\deg\mu_z = 2$ t.q. $\mu_z(z) = 0$).

Exercice III.4.11 ($\star\star$). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Factoriser $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$ sur $\mathbb{C}$.*
2. *Calculer $\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.*

Indications.

1. $P_n = \frac{X^{n+1}-1}{X-1}$.
2. Considérer $P_n(1)$.

Exercice III.4.12 ($\star\star$).

1. *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $U_n \in \mathbb{R}[X]$ t.q.*

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ \sin(n\theta) = U_n(\cos\theta)\sin\theta.$$

2. *Donner le degré de U_n et son coefficient dominant.*
3. *Pour $n \geqslant 2$, déterminer les racines de U_n.*

4. *Démontrer que :*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left(1-X^2\right) U_n'' - 3XU_n' + \left(n^2-1\right) U_n = 0.$$

Exercice III.4.13 ($\star\star$)**.** *Soit $P = X^3 - X - 1$. On note α, β et γ les racines complexes de P. Calculer $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$.*

Indications. Calculer d'abord $(\alpha+\beta+\gamma)$, $(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ et $(\alpha\beta\gamma)$. Réponse : $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4 = 2$.

Exercice III.4.14 ($\star\star\star$)**.** *On souhaite généraliser l'exercice III.4.13 : si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme de degré n, toute expression symétrique dépendant des racines $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ de P et contenant des sommes et des produits peut être exprimée à partir des fonctions symétriques élémentaires $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$. Pour cela, on définit l'ensemble des polynômes à deux variables $\mathbb{K}[X_1,X_2] = (\mathbb{K}[X_1])[X_2]$, puis on définit par récurrence l'ensemble des polynômes à n variables $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$.*

1. *En utilisant la notion de polynôme à plusieurs variables, formaliser l'énoncé que l'on souhaite démontrer.*

2. *Démontrer cet énoncé.*

3. *Écrire un algorithme permettant, à partir d'une expression en $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, de trouver une expression en $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$.*

Exercice III.4.15 (Mines '01, $\star\star\star$)**.** *Soit K un corps de caractéristique p (i.e. tel que $p \cdot 1_K = 0_K$).*

1. *Montrer que $\sigma : x \in K \longmapsto x^p \in K$ est un morphisme de corps.*

2. *Montrer que σ est injectif.*

3. **a.** *Déterminer l'ensemble $\{P \in K[X],\ P' = 0\}$.*

b. *Montrer que si σ est surjectif, alors tout polynôme $P \in K[X]$ irréductible vérifie $P' \neq 0$.*

c. *En admettant l'existence d'un corps algébriquement clos contenant K, montrer la réciproque du résultat de la question* **3.b.**.

Indications.

1. Pour $k \in \{1,\ldots,p-1\}$, $\binom{p}{k}$ est multiple de p.

2. Noter que $\operatorname{Ker}\sigma$ est un idéal de K.

3. **b.** Si σ est surjectif, alors pour tout $Q \in K[X]$, il existe $R \in K[X]$ t.q. $Q\left(X^p\right) = R^p$.

Exercice III.4.16 (Ulm '16, $\star\star\star$)**.** *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg P \geqslant 3$. On suppose que P est scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que toute racine multiple de P' est racine de P.*

Indications. Écrire la factorisation de P et compter les racines de P', sans oublier celles données par le théorème de Rolle.

III.5 Fractions rationnelles

Exercice III.5.1 ($\star$)**.** *Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les fractions rationnelles suivantes :*
1. $\frac{X^2+1}{X(X^2-1)}$ **2.** $\frac{2X}{X^2+1}$ **3.** $\frac{1}{X^4+X^2+1}$ **4.** $\frac{X^5-X^3-X^2}{X^2-1}$ **5.** $\frac{X^3+1}{(X-1)^4}$.

Indications. Réponses :

1. $\frac{X^2+1}{X(X^2-1)} = -\frac{1}{X} + \frac{1}{X+1} + \frac{1}{X-1}$.

2. $\frac{2X}{X^2+1} = \frac{1}{X+i} + \frac{1}{X-i}$.

3. $\frac{1}{X^4+X^2+1} = -\frac{X-1}{2(X^2-X+1)} + \frac{X+1}{2(X^2+X+1)} = -\frac{1}{2(\omega-\overline{\omega})}\left(\frac{\omega-1}{X-\omega} - \frac{\overline{\omega}-1}{X-\overline{\omega}}\right) + \frac{1}{2j(1-j)}\left(\frac{j+1}{X-j} - \frac{j^2+1}{X-j^2}\right)$ avec $\omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

4. $\frac{X^5-X^3-X^2}{X^2-1} = X^3 - 1 - \frac{1}{2(X-1)} + \frac{1}{2(X+1)}$.

5. $\frac{X^3+1}{(X-1)^4} = \frac{1}{X-1} + \frac{3}{(X-1)^2} + \frac{3}{(X-1)^3} + \frac{2}{(X-1)^4}$.

Exercice III.5.2 ($\star\star$). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Décomposer $\frac{1}{X^n-1}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$.*
2. *Décomposer $\frac{n!}{X(X-1)\cdots(X-n)}$ en éléments simples.*

Exercice III.5.3 ($\star\star$). *Soit $\vartheta \in]0,\pi[$. On pose $F = \frac{1}{X^2-2X\cos\vartheta+1}$.*

1. *Déterminer les pôles de F.*
2. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $F^{(n)}$.*
3. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner les racines de $F^{(n)}$.*

Indications. Décomposer F en éléments simples.

Exercice III.5.4 ($\star\star$). *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$, $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer $F = \frac{1}{(X-a)^n(X-b)^n}$ en éléments simples.*

Indications. On pourra utiliser le développement de Taylor en a de $\frac{1}{(X-b)^n} = (X-a)^n F$.

Exercice III.5.5 (Théorème de Gauß-Lucas, $\star\star\star$).

1. *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant.*
   - **a.** *Décomposer $\frac{P'}{P}$ en éléments simples.*
   - **b.** *Montrer que les racines de P' (dans $\mathbb{C}$) sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.*
   - **c.** *En déduire que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' l'est également.*
2. *Montrer qu'il existe un n maximal tel que les racines non nulles de $P_n = (X+1)^n - X^n - 1$ soient sur le cercle unité.*

Indications.

1. **b.** Écrire $P = \lambda \prod_{k=1}^{s} (X-\alpha_k)^{\omega_k}$. Si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de P' qui n'est pas racine de P, montrer que $0 = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\omega_k}{z-\alpha_k} = \sum_{k=1}^{s} \omega_k \frac{\overline{z}-\overline{\alpha}_k}{|z-\alpha_k|^2}$. En déduire que z est barycentre à coefficients positifs des α_k.
2. Montrer que z est racine de P_n' ssi $\frac{z+1}{z} \in \mathbb{U}_{n-1}$.

III.6 Groupe symétrique

Exercice III.6.1 ($\star\star$). *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Montrer que $\mathfrak{S}_n = \langle (1\,2), (1\,2\,\cdots\,n) \rangle$.*

Indications. Si $\sigma = (1\,2\,\cdots\,n)$, on pourra calculer $\sigma \circ (i\,(i+1)) \circ \sigma^{-1}$.

Exercice III.6.2 ($\star\star$). *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $Z(\mathfrak{S}_n) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \forall \tau \in \mathfrak{S}_n,\ \sigma\tau = \tau\sigma\}$.*

Exercice III.6.3 ($\star\star$). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \leqslant n$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ un p-cycle. Donner une CNS sur $k \in \mathbb{Z}$ pour que σ^k soit un cycle.*

Exercice III.6.4 ($\star\star$). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Caractériser puis dénombrer les involutions de $\mathfrak{S}_n$.*

Indications. Penser à la décomposition en cycles.

Exercice III.6.5 ($\star\star$). *On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, un couple $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ est appelé inversion de σ lorsque $i < j$* et *$\sigma(i) > \sigma(j)$. On note $\iota(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ. Calculer le nombre moyen d'inversions d'une permutation, i.e. la quantité $\frac{1}{|\mathfrak{S}_n|}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\iota(\sigma)$.*

Indications. On pourra considérer l'application miroir $\mu : \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n$ définie par $(\mu(\sigma))(i) = \sigma(n+1-i)$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $i \in \{1,\ldots,n\}$ et remarquer que, pour $i < j$, le couple (i,j) est une inversion de σ ssi ce n'est pas une inversion de $\mu(\sigma)$.

Exercice III.6.6 ($\star\star$). *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 3}$. Montrer que le groupe engendré par les cycles de longueur 3 dans $\mathfrak{S}_n$ est égal à $\mathfrak{A}_n$.*

Exercice III.6.7 ($\star\star\star$).

1. *On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Soit G un groupe à $2n$ éléments et soit H un sous-groupe de G à n éléments.*
   - **a.** *Montrer que si $x \in G\backslash H$, alors $H \cap xH = \varnothing$ et $H \cup xH = G$.*
   - **b.** *En déduire que $\forall x \in G,\ x^2 \in H$.*
2. *On souhaite appliquer le résultat précédent au groupe $G = \mathfrak{A}_4$.*
   - **a.** *Si $s \in \mathfrak{A}_4$ est un 3-cycle, montrer l'existence de $\gamma \in \mathfrak{A}_4$ t.q. $s = \gamma^2$.*
   - **b.** *En déduire que $\mathfrak{A}_4$ ne contient aucun sous-groupe à 6 éléments. On pourra utiliser le résultat de l'exercice III.6.6.*

Exercice III.6.8 ($\star\star\star$). *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. On considère l'application :*

$$f : \sigma \in \mathfrak{S}_n \longmapsto \sum_{k=1}^{n} k\sigma(k) \in \mathbb{N}.$$

Trouver les extrema de f et leurs antécédents.

Indications. Remarquer d'abord que pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $ab + ba \leqslant a^2 + b^2$.

Exercice III.6.9 ($\star\star\star$). *On fixe $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$.*

1. *Soit $(\sigma,\tau) \in \mathfrak{S}_n^2$. Donner une CNS pour que σ et τ soit conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$, i.e. pour qu'il existe $\rho \in \mathfrak{S}_n$ t.q. $\sigma = \rho\tau\rho^{-1}$.*
2. *Déterminer les morphismes de groupes de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.*

Indications.

1. Traiter d'abord le cas où σ et τ sont des cycles.
2. Regarder les images des transpositions.

IV Algèbre linéaire

IV.1 Espaces vectoriels

Exercice IV.1.1 ($\star$). *Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base :*

1. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2z = 0\}$.
2. $\left\{P \in \mathbb{R}[X],\ \widetilde{P}(1) = 0\right\}$.
3. $\left\{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n = 0\right\}$.

Exercice IV.1.2 ($\star$). *On se place dans $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On note $\mathcal{P} = \{f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)\}$ et $\mathcal{I} = \{f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)\}$.*

1. *Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.*
2. *Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dans E.*
3. *Expliciter :*
   - **a.** *La projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{I}$,*
   - **b.** *La symétrie de base $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{I}$.*

Exercice IV.1.3 ($\star$). *On se place dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on considère $d : f \in E \longmapsto f' \in E$.*

1. *Montrer rapidement que d est un endomorphisme de E.*
2. *Existe-t-il un endomorphisme $u : E \to E$ tel que $u \circ d = \mathrm{id}_E$? Tel que $d \circ u = \mathrm{id}_E$?*

Exercice IV.1.4 ($\star\star$). *On se place dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des réels deux à deux distincts. Pour $i \in \{1,\ldots,r\}$, on considère $\mathrm{f}_i : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{\lambda_i t}$. Ainsi, $\mathrm{f}_i \in E$. Montrer que $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_r$ sont libres.*

Exercice IV.1.5 ($\star\star$)**.** *Soit* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *des réels deux à deux distincts. Pour* $k \in \{1, \dots, n\}$*, soit* $f_k : x \longmapsto |x - \alpha_k|$*. Montrer que* $f_1, \dots, f_n$ *sont libres.*

Exercice IV.1.6 ($\star\star$)**.** *Soit* $0 = a_0 < \cdots < a_{n+1} = 1$*. On note* V *l'ensemble des fonctions* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *continues t.q. pour tout* $i \in \{0, \dots, n\}$*,* $f_{|[a_i, a_{i+1}]}$ *est affine.*

1. *Montrer que* V *est un espace vectoriel.*

2. *Déterminer une base de* V*.*

Exercice IV.1.7 ($\star\star$)**.** $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *est-il un hyperplan de* $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *?*

Exercice IV.1.8 ($\star\star$)**.** *On se place dans* $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$*. On considère :*

$$\Phi : f \in E \longmapsto \int_0^1 f \in \mathbb{R}.$$

Donner un supplémentaire de $\operatorname{Ker}\Phi$ *dans* E*.*

Exercice IV.1.9 ($\star\star$)**.** *Soit* E *l'espace vectoriel des suites réelles convergentes. On considère :*

$$\psi : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \longmapsto (u_{n+1} + u_{n+2})_{n\in\mathbb{N}} \in E.$$

1. *Montrer que* ψ *est un endomorphisme de* E

2. ψ *est-il injectif ? Surjectif ?*

3. *Pour* $\lambda \in \mathbb{R}_+$*, déterminer le noyau de* $\psi - \lambda\,\mathrm{id}_E$*.*

Exercice IV.1.10 ($\star\star$)**.** *Si* $\mathbb{P}$ *dénote l'ensemble des nombres premiers, montrer que la famille* $(\ln p)_{p\in\mathbb{P}}$ *est libre dans le* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel* $\mathbb{R}$*.*

Exercice IV.1.11 ($\star\star$)**.** *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* $p, q : E \to E$ *deux projecteurs de même image. Montrer que pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$*,* $(1-\lambda)p + \lambda q$ *est un projecteur de même image que* p *et* q*.*

Exercice IV.1.12 ($\star\star$)**.** *Soit* p *et* q *deux projecteurs d'un espace vectoriel* E *t.q.* $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} q$*. Soit* $r = p + q - pq$*.*

1. *Montrer que* r *est un projecteur.*

2. *Déterminer* $\operatorname{Ker} r$ *et* $\operatorname{Im} r$*.*

Exercice IV.1.13 ($\star\star$)**.** *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *t.q.* $u^2 - 3u + 2\,\mathrm{id}_E = 0$*.*

1. *On note* $E_1 = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ *et* $E_2 = \operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{id}_E)$*. Montrer que* $E = E_1 \oplus E_2$*.*

On note p_1 *(resp.* p_2*) le projecteur sur* E_1 *parallèlement à* E_2 *(resp. sur* E_2 *parallèlement à* E_1*).*

2. *Exprimer* u *en fonction de* p_1 *et* p_2*.*

3. *Exprimer* p_1 *et* p_2 *en fonction de* u *et* id_E*.*

4. *Pour* $n \in \mathbb{N}$*, en déduire une expression simple de* u^n *en fonction de* n *et* u*.*

5. *L'endomorphisme* u *est-il inversible ? Si oui, généraliser l'expression obtenue à* $n < 0$*.*

Exercice IV.1.14 ($\star\star$)**.** *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $u \in \mathcal{L}(E)$*.*

1. *Montrer l'équivalence des conditions suivantes :*

(i) u *est une homothétie.*

(ii) *La famille* (id_E, u) *est liée dans* $\mathcal{L}(E)$*.*

(iii) *Pour tout* $x \in E$*, la famille* $(x, u(x))$ *est liée dans* E*.*

2. *En déduire qu'un endomorphisme commutant avec tous les endomorphismes de* E *est une homothétie. On pourra admettre que tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.*

Exercice IV.1.15 ($\star\star$)**.** *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $p \in \mathcal{L}(E)$ *un projecteur. Montrer que* $u \in \mathcal{L}(E)$ *commute avec* p ssi $\operatorname{Ker} p$ *et* $\operatorname{Im} p$ *sont stables par* u*.*

Exercice IV.1.16 ($\star\star$). *Soit u et v deux formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que u et v sont colinéaires* ssi $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} v$.

Exercice IV.1.17 (ENSI '85, $\star\star$). *Soit X un ensemble et $f : X \to \mathbb{R}$ une application t.q. $f(X)$ est infini. Montrer que la famille $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^X$.*

Exercice IV.1.18 ($\star\star\star$). *Soit $\mathbb{K}$ un corps infini et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

1. *Si F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels stricts de E, montrer que $F_1 \cup F_2 \subsetneq E$.*
2. *Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \dots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels stricts de E, montrer que $F_1 \cup \cdots \cup F_n \subsetneq E$.*

Indications.

2. Raisonner par récurrence sur n. Choisir un point $a \in E\setminus(F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1})$ et un point $b \in E\setminus F_n$ et considérer la droite affine D passant par a et b. Noter qu'elle rencontre chaque F_i en au plus un point.

IV.2 Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice IV.2.1 ($\star$). *On se place dans $E = \mathbb{R}^4$. On considère $F = \{x \in E,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ et $G = \{x \in E,\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$. Déterminer la dimension et donner une base de F, G, $F + G$ et $F \cap G$.*

Exercice IV.2.2 ($\star$). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $e = (e_1, \dots, e_n)$. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose $\varepsilon_i = e_1 + \cdots + e_i$.*

1. *Montrer que $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E.*
2. *Exprimer les composantes d'un vecteur dans la base ε en fonction de ses composantes dans e.*

Exercice IV.2.3 ($\star$). *Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynôme de $\mathbb{K}[X]$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg P_n = n$.*

1. *Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $(P_0, \dots, P_N)$ est une base de $\mathbb{K}_N[X]$.*
2. *Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.*

Exercice IV.2.4 ($\star\star$). *Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit :*

$$\Delta : P \in \mathbb{C}_{n+1}[X] \longmapsto P(X+1) - P(X) \in \mathbb{C}_{n+1}[X].$$

1. *Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_{n+1}[X]$.*
2. *Déterminer* $\operatorname{Ker} \Delta$.
3. *En déduire* $\operatorname{Im} \Delta$.

Exercice IV.2.5 ($\star\star$).

1. *Montrer que les $\mathbb{R}$-endomorphismes de $\mathbb{C}$ sont exactement les applications $\psi_{a,b} : z \longmapsto az + b\overline{z}$, avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.*
2. *À quelle condition $\psi_{a,b}$ est-elle $\mathbb{C}$-linéaire ?*
3. *À quelle condition $\psi_{a,b}$ est-elle inversible ?*

Exercice IV.2.6 ($\star\star$). *Soit $E = \mathbb{R}^3$. On pose :*

$$u : (x, y, z) \in E \longmapsto (y, z, x) \in E.$$

1. *Montrer que u est un endomorphisme de E.*
2. *Déterminer les sous-espaces de E stables par u.*
3. *Vérifier que chacun d'eux possède un supplémentaire stable par u.*

Exercice IV.2.7 ($\star\star$). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.*

1. *Si H_1 et H_2 sont deux hyperplans de E, montrer l'existence d'un sous-espace vectoriel $D \subset E$ t.q. $E = H_1 \oplus D = H_2 \oplus D$.*
2. *Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension, montrer l'existence d'un sous-espace vectoriel $G \subset E$ t.q. $E = F_1 \oplus G = F_2 \oplus G$.*

Exercice IV.2.8 ($\star\star$)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :*

(i) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

(ii) $\dim E = 2 \operatorname{rg} f$ *et* $f^2 = 0$.

Indications. Penser au fait que $u \circ v = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$.

Exercice IV.2.9 ($\star\star$)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie.*

1. *Soit H un hyperplan de E, F un sous-espace vectoriel quelconque de E. En distinguant plusieurs cas, exprimer $\dim(H \cap F)$ en fonction de $\dim F$.*
2. *Soit $H_1, \ldots, H_p$ p hyperplans de E. Montrer que*

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} H_i\right) \geqslant \dim E - p.$$

Exercice IV.2.10 ($\star\star$)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ t.q. la famille $(f(x_0), \ldots, f^n(x_0))$ est libre.*

1. *Montrer que f est bijective.*
2. *Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ t.q. $g \circ f = f \circ g$. Montrer qu'il existe $(b_0, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ t.q. $g = \sum_{k=0}^{n-1} b_k f^k$.*

Indications. Remarquer que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

Exercice IV.2.11 (Lemmes de factorisation, $\star\star$)**.** *Soit E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*

1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E, G)$. Montrer que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} f \Longleftrightarrow \exists g \in \mathcal{L}(G, F),\ f = g \circ u$.*
2. *Soit $u \in \mathcal{L}(G, F)$. Montrer que $\operatorname{Im} u \supset \operatorname{Im} f \Longleftrightarrow \exists g \in \mathcal{L}(E, G),\ f = u \circ g$.*

Exercice IV.2.12 ($\star\star$)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Montrer l'équivalence des assertions suivantes :*
   (i) $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.
   (ii) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
2. *Que subsiste-t-il de ce résultat en dimension infinie ?*

Exercice IV.2.13 (Images et noyaux itérés, $\star\star$)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Montrer que la suite $(\operatorname{Im} u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ décroît et que la suite $(\operatorname{Ker} u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ croît (pour l'inclusion).*
2. *Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall p \geqslant p_0$, $\operatorname{Im} u^p = \operatorname{Im} u^{p_0}$.*
3. *On suppose que p_0 est choisi minimal. Montrer que $(\operatorname{Ker} u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ stationne à partir de p_0 et pas avant.*
4. *Montrer que $E = \operatorname{Ker} u^{p_0} \oplus \operatorname{Im} u^{p_0}$.*

Exercice IV.2.14 (TPE '87, $\star\star$)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit :*

$$\phi : \left|\begin{aligned} \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ g &\longmapsto f \circ g \end{aligned}\right. .$$

Déterminer le rang de ϕ.

Exercice IV.2.15 ($\star\star\star$)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $1 \leqslant d < \dim E$. Que dire d'un endomorphisme stabilisant tous les sous-espaces vectoriels de E de dimension d ?*

Indications. On pourra commencer par étudier le cas $d = 1$.

Exercice IV.2.16 (Un peu de dualité, $\star\star\star$)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})^n$.*

1. *On suppose qu'il existe $x \in E \backslash \{0\}$ t.q. $f_1(x) = \cdots = f_n(x) = 0$. Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est liée dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.*
2. *La réciproque est-elle vraie ?*

Indications.

1. Si $(f_1, \dots, f_n)$ est libre, c'est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, donc on peut construire une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E t.q. $f_i(e_j) = \delta_{i,j}$.
2. On pourra utiliser le fait que si $H_1, \dots, H_p$ sont p hyperplans de E, alors $\dim\left(\bigcap_{i=1}^p H_i\right) \geqslant \dim E - p$.

Exercice IV.2.17 ($\star\star\star$)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension d sur un corps fini k de cardinal q. Déterminer le cardinal de $GL(E)$.*

Indications. On pourra se ramener à dénombrer les bases de E.

Exercice IV.2.18 (Idéaux bilatères de $\mathcal{L}(E)$, $\star\star\star$)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.*

1. *Quels sont les idéaux bilatères de $\mathcal{L}(E)$?*
2. *Le résultat subsiste-t-il en dimension infinie ?*

Indications. Si $e = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et si $\mathfrak{J}$ est un idéal bilatère non nul de $\mathcal{L}(E)$, montrer que $\mathfrak{J}$ contient les endomorphismes $\mathrm{f}_{i,j} = e_i^* e_j$, où $e_i^* : E \to \mathbb{K}$ est la forme linéaire qui à un vecteur associe sa i-ième composante dans la base e.

Exercice IV.2.19 ($\star\star\star$)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.*

1. *Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, montrer que $u^n = 0$.*
2. *Si $u_1, \dots, u_n$ sont n endomorphismes nilpotents commutant deux à deux, montrer que $u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0$.*
3. *Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Existe-t-il un endomorphisme u de l'espace $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ dont le carré pour la composition vaut la dérivation ?*

Indications.

1. Si ν dénote l'indice de nilpotence de u, choisir $x_0 \in E$ t.q. $u^{\nu-1}(x_0) \neq 0$ puis montrer que la famille $\left(x_0, u(x_0), \dots, u^{\nu-1}(x_0)\right)$ est libre.
2. Raisonner par récurrence sur la dimension de E.
3. Se ramener à un espace de très petite dimension en remarquant que u commute avec la dérivation.

Exercice IV.2.20 ($\star\star\star$)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent.*

1. *Si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur t.q. $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} u$, montrer que $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $(p \circ u)^j = p \circ u^j$.*
2. *Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E t.q. $u(e_1) = 0$ et $\forall i \in \{2, \dots, n\}$, $u(e_i) \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1})$.*
3. *À quoi ressemble la matrice de u dans la base $(e_1, \dots, e_n)$?*

Indications.

2. Considérer la projection sur un supplémentaire H de $\operatorname{Ker} u$ parallèlement à $\operatorname{Ker} u$ et utiliser la relation de la question précédente.

IV.3 Matrices

Exercice IV.3.1 ($\star$)**.** *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Calculer* A^n *pour* $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice IV.3.2 ($\star$)**.** *On pose* $M = \begin{pmatrix} 2 & j & j^2 \\ j & -j & 1 \\ j^2 & 1 & -j^2 \end{pmatrix}$ *où* $j = \exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)$.

1. *Calculer* $(M - I_3)^2$.

2. *En déduire* M^n *pour* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice IV.3.3 ($\star$)**.** *On note* $P = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - z = 0\right\}$ *et* $D = \mathrm{Vect}(w)$ *avec* $w = (1, 0, -1)$.

1. *Montrer que* $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

On note p *(resp.* q*) la projection sur* P *parallèlement à* D *(resp. sur* D *parallèlement à* P*) et* s *la symétrie de base* P *parallèlement à* D.

2. *Donner les matrices de* p, q *et* s *dans la base canonique.*

Exercice IV.3.4 ($\star$)**.** *On note* p *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans la base canonique est* $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que* p *est un projecteur dont on déterminera le noyau et l'image.*

2. *Déterminer une base de* $\mathbb{R}^3$ *dans laquelle la matrice de* p *est* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice IV.3.5 ($\star$)**.** *On considère :*

$$u : P \in \mathbb{R}_2[X] \longmapsto XP'' - 2P' + P \in \mathbb{R}_2[X].$$

1. *Donner la matrice* A *de* u *dans la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$.

2. u *est-elle bijective ? Si oui, donner son inverse.*

3. *Pour* $k \in \mathbb{N}$, *calculer* A^k.

Exercice IV.3.6 ($\star\star$)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Si* $A \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, *on appelle commutant de* A *dans* $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ *l'ensemble* $C(A) = \{M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall N \in A,\ MN = NM\}$ *et centre de* A *l'ensemble* $Z(A) = A \cap C(A)$.

1. *Déterminer* $Z(\mathbb{M}_n(\mathbb{K}))$.

2. *Déterminer le commutant puis le centre de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes.*

3. *Déterminer le commutant puis le centre de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.*

4. *Soit* D *une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Déterminer* $C(\{D\})$.

Exercice IV.3.7 ($\star\star$)**.** *On note* $M = \left(\binom{j-1}{i-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. *Calculer* M^{-1}.

Indications. Trouver un endomorphisme u d'un espace de polynômes t.q. la matrice de u dans une certaine base soit égale à M.

Exercice IV.3.8 ($\star\star$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ t.q.*

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \ |A_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |A_{i,j}| .$$

Montrer que A est inversible.

Indications. Il s'agit de montrer que $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

Exercice IV.3.9 ($\star\star$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1.*

1. *Montrer que $H^2 = (\operatorname{tr} H) H$.*

2. *Après avoir précisé quand $(I_n + H)$ est inversible, calculer $(I_n + H)^{-1}$.*

Indications.

1. On pourra décomposer H comme le produit d'une matrice colonne par une matrice ligne.

2. Chercher l'inverse de $(I_n + H)$ sous la forme $(aI_n + bH)$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

Exercice IV.3.10 ($\star\star$)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ t.q.* $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$.

1. *Montrer l'existence de $r \in \mathbb{N}^*$ t.q.* $\dim E = 2r$.

2. *Montrer que E admet une base β t.q.* $\operatorname{Mat}_\beta(u) = \begin{bmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice IV.3.11 ($\star\star$)**.** *On note* $E = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}, \ (a, b) \in \mathbb{K}^2 \right\}$.

1. *Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_2(\mathbb{K})$.*

2. *Montrer que E est un sous-anneau de $\mathbb{M}_2(\mathbb{K})$.*

3. *Montrer que l'anneau E est commutatif.*

4. *Montrer que $\forall M \in E \cap GL_2(\mathbb{K}), \ M^{-1} \in E$.*

Indications.

4. Pour $M \in E \cap GL_2(\mathbb{K})$, considérer l'application $X \in E \longmapsto MX \in E$.

Exercice IV.3.12 ($\star\star$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. On note :*

$$E_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. *E_n est-il un espace vectoriel ?*

2. *Si E_n est un espace vectoriel, est-il de dimension finie ?*

3. *Si E_n est de dimension finie, quelle est sa dimension ?*

4. *Montrer que E_n est stable par produit (c'est donc une algèbre).*

5. *Trouver une base $(P_1, \ldots, P_{\dim E_n})$ de E_n t.q. $\forall k \in [\![1, \dim E_n]\!]$, $P_k^2 = P_k$. On utilisera cette base par la suite.*

6. *Trouver les éléments inversibles de E_n (i.e. les éléments de E_n admettant un inverse dans E_n).*

7. *Quel type de structure a l'ensemble des éléments non inversibles de E_n (ex : plan vectoriel, droite vectoriel, réunion d'un plan et d'une droite ...).*

8. *Résoudre dans E_n l'équation $X^2 = X$.*

9. *Montrer qu'il existe un isomorphisme d'algèbres entre E_n et E_2.*

Exercice IV.3.13 (Matrices magiques, ⋆⋆)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ est dite magique s'il existe $\sigma \in \mathbb{K}$ t.q.*

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^{n} M_{i,j} = \sigma \qquad \text{et} \qquad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \sum_{i=1}^{n} M_{i,j} = \sigma.$$

On note alors $s(M) = \sigma$. On note de plus $\mathfrak{M}$ l'ensemble des matrices magiques.

1. *Montrer que $\mathfrak{M}$ est une sous-algèbre de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ et que $s : \mathfrak{M} \to \mathbb{K}$ est un morphisme d'algèbres.*

2. *Si $M \in \mathfrak{M} \cap GL_n(\mathbb{K})$, montrer que $M^{-1} \in \mathfrak{M}$.*

Pour $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, on note ϕ_M l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M. On note de plus $H = \{x \in \mathbb{K}^n,\ x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ et $D = \operatorname{Vect}((1, \dots, 1)) \subset \mathbb{K}^n$.

3. *Montrer que $M \in \mathfrak{M}$* ssi *H et D sont stables par ϕ_M.*

4. *En déduire* $\dim \mathfrak{M}$*.*

Exercice IV.3.14 (Un peu de réduction, ⋆⋆)**.** *Pour $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle idéal annulateur de M l'ensemble $\mathfrak{I}_M = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(M) = 0\}$.*

1. *Justifier que $\mathfrak{I}_M$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$.

2. *Déterminer $\mathfrak{I}_A$ et $\mathfrak{I}_B$.*

3. *Montrer que A et B ne sont pas semblables.*

4. *Montrer que de manière générale, si $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, alors il existe $\mu \in \mathbb{K}[X]$ t.q. $\mathfrak{I}_M = \mu\mathbb{K}[X]$.*

Exercice IV.3.15 (Trace, ⋆ ⋆ ⋆)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La trace d'une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ est définie par* $\operatorname{tr} A = \sum_{k=1}^{n} A_{k,k}$.

1. *Montrer que* $\operatorname{tr} : \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *est une forme linéaire. Est-elle injective ? Surjective ?*

2. *Montrer que* $\forall (A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

3. *Existe-t-il deux matrices A, B de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ t.q. $AB - BA = I_n$?*

4. *Déterminer la trace de la matrice d'un projecteur et d'une symétrie.*

5. *Soit f une forme linéaire sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ t.q. $\forall (A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2,\ f(AB) = f(BA)$. Montrer que* $f \in \operatorname{Vect}(\operatorname{tr})$.

6. *Soit f une forme linéaire quelconque sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que :*

$$\exists A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}),\ f(M) = \operatorname{tr}(AM).$$

Indications.

5. Utiliser la base canonique de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

IV.4 Déterminants

Exercice IV.4.1 (⋆)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les déterminants des matrices suivantes :*

1. $A_1 = \left((-1)^{\max(i,j)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

2. $A_2 = (\min(i, j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

3. $A_3 = (\max(i, j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

4. $A_4 = (|i - j| + 1)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

5. $A_5 = (1 - \delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

6. $A_6 = E^{1,1} + (\mathrm{sign}(j-i)\cdot j)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, *où* $\mathrm{sign}(0) = 0$ *et* $\mathrm{sign}(x) = \frac{x}{|x|}$ *si* $x \neq 0$.

Indications. Réponses :

1. $\det A_1 = 2^{n-1}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ **2.** $\det A_2 = 1$ **3.** $\det A_3 = (-1)^{n+1}n$
4. $\det A_4 = -(-2)^{n-2}(n+1)$ **5.** $\det A_5 = (-1)^{n-1}(n-1)$ **6.** $\det A_6 = n!$.

Exercice IV.4.2 ($\star$)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On considère* $V = \{(x \longmapsto P(x)e^x),\ P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

1. *Montrer que* V *est un espace vectoriel dont on précisera la dimension.*

On considère $\varphi : f \in V \longmapsto f' \in V$.

2. *Montrer que* φ *est un endomorphisme de* V *et calculer* $\det \varphi$.

Exercice IV.4.3 (Matrices de Frobenius, $\star\star$)**.** *Soit* $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. *On définit la matrice de Frobenius de* $(a_0, \dots, a_{n-1})$ *par :*

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}).$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, *calculer* $\det(\lambda I_n - F)$.

Exercice IV.4.4 ($\star\star$)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Pour* $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$, *on note* $\Delta(a,b,c)$ *le déterminant d'ordre* n *suivant :*

$$\Delta(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & c & \cdots & c \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}.$$

1. *Montrer que* $f : x \in \mathbb{K} \longmapsto \Delta(a+x, b+x, c+x)$ *est une fonction affine.*

2. *En déduire la valeur de* $\Delta(a,b,c)$.

Exercice IV.4.5 (Déterminant de Vandermonde, $\star\star$)**.** *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, *on appelle déterminant de Vandermonde de* $(a_0, \dots, a_n)$ *le déterminant suivant :*

$$\mathcal{V}(a_0, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_j & \cdots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & \cdots & a_j^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^i & a_1^i & \cdots & a_j^i & \cdots & a_n^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_j^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

1. *Que vaut* $\mathcal{V}(a_0, \dots, a_n)$ *lorsque* $a_0, \dots, a_n$ *ne sont pas deux à deux distincts ?*

Dans la suite, on suppose que $a_0, \dots, a_n$ *sont deux à deux distincts.*

2. *On considère* $f : x \in \mathbb{K} \longmapsto \mathcal{V}(a_0, \dots, a_{n-1}, x)$. *Montrer que* f *est polynomiale et donner son degré.*

3. *Trouver* $\deg f$ *points distincts en lesquels* f *s'annule et en déduire une factorisation de* f.

4. *En déduire que* $\mathcal{V}(a_0, \dots, a_n) = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(a_i - a_j)$.

Exercice IV.4.6 (Déterminants tridiagonaux, $\star\star$). *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 3}$. Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice tridiagonale, i.e. telle que $|i-j| \geqslant 2 \Longrightarrow M_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$. Pour $k \in \{1,\ldots,n\}$, on note M_k la matrice de taille k extraite de M en ne gardant que les k premières lignes et les k premières colonnes ; on pose de plus $\Delta_k = \det M_k$.*

1. *Pour $k \geqslant 3$, donner une relation de récurrence entre Δ_k, Δ_{k-1} et Δ_{k-2}.*
2. *Calculer les déterminants tridiagonaux suivants :*

a. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Indications.

1. Réponse : $\forall k \geqslant 3,\ \Delta_k = M_{k,k}\Delta_{k-1} - M_{k-1,k}M_{k,k-1}\Delta_{k-2}$.

Exercice IV.4.7 (Déterminants circulants, $\star\star$). *On fixe $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ et on note $\sigma = (1\ n\ (n-1)\ \cdots\ 2) \in \mathfrak{S}_n$. Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice circulant, i.e. telle que :*

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ M_{i,j} = M_{1,\sigma^{i-1}(j)}.$$

1. *Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$ et $X = {}^t\!\begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \end{pmatrix}$. Calculer MX.*
2. *En déduire que M est semblable à une matrice diagonale que l'on précisera (on dit que M est diagonalisable).*
3. *Que vaut* $\det M$ *?*
4. *Calculer le déterminant suivant :*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

IV.5 Espaces préhilbertiens réels

Exercice IV.5.1 ($\star$). *On se place dans $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On définit $[\cdot \mid \cdot]$ sur E^2 par :*

$$\forall (f,g) \in E^2,\ [f \mid g] = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\ \mathrm{d}t.$$

Montrer que $[\cdot \mid \cdot]$ est un produit scalaire sur E.

Exercice IV.5.2 ($\star\star$). *Déterminer :*

$$\inf_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \left(\alpha \sin t + \beta \cos t - e^t\right)^2\ \mathrm{d}t.$$

Indications. Écrire $\inf_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \left(\alpha \sin t + \beta \cos t - e^t\right)^2\ \mathrm{d}t$ comme la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien.

Exercice IV.5.3 ($\star\star$). *Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $(\cdot \mid \cdot)$ sur $\mathbb{R}_n[X]^2$ par :*

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2,\ (P \mid Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k).$$

1. *Montrer que $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.*

2. **a.** *Vérifier qu'il existe une famille* $(L_0, \ldots, L_n) \in \mathbb{R}_n[X]^{n+1}$ *t.q.*

$$\forall (k, \ell) \in \{0, \ldots, n\}^2, \; L_\ell(k) = \delta_{k,\ell}.$$

b. *Montrer que* $(L_0, \ldots, L_n)$ *est une base orthonormée de* $(\mathbb{R}_n[X], (\cdot \mid \cdot))$.

3. *Pour* $\ell \in \{0, \ldots, n\}$, *déterminer un réel* $\lambda_\ell \in \mathbb{R}$ *t.q.* $L_\ell - \lambda_\ell X^n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

4. *Déterminer* $\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$.

5. *En déduire que* $d\left(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X]\right) = \frac{(n!)^3}{(2n)!}$.

Exercice IV.5.4 ($\star\star$). *On se place dans* $\mathbb{R}[X]$. *On définit* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *sur* $\mathbb{R}[X]^2$ *par :*

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \; \langle P \mid Q \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)Q(n)}{2^n}.$$

1. *Après avoir vérifié que* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *est bien défini, montrer que c'est un produit scalaire sur* $\mathbb{R}[X]$.

2. *Calculer* $\left\langle X^k \mid 1 \right\rangle$ *pour* $k \in \{0, \ldots, 3\}$.

3. *Déterminer une base orthonormée de* $\mathbb{R}_1[X]$.

4. *Calculer :*

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(n^2 + an + b\right)^2}{2^n}.$$

Exercice IV.5.5 (Centrale '14, $\star\star$). *On se place dans* $E = \mathcal{C}^1\left([-1, 1], \mathbb{R}\right)$. *On définit* $(\cdot \mid \cdot)$ *sur* E^2 *par :*

$$\forall (u, v) \in E^2, \; (u \mid v) = \int_{-1}^{1} u(t)v(t) \; \mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que* $(\cdot \mid \cdot)$ *est un produit scalaire sur* E.

On considère $F = \left\{u \in E, \; u_{|[-1,0]} = 0\right\}$ *et* $G = \left\{u \in E, \; u_{|[0,1]} = 0\right\}$.

2. *Montrer que* $F^\perp = G$.

3. *A-t-on* $E = F \oplus G$ *?*

Exercice IV.5.6 (Mines '14, $\star\star$). *On se place dans* $E = \mathcal{C}^2\left([0, 1], \mathbb{R}\right)$. *On définit* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *sur* E^2 *par :*

$$\forall (f, g) \in E^2, \; \langle f \mid g \rangle = \int_0^1 \left(fg + f'g'\right).$$

1. *Montrer que* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *est un produit scalaire sur* E.

2. *Soit* $V = \{f \in E, \; f(0) = f(1) = 0\}$ *et* $W = \{f \in E, \; f = f''\}$.

a. *Quelles sont les dimensions de* V *et* W *?*

b. *Montrer que* V *et* W *sont supplémentaires et orthogonaux.*

c. *Expliciter la projection orthogonale sur* V.

IV.6 Espaces euclidiens

Exercice IV.6.1 ($\star$). *On se place dans* $\mathbb{R}^3$, *muni de sa structure euclidienne canonique. On considère* $H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \; x = z\right\}$. *Déterminer dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *la matrice* M *de la symétrie orthogonale* s *par rapport à* H. *Vérifier que* $M^2 = I_3$.

Exercice IV.6.2 ($\star$). *On se place dans* $\mathbb{R}^n$, *muni de sa structure euclidienne canonique. On considère* $H = \{x \in \mathbb{R}^n, \; \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$. *Déterminer dans la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *la matrice* M *de la projection orthogonale* p *sur* H. *Vérifier que* $M^2 = M$.

Exercice IV.6.3 ($\star$). *Soit* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien* E.

1. *Montrer que :*
a. $(E+F)^\perp = E^\perp \cap F^\perp$ **b.** $(E\cap F)^\perp = E^\perp + F^\perp$.

2. *Que subsiste-t-il de ces égalités en dimension infinie ?*

Exercice IV.6.4 ($\star\star$)**.** *On se place dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne orientée usuelle. On rappelle que pour $(x,y)\in\left(\mathbb{R}^3\right)^2$, $x\wedge y$ est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\forall w\in\mathbb{R}^3,\ [x,y,w] = \langle x\wedge y \mid w\rangle$. Démontrer la formule usuelle du produit vectoriel :*

$$\forall (x,y)\in\left(\mathbb{R}^3\right)^2,\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2y_3-x_3y_2\\x_3y_1-x_1y_3\\x_1y_2-x_2y_1\end{pmatrix}.$$

Exercice IV.6.5 ($\star\star$)**.** *Soit E un espace euclidien de dimension 3, $r\in SO(E)$ et s une symétrie orthogonale. Caractériser $s\circ r\circ s$*

Exercice IV.6.6 ($\star\star$)**.** *Soit E un espace euclidien. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ vérifiant la condition suivante :*

$$\forall (x,y)\in E^2,\ \langle x\mid y\rangle = 0 \Longrightarrow \langle f(x)\mid f(y)\rangle = 0.$$

1. *Montrer qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}_+$ t.q. $\forall x\in E,\ \|f(x)\| = \alpha\,\|x\|$.*

2. *En déduire qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}_+$ et $g\in O(E)$ t.q. $f=\alpha g$.*

Exercice IV.6.7 ($\star\star$)**.** *On se place dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $(\cdot\mid\cdot)$ sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ par :*

$$\forall (A,B)\in E^2,\ (A\mid B) = \operatorname{tr}\left({}^tBA\right).$$

1. *Montrer que $(\cdot\mid\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ pour lequel la base canonique est orthonormée.*

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée à $(\cdot\mid\cdot)$.

2. *Montrer que $\forall A\in\mathbb{M}_n(\mathbb{R}),\ |\operatorname{tr} A|\leqslant\sqrt{n}\,\|A\|$.*

3. **a.** *Déterminer $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$, où $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est l'espace des matrices symétriques.*
b. *Expliciter la projection orthogonale sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.*

4. *Soit $U\in\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une CNS pour que l'application $f_U : A\in\mathbb{M}_n(\mathbb{R})\longmapsto AU\in\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ soit une isométrie (pour la norme $\|\cdot\|$).*

Indications.

2. Remarquer que $\operatorname{tr} A = (A\mid I_n)$.

Exercice IV.6.8 (Centrale '14, $\star\star$)**.** *Soit E un espace euclidien et $u\in E$ un vecteur unitaire. Pour quelles valeurs de $\alpha\in\mathbb{R}$ l'endomorphisme $f_\alpha : x\in E\longmapsto x-\alpha\langle u\mid x\rangle u$ est-il bijectif ?*

Exercice IV.6.9 (Mines '14, $\star\star$)**.** *Soit E un espace euclidien, F et G des sous-espaces vectoriels de E. Déterminer une CNS sur F et G pour que :*

$$\forall x\in E,\ \|x\|^2 = d(x,F)^2 + d(x,G)^2.$$

Exercice IV.6.10 ($\star\star\star$)**.** *Soit E un espace euclidien. Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ t.q. $\operatorname{tr} u = 0$.*

1. *Montrer qu'il existe $x\in E\backslash\{0\}$ t.q. $\langle u(x)\mid x\rangle = 0$.*

2. *Montrer qu'il existe ε base orthonormée de E t.q. les coefficients diagonaux de $\operatorname{Mat}_\varepsilon(u)$ soient tous nuls.*

Indications.

1. Trouver deux vecteurs non colinéaires x, y t.q. $\langle u(x)\mid x\rangle\geqslant 0$ et $\langle u(y)\mid y\rangle\leqslant 0$ (on pourra par exemple munir E d'une base orthonormée et choisir pour x et y des vecteurs de base). Appliquer ensuite le théorème des valeurs intermédiaires à l'application $\varphi : t\in[0,1]\longmapsto\langle u((1-t)x+ty)\mid(1-t)x+ty\rangle\in\mathbb{R}$.

Exercice IV.6.11 ($\star\star\star$)**.** *Soit E un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.*

Indications. Sachant que $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$, il s'agit de montrer que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont orthogonaux. Pour cela, si $(f, g) \in \operatorname{Im} p \times \operatorname{Ker} p$, considérer l'application $\phi : \lambda \in \mathbb{R} \longmapsto \|f + \lambda g\| - \|f\| = \|f + \lambda g\| - \|p(f + \lambda g)\|$. Noter que ϕ est un polynôme réel du second degré à valeurs positives vérifiant $\phi(0) = 0$.

Exercice IV.6.12 ($\star\star\star$)**.** *Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$. Donner une CNS sur f pour que :*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y).$$

On rappelle que pour $(x, y) \in E^2$, $x \wedge y$ est l'unique vecteur vérifiant $\forall w \in E,\ [x, y, w] = \langle x \wedge y \mid w\rangle$.

Indications. Que dire de l'image d'une base orthonormée directe ?

Exercice IV.6.13 ($\star\star\star$)**.** *Soit E un espace euclidien de dimension n. Montrer que les réflexions (i.e. les symétries orthogonales par rapport à des hyperplans) engendrent $O(E)$.*

Indications. Soit $u \in O(E)$ avec $d = \dim \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$. On pourra montrer par récurrence descendante sur d que u s'écrit comme produit d'au plus $n - d$ réflexions.

Exercice IV.6.14 (Déterminants de Gram, $\star\star\star$)**.** *Soit E un espace euclidien. Étant donné une famille $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$, on définit sa matrice de Gram :*

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_p) = (\langle x_i \mid x_j\rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathbb{M}_p(\mathbb{R}).$$

On note de plus $\gamma(x_1, \ldots, x_p) = \det(\Gamma(x_1, \ldots, x_p))$.

1. *Montrer que $(x_1, \ldots, x_p)$ est liée* ssi $g(x_1, \ldots, x_p) = 0$.

On suppose désormais que $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre et on note $F = \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$ et π la projection orthogonale sur F.

2. *Soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ une base orthonormée de F. Si $A = \operatorname{Mat}_\varepsilon(x_1, \ldots, x_p)$, montrer que $\Gamma(x_1, \ldots, x_p) = {}^tAA$. En déduire que $\gamma(x_1, \ldots, x_p) > 0$.*

3. *Pour $x \in E$, montrer que $\gamma(x, x_1, \ldots, x_p) = \gamma(x - \pi(x), x_1, \ldots, x_p)$.*

4. *Montrer que :*

$$\forall x \in E,\ d(x, F)^2 = \frac{\gamma(x, x_1, \ldots, x_p)}{\gamma(x_1, \ldots, x_p)}.$$

Exercice IV.6.15 ($\star\star\star$)**.** *Le but est de déterminer les sous-groupes finis de $GL_2(\mathbb{R})$. Soit donc E un plan euclidien orienté ; ainsi, $GL(E) \simeq GL_2(\mathbb{R})$.*

1. *Déterminer les sous-groupes finis de $SO(E)$.*

2. *Soit G un sous-groupe fini de $O(E)$. Montrer que G est cyclique ou engendré par deux éléments.*

3. *On se donne maintenant G un sous-groupe fini de $GL(E)$.*

a. *On pose :*

$$\varphi : (x, y) \in E^2 \longmapsto \sum_{g \in G} \langle g(x) \mid g(y)\rangle.$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

b. *Montrer que $G \subset O(E, \varphi)$.*

c. *Conclure.*

Indications.

1. $O(E) \simeq \mathbb{U}$.

V Probabilités

V.1 Combinatoire

Exercice V.1.1 ($\star$)**.** *Déterminer le cardinal de* $\{(x_1,\dots,x_p)\in\{1,\dots,n\}^p\,,\ x_1<\dots<x_p\}$.

Exercice V.1.2 ($\star$)**.** *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$. *Déterminer le cardinal de* $\{(i,j)\in\mathbb{N}^2,\ 1\leqslant i<j\leqslant n\}$ *et de* $\{(i,j)\in\mathbb{N}^2,\ 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\}$.

Exercice V.1.3 ($\star\star$)**.** *Soit* E *un ensemble fini de cardinal* n.

1. *Déterminer le cardinal de* $\{(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2,\ A\cap B=\varnothing\}$.

2. *Déterminer le cardinal de* $\{(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2,\ A\cap B \text{ est un singleton}\}$.

Exercice V.1.4 ($\star\star$)**.** *Soit* E *un ensemble fini de cardinal* n. *Déterminer le nombre de parties de* E *contenant un nombre pair (resp. impair) d'éléments.*

Exercice V.1.5 ($\star\star$)**.** *Une cour est entièrement bordée de* m *murs* ($m\geqslant 2$)*. On dispose de* p *couleurs différentes* ($p\geqslant 1$) *et on désire peindre les murs de telle sorte que deux murs consécutifs aient des couleurs différentes. Montrer qu'il y a exactement* $(p-1)^m+(-1)^m(p-1)$ *façons de le faire.*

Indications. Remarquer que, pour peindre les m murs, deux cas de figure sont possibles : soit les murs 1 et $(m-1)$ sont de la même couleur (ce qui revient à peindre $(m-2)$ murs), soit ils ne le sont pas (ce qui revient à peindre $(m-1)$ murs).

Exercice V.1.6 ($\star\star$)**.** *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* d *sur un corps fini* k *de cardinal* q. *Déterminer le cardinal de* $GL(E)$.

Indications. On pourra se ramener à dénombrer les bases de E.

Exercice V.1.7 (Nombre de surjections, $\star\star$)**.** *Pour* $n,p\in\mathbb{N}^*$, *on note* $s(n,p)$ *le nombre de surjections* $\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,p\}$.

1. *Pour* $n\in\mathbb{N}^*$, *calculer* $s(n,1)$ *et* $s(n,n)$.

2. *Pour* $n\in\mathbb{N}^*$, *calculer* $s(n,2)$ *et* $s(n+1,n)$.

3. *Pour* $n,p\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$, *montrer que :*

$$s(n,p)=p\left(s(n-1,p)+s(n-1,p-1)\right).$$

4. *Pour* $n,p\in\mathbb{N}^*$, *montrer que :*

$$s(n,p)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^n.$$

Exercice V.1.8 (Nombre d'involutions, $\star\star$)**.** *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$. *Une permutation* $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ *est appelée involution lorsque* $\sigma\circ\sigma=\mathrm{id}_{\{1,\dots,n\}}$. *On note* ι_n *le nombre d'involutions de* $\mathfrak{S}_n$.

1. *Calculer* ι_1,ι_2,ι_3.

2. *Montrer que pour* $n\in\mathbb{N}^*$, $\iota_{n+2}=\iota_{n+1}+(n+1)\iota_n$.

3. *À l'aide du théorème de décomposition en cycles, calculer* ι_n *pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice V.1.9 (Nombre de relations d'équivalence, $\star\star$)**.** *Pour* $n\in\mathbb{N}^*$, *on note* r_n *le nombre de relations d'équivalence sur* $\{1,\dots,n\}$. *Exprimer* r_n *en fonction des* r_k, $k<n$.

Indications. Fixer un élément et raisonner sur la classe d'équivalence de cet élément.

Exercice V.1.10 (Formule du crible, $\star\star\star$)**.**

1. *On se donne* E *un ensemble et* $A_1,\dots,A_p$ *des parties finies de* E. *Montrer que :*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{p}A_i\right|=\sum_{k=1}^{p}\left((-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant p}|A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k}|\right).$$

2. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\phi(n)$ le nombre d'entiers de $\{1, \ldots, n\}$ premiers avec n. Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \phi(n) = n \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \mid n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

3. *On appelle dérangement de $\{1, \ldots, n\}$ tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ t.q. $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\sigma(i) \neq i$. On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des dérangements de $\{1, \ldots, n\}$ et $d_n = |\mathcal{D}_n|$.*

a. *Écrire $\mathfrak{S}_n \setminus \mathcal{D}_n$ comme une réunion d'ensembles simples.*

b. *En déduire d_n.*

c. *Que vaut $\lim_{n \to +\infty} \frac{|\mathcal{D}_n|}{|\mathfrak{S}_n|}$?*

V.2 Espaces probabilisés

Exercice V.2.1 ($\star$). *On lance trois fois un dé non truqué. Quelle est la probabilité que la somme des résultats vaille 3 (resp. 4, 5) ?*

Exercice V.2.2 ($\star$). *On tire sans remise cinq cartes d'un jeu de trente-deux cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir :*

1. *Deux rois et trois reines ?*

2. *Seulement des trèfles ?*

3. *Au moins un trèfle ?*

4. *Exactement un trèfle ?*

Exercice V.2.3 ($\star$). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\Omega = \{-n, \ldots, n\}$ et on considère :*

$$Q : k \in \Omega \longmapsto \frac{n+1-|k|}{(n+1)^2} \in \mathbb{R}.$$

1. *Montrer que Q définit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.*

2. *Calculer la probabilité de l'événement $\{0, \ldots, n\}$.*

Exercice V.2.4 ($\star\star$). *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_1, \ldots, A_n)$ une suite finie d'événements de probabilité 1. Que vaut $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$?*

Exercice V.2.5 ($\star\star$). *Un joueur A joue trois parties d'échec, contre B et C alternativement. Il sait que B est plus fort que C ; le but est de gagner au moins deux parties consécutives. Qui doit-il affronter en premier ?*

Exercice V.2.6 ($\star\star$). *Sur n boîtes de conserve, deux sont avariées. On ouvre k boîtes parmi les n. Quelle est la probabilité qu'aucune de ces k boîtes ne soit avariée ?*

Exercice V.2.7 ($\star\star$). *On considère n menteurs $\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n$. Le menteur $\mathscr{M}_1$ reçoit une information sous la forme "oui" ou "non", et la transmet à $\mathscr{M}_2$, et ainsi de suite jusqu'à $\mathscr{M}_n$. Chacun transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité p, le contraire avec la probabilité $(1-p)$; les réponses des n menteurs sont indépendantes.*

1. *Calculer la probabilité p_n pour que l'information soit fidèlement transmise, i.e. pour que $\mathscr{M}_n$ reçoive la même information que $\mathscr{M}_1$.*

2. *Que se passe-t-il quand n devient grand ?*

Indications. Trouver une relation de récurrence linéaire pour la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et la résoudre.

Exercice V.2.8 (Jeu de Monty Hall, $\star\star$). *On présente à un candidat trois gobelets ; en-dessous de l'un d'eux se trouve un prix. Le candidat choisit un gobelet, puis le présentateur soulève un des gobelets non choisis par le candidat (vide, bien entendu) et lui propose de changer d'avis. Le candidat a-t-il intérêt à changer de gobelet ?*

Exercice V.2.9 (Urnes de Pólya, $\star\star$). *On effectue des tirages successifs dans une urne contenant initialement b boules blanches et n boules noires. Après chaque tirage, on remet en place la boule tirée et on ajoute t boules de sa couleur. Montrer par récurrence sur j que la probabilité de tirer une boule blanche au j-ième tirage et $p_j = \frac{b}{n+b}$.*

Indications. On pourra introduire l'événement B_1 : "la boule obtenue au premier tirage est blanche".

Exercice V.2.10 ($\star\star$). *On lance une pièce équilibrée n fois ($n \geqslant 1$). Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on note A_k l'événement "on obtient pile au k-ième lancer". On note de plus B l'événement "le nombre de piles obtenus au cours des n lancers est pair".*

1. *Déterminer les probabilités des événements A_k pour $k \in \{1, \dots, n\}$ et B.*
2. *Montrer que les événements $A_1, \dots, A_n, B$ ne sont pas mutuellement indépendants.*
3. *Montrer que toute sous-famille de n événements choisis parmi $A_1, \dots, A_n, B$ est indépendante.*

Indications.

2. On pourra montrer que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap B) \neq \mathbb{P}(A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{P}(B)$.

Exercice V.2.11 ($\star\star$). *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A un événement de probabilité non nulle. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{P} = \mathbb{P}_A$.*

V.3 Variables aléatoires

Exercice V.3.1 ($\star$). *On lance deux dés ; on note X (resp. Y) le chiffre obtenu avec le premier (resp. second) dé. Déterminer la loi de* $\max\{X, Y\}$ *et de* $\min\{X, Y\}$.

Indications. Penser aux fonctions de répartition.

Exercice V.3.2 ($\star$). *Une urne contient n boules distinctes numérotées de 1 à n. On choisit avec remise p boules dans cette urne et on note X le plus petit des numéros obtenus. Déterminer la loi de X.*

Exercice V.3.3 ($\star$). *Soit X une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $\{-10, \dots, +10\}$.*

1. *Déterminer les lois de $Y = X + 5$ et de $Z = X^2$.*
2. *Calculer $\mathbb{P}(Y^2 - Y < 0)$.*

Exercice V.3.4 ($\star$). *Une urne contient* 100 *jetons numérotées de* 1 *à* 100. *On fait n tirages avec remise, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de jetons impairs obtenus.*

1. *Déterminer la loi de X.*
2. *Quelle est la probabilité de tirer un nombre pair de jeton impairs ? Un nombre pair de jetons multiples de trois ?*

Exercice V.3.5 ($\star\star$). *Soit X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, de paramètre $\frac{1}{2}$. On pose $Z = |X - Y|$.*

1. *Déterminer la loi de Z.*
2. *Les variables aléatoires X, Y et Z sont-elles mutuellement indépendantes ? Deux à deux indépendantes ?*

Indications.

2. On pourra calculer la probabilité de l'événement $(X = 1) \cap (Y = 1) \cap (Z = 1)$.

Exercice V.3.6 ($\star\star$). *Soit $U_1, \dots, U_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p. Déterminer $\mathbb{P}(U_1 \leqslant \cdots \leqslant U_n)$.*

Indications. Trouver une relation entre $\mathbb{P}(U_1 \leqslant \cdots \leqslant U_n)$ et $\mathbb{P}(U_1 \leqslant \cdots \leqslant U_{n-1})$.

Exercice V.3.7 ($\star\star$). *On lance n fléchettes sur un ballon. On note p la probabilité d'éclater le ballon. Lorsque le ballon éclate, on s'arrête. On appelle alors N le nombre de fléchettes utilisées.*

1. *Donner la loi de N.*
2. *Donner la loi de N sachant que la ballon a éclaté.*

Exercice V.3.8 (Loi hypergéométrique, $\star\star$). *On tire n boules sans remise dans une urne contenant r boules rouges et b boules bleues. Les boules sont numérotées de 1 à $(r+b)$, les boules rouges portant les numéros de 1 à r et les bleues les numéros de $(r+1)$ à $(r+b)$.*

1. *Déterminer la loi de la variable X égale au nombre de boules rouges obtenues.*

On dit que X suit une loi hypergéométrique.

2. *Soit X_i la variable aléatoire égale à 1 si la i-ième boule rouge est dans le tirage, 0 sinon. Que représente $X_1 + \cdots + X_r$?*
3. *Calculer l'espérance et la variance de X.*

On note $p = \frac{r}{r+b}$ la proportion de boules rouges et $N = r+b$. On note désormais X_N à la place de X.

4. *On fixe $k \in \{0, \ldots, n\}$. Montrer que $\mathbb{P}(X_N = k) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathbb{P}(Y = k)$, où Y suit une loi binomiale de paramètres n, p.*

On dit que $(X_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers Y.

Exercice V.3.9 ($\star\star$). *Un groupe de n personnes doit être réparti entre trois hôtels $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ et $\mathscr{H}_3$; la répartition se fait aléatoirement. On note X_i le nombre de personnes dans l'hôtel $\mathscr{H}_i$.*

1. *Donner la loi de X_1 puis de $X_1 + X_2$.*
2. *En déduire $\operatorname{cov}(X_1, X_2)$ puis déterminer $\mathbb{E}(X_1X_2)$.*
3. *Donner la loi du couple (X_1, X_2).*
4. *À partir de là, retrouver les lois marginales de X_1 et X_2.*

Exercice V.3.10 (Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, $\star\star$). *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.*

1. *Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}(S_n = 0)$ (c'est la probabilité que la marche aléatoire retourne à l'origine à l'instant n).*
2. *On rappelle la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Donner un équivalent de $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ lorsque $n \to +\infty$.*

Exercice V.3.11 ($\star\star$). *On choisit aléatoirement une permutation σ dans $\mathfrak{S}_n$. On note X le cardinal de l'orbite de 1 sous l'action de σ. Donner la loi de X.*

Exercice V.3.12 ($\star\star$). *On munit $\mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme, et on note C la variable aléatoire égale au nombre d'orbites d'une permutation. On note :*

$$\mathcal{G}_C : t \in \mathbb{R} \longmapsto E\left(t^C\right).$$

Déterminer $\mathcal{G}_C(k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Indications. Remarquer que k^C est le cardinal de l'ensemble des fonctions $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$ constantes sur chacun des C cycles de la permutation étudiée.

Exercice V.3.13 (Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev, $\star\star$). *Soit X une variable aléatoire réelle (à image finie).*

1. *Montrer que $\forall A \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{P}(X \geqslant A) \leqslant \frac{E(X)}{A}$.*
2. *Montrer que $\forall A \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant A) \leqslant \frac{V(X)}{A^2}$.*

Exercice V.3.14 (Mines '16, $\star\star$). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n urnes $\mathscr{U}_1, \ldots, \mathscr{U}_n$. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, l'urne $\mathscr{U}_k$ contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit, en toute indépendance et uniformité, une urne, puis une boule dans cette urne. La variable X indique le numéro de l'urne choisie, et la variable Y le numéro de la boule.*

1. *Donner la loi du couple* (X, Y).

2. *Calculer* $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice V.3.15 (Coefficient de corrélation, $\star\star\star$)**.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Soit* X *et* Y *des variables aléatoires réelles définies sur* Ω *d'écart type non nul. On appelle coefficient de corrélation linéaire de* X *et* Y *le réel :*

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

1. *Montrer que le coefficient de corrélation est toujours compris dans* $[-1,1]$ *et donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit égal à* 1 *en valeur absolue.*

2. *Dans la suite,* $\mathbb{P}$ *est la probabilité uniforme, et on va donner une interprétation algébrique du résultat précédent.*

a. *Montrer que l'ensemble* E *des variables aléatoires réelles définies sur* Ω *muni de la forme bilinéaire* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *défini par* $\langle X \mid Y \rangle = \mathbb{E}(XY)$ *est un espace euclidien.*

b. *On note* $\mathcal{C}$ *le sous-espace vectoriel* $\operatorname{Vect}(1)$ *dans* E. *Si* $X \in E$, *quel est le projeté orthogonal de* X *sur* $\mathcal{C}$ *et quelle est la distance de* X *à* $\mathcal{C}$ *?*

c. *Si* $X \in E$ *est une variable aléatoire qui n'est pas presque-sûrement constante, et si* $Y \in E$ *est quelconque, déterminer le projeté orthogonal de* Y *sur* $\operatorname{Vect}(1, X)$ *et la distance de* Y *à* $\operatorname{Vect}(1, X)$. *Quel résultat a-t-on redémontré dans ce cas particulier ?*

Exercice V.3.16 (Un exemple de méthode probabiliste, $\star\star\star$)**.** *Soit* E *un espace euclidien, soit* $(v_1, \ldots, v_n) \in E^n$ *t.q.* $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\|v_i\| \leqslant 1$. *Soit* $(p_1, \ldots, p_n) \in [0,1]^n$. *On pose* $X_1, \ldots, X_n$ *des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs* $p_1, \ldots, p_n$, *et :*

$$Y = \left\| \sum_{i=1}^{n} (X_i - p_i)\, v_i \right\|^2.$$

1. *Montrer que* $E(Y) \leqslant \frac{n}{4}$.

2. *En déduire qu'il existe* $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \{0,1\}^n$ *t.q.* $\|\sum_{i=1}^n \omega_i v_i - \sum_{i=1}^n p_i v_i\| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2}$.

Exercice V.3.17 ($\star\star\star$)**.** *Soit* $0 \leqslant p \leqslant p' \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}^*$. *Soit* $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $X' \sim \mathcal{B}(n,p')$. *Pour* $k \in \{0, \ldots, n\}$, *comparer* $\mathbb{P}(X = k)$ *et* $\mathbb{P}(X = k')$.

Indications. Trouver deux variables aléatoires Y et Y' t.q. $Y \sim X$, $Y' \sim X'$ et $Y' \geqslant Y$. Le faire d'abord dans le cas $n = 1$, puis généraliser par récurrence.

Exercice V.3.18 (Mines '16, $\star\star\star$)**.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $A_1, \ldots, A_n$ *des événements indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des* A_i *ne soit réalisé est majorée par* $\exp\left(-\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\right)$.

Indications. Considérer les variables aléatoires $X_i = \mathbb{1}_{A_i}$ et calculer $\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n (1 - X_i)\right)$.

Exercice V.3.19 (Ulm '17, $\star\star\star$)**.** *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *suivant toutes la loi d'une variable aléatoire* X. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose :*

$$R_n = \left|\{X_1, \ldots, X_n\}\right|.$$

Montrer que $\mathbb{E}(R_n) = o(n)$.

Indications. Utiliser la formule du crible pour réécrire $R_n = \left|\bigcup_{k=1}^n \{X_k\}\right|$ comme une somme et utiliser la convexité de $t \longmapsto (1-t)^n$.