Questions de cours.

1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites convergeant vers des limites réelles respectives* u_∞ *et* v_∞. *Montrer que* $u_nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u_\infty v_\infty$.
2. *Énoncer et démontrer le théorème de la limite monotone.*
3. *Énoncer et démontrer le théorème des suites adjacentes.*

1 Suites numériques

Exercice 1.1 ($\star$)**.** *Montrer que la suite* $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

Exercice 1.2 (Moyenne arithmético-géométrique, $\star$)**.**

1. *Montrer que* $\forall (a,b)\in(\mathbb{R}_+)^2,\ 2\sqrt{ab}\leqslant a+b$.

On définit deux suites de réels positifs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $u_0=a$, $v_0=b$ *et :*

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}\ \text{ et }\ v_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+v_n\right).$$

2. *Montrer que, pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\leqslant v_n$, $u_n\leqslant u_{n+1}$ *et* $v_{n+1}\leqslant v_n$.
3. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers une même limite, appelée moyenne arithmético-géométrique de* a *et* b *et notée* $M(a,b)$.
4. *Calculer* $M(a,a)$ *et* $M(a,0)$ *pour* $a\in\mathbb{R}_+$.
5. *Exprimer* $M(\lambda a,\lambda b)$ *en fonction de* $M(a,b)$ *pour* $(a,b)\in(\mathbb{R}_+)^2$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}_+$.

Exercice 1.3 (Théorème de Cesàro, $\star$)**.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. Pour* $n\in\mathbb{N}$, *on pose :*

$$c_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k.$$

1. *Si* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\in\mathbb{R}$, *montrer que* $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
2. *On souhaite étudier la réciproque. On suppose donc que* $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\in\mathbb{R}$.
   a. *Donner un exemple montrant que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas nécessairement convergeante.*
   b. *En supposant de plus* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monotone, montrer que* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Soit maintenant $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs avec* $\alpha_0>0$. *On définit :*

$$\hat{c}_n=\frac{\sum_{k=0}^{n}\alpha_ku_k}{\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}.$$

3. *Donner une CNS sur la suite* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pour que, pour toute suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergeant vers* $\ell\in\mathbb{R}$, *la suite* $(\hat{c}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ.

Exercice 1.4 (Suites de Cauchy, $\star$)**.** *Une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite de Cauchy lorsque :*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall p,q\geqslant N,\ |u_p-u_q|\leqslant\varepsilon.$$

1. *Montrer que toute suite convergeante est de Cauchy.*
2. *On se donne* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy. Le but est de montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
   a. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*
   b. *Étudier les suites* $(\alpha_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *et* $(\beta_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *définies par* $\alpha_p=\inf_{n\geqslant p}u_n$ *et* $\beta_p=\sup_{n\geqslant p}u_n$.
   c. *Conclure.*

Exercice 1.5 ($\star$). *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $g_n : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto nx \ln x - 1$.*

1. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique $\pi_n \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $g_n(\pi_n) = 0$.*

2. *La suite $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?*

3. *On note $\ell = \lim_{n \to +\infty} \pi_n$. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} n(\pi_n - \ell)$.*

Exercice 1.6 ($\star$). *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^{n+1} + x^n + 2x - 1$.*

1. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+$ t.q. $f_n(u_n) = 0$.*

2. *Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.*

Exercice 1.7 ($\star$). *Étudier la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$.*

Exercice 1.8 ($\star$). *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.*

1. *Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.*

2. *Montrer que $\frac{u_n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.*

Exercice 1.9 ($\star$). *Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $r_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et on note $r_n = \frac{p_n}{q_n}$, avec $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $p_n \wedge q_n = 1$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $q_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.*

Exercice 1.10 ($\star$). *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $[0, 1]$. On suppose que $u_n v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ et $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.*

Exercice 1.11 ($\star$). *Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une bijection. Montrer que si la suite $\left(\frac{f(n)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\ell = 1$.*

Exercice 1.12 ($\star$). *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On note :*

$$\limsup_{n \to +\infty} u_n = \lim_{p \to +\infty} \left(\sup_{n \geqslant p} u_n \right) = \inf_{p \in \mathbb{N}} \left(\sup_{n \geqslant p} u_n \right).$$

1. *Montrer que $\limsup_{n \to +\infty} u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Proposer une définition analogue de $\liminf_{n \to +\infty} u_n$ de telle sorte que $\liminf_{n \to +\infty} u_n$ soit la plus petite valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

2. *Pour $\ell \in \mathbb{R}$, montrer que $\ell = \limsup_{n \to +\infty} u_n$* ssi *pour tout $a > \ell$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant a\}$ est fini et pour tout $a < \ell$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant a\}$ est infini.*

Exercice 1.13 ($\star$). *Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer si elle existe la limite de la suite $\left(\lfloor a^n \rfloor^{1/n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.*

Exercice 1.14 ($\star$). *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle u_n le dernier chiffre de l'écriture en base 10 de n^n. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est périodique et donner une période de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.*

Exercice 1.15 (Centrale '16, $\star$). *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$.*

1. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ t.q. $P_n(x_n) = 1$.*

2. *Étudier $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.*