Questions de cours.

1. *Énoncer et démontrer la caractérisation séquentielle des limites.*

2. *Énoncer et démontrer le théorème de composition des limites.*

3. *Montrer que toute fonction continue et injective sur un intervalle est strictement monotone.*

1 Continuité

Exercice 1.1 ($\star$)**.** *Étudier la continuité en* 0 *des applications suivantes :*

1. $\lfloor \cdot \rfloor$

2. $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$

3. $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$

4. $x \longmapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

5. $x \longmapsto \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

6. $x \longmapsto \begin{cases} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$.

Exercice 1.2 ($\star$)**.** *Étudier la continuité de* $x \in [0,2] \longmapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

Exercice 1.3 ($\star$)**.** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue non constante. Montrer que l'ensemble* $f(\mathbb{R})$ *est infini.*

Exercice 1.4 ($\star$)**.** *Des fonctions vérifiant les propriétés suivantes existent-elles ?*

1. *Une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *discontinue en tout point telle que* $|f|$ *soit continue en tout point.*

2. *Une fonction* $f : [0,1] \to [0,1]$ *bijective et discontinue en tout point.*

3. *Une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *périodique non constante n'admettant pas de plus petite période strictement positive.*

4. *Une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *périodique non bornée.*

5. *Une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *bornée sur* $\mathbb{R}$ *qui n'atteint ses bornes sur aucun segment.*

6. *Une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *périodique non constante et admettant une limite en* $+\infty$.

7. *Une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue t.q.* $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *et* $f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

8. *Une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *injective et non strictement monotone.*

Exercice 1.5 ($\star$)**.** *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *continue t.q.* $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. *Montrer que* $f(\mathbb{R}_+) \supset [f(0), \ell[$.

Exercice 1.6 ($\star$)**.** *Un marcheur parcourt dix kilomètres en deux heures. Montrer qu'il existe un intervalle d'une heure pendant lequel il parcourt exactement cinq kilomètres.*

Exercice 1.7 ($\star$)**.** *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *une fonction continue t.q.*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f\left(x^2\right) = f(x).$$

Montrer que f *est constante.*

Exercice 1.8 ($\star$)**.** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et décroissante. Montrer que* f *possède un unique point fixe.*

Exercice 1.9 ($\star$)**.** *Soit* I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *contenant un point* a. *Soit* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues en* a. *Montrer que* $\max(f,g)$ *est continue en* a.

Exercice 1.10 ($\star$)**.** *Déterminer l'image de* $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x\cos x$.

Exercice 1.11 ($\star$)**.** *Soit* $a < b$ *deux réels. Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction croissante telle que* $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. *Montrer que* f *est continue.*

Exercice 1.12 ($\star$)**.** *Une fonction vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires est-elle nécessairement continue ?*

Exercice 1.13 ($\star$)**.** *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Le but est de démontrer que* $\sup_{[a,b]} f = \sup_{]a,b[} f$.

1. *Quelle inégalité est immédiate ?*
2. *En utilisant le fait que la borne supérieure de* f *sur* $[a, b]$ *est atteinte en un point* x_0*, montrer l'égalité (on pourra distinguer les cas* $x_0 \in]a, b[$ *et* $x_0 \in \{a, b\}$*).*

Exercice 1.14 ($\star$)**.**

1. *Montrer qu'il n'existe pas de surjection continue* $[0, 1] \to]0, 1[$.
2. *Construire une sujection continue* $]0, 1[\to [0, 1]$.

Exercice 1.15 ($\star$)**.** *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On pose :*

$$g : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \sup_{t\in[0,x]} f(t).$$

Montrer que g *est continue.*

Exercice 1.16 ($\star$)**.** *Soit* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues.*

1. *On suppose que* $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) < g(x)$.
   a. *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant g(x)$.
   b. *Donner un exemple où* $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x)$.
2. *On suppose que* $f_{|\mathbb{Q}}$ *est strictement croissante. Montrer que* f *est strictement croissante.*

Exercice 1.17 ($\star$)**.** *Soit* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue t.q.* $\lim_a f = \lim_b f$*. Montrer que* f *n'est pas injective.*

Exercice 1.18 (ENSI '85, $\star$)**.** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Montrer que* f *est affine si et seulement si* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

Exercice 1.19 ($\star$)**.** *Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction* f *strictement croissante est au plus dénombrable.*

Exercice 1.20 ($\star$)**.** *Soit* $f, g : [a, b] \to [a, b]$ *deux applications continues telles que* $f \circ g = g \circ f$*. On cherche à prouver l'existence de* $c \in [a, b]$ *t.q.* $f(c) = g(c)$*. On note* f^n *et* g^n *les* n*-ièmes itérées respectives de* f *et* g*.*

1. *Montrer que* $f > g$ *entraîne* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^n > g^n$.
2. *Montrer que* $f > g$ *entraîne* $\exists K > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a, b],\ f^n(x) \geqslant Kn + g^n(x)$.
3. *Conclure.*

Exercice 1.21 ($\star$)**.** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(x + 1) - f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$*. Montrer que*

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell.$$

Exercice 1.22 ($\star$)**.** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. On note* A *l'ensemble des points* x *tels que* f *a un maximum local en* x*.*

1. *Montrer que* $f(A)$ *est dénombrable.*
2. *On suppose* f *continue et* $A = \mathbb{R}$*. Que dire de* f *?*

Exercice 1.23 (Mines '02, $\star$)**.** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue. On suppose qu'il existe* $a \in \mathbb{R}$ *t.q.* $f \circ f(a) = a$*.*

1. f *admet-elle un point fixe ?*
2. *Généraliser.*