Questions de cours.

1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites convergeant vers des limites réelles respectives* u_∞ *et* v_∞. *Montrer que* $u_nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u_\infty v_\infty$.
2. *Énoncer et démontrer le théorème de la limite monotone.*
3. *Énoncer et démontrer le théorème des suites adjacentes.*

1 Suites numériques

Exercice 1.1 ($\star$)**.** *Montrer que la suite* $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

Exercice 1.2 (Moyenne arithmético-géométrique, $\star$)**.**

1. *Montrer que* $\forall(a,b)\in(\mathbb{R}_+)^2$, $2\sqrt{ab}\leqslant a+b$.

On définit deux suites de réels positifs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $u_0=a$, $v_0=b$ *et :*

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}\ \text{ et }\ v_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+v_n\right).$$

2. *Montrer que, pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\leqslant v_n$, $u_n\leqslant u_{n+1}$ *et* $v_{n+1}\leqslant v_n$.
3. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers une même limite, appelée moyenne arithmético-géométrique de* a *et* b *et notée* $M(a,b)$.
4. *Calculer* $M(a,a)$ *et* $M(a,0)$ *pour* $a\in\mathbb{R}_+$.
5. *Exprimer* $M(\lambda a,\lambda b)$ *en fonction de* $M(a,b)$ *pour* $(a,b)\in(\mathbb{R}_+)^2$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}_+$.

Exercice 1.3 (Théorème de Cesàro, $\star$)**.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. Pour* $n\in\mathbb{N}$, *on pose :*

$$c_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k.$$

1. *Si* $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell\in\mathbb{R}$, *montrer que* $c_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell$.
2. *On souhaite étudier la réciproque. On suppose donc que* $c_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell\in\mathbb{R}$.
   - **a.** *Donner un exemple montrant que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas nécessairement convergeante.*
   - **b.** *En supposant de plus* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monotone, montrer que* $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell$.

Soit maintenant $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs avec* $\alpha_0>0$. *On définit :*

$$\hat{c}_n=\frac{\sum_{k=0}^{n}\alpha_ku_k}{\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}.$$

3. *Donner une CNS sur la suite* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pour que, pour toute suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergeant vers* $\ell\in\mathbb{R}$, *la suite* $(\hat{c}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ.

Exercice 1.4 ($\star$)**.** *Pour* $n\in\mathbb{N}^*$, *on définit* $g_n : x\in\mathbb{R}_+^*\longmapsto nx\ln x-1$.

1. *Pour* $n\in\mathbb{N}^*$, *montrer qu'il existe un unique* $\pi_n\in\mathbb{R}_+^*$ *t.q.* $g_n(\pi_n)=0$.
2. *La suite* $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?*
3. *On note* $\ell=\lim_{n\to+\infty}\pi_n$. *Déterminer* $\lim_{n\to+\infty}n(\pi_n-\ell)$.

Exercice 1.5 ($\star$)**.** *Pour* $n\in\mathbb{N}^*$, *on définit* $f_n : x\in\mathbb{R}_+\longmapsto x^{n+1}+x^n+2x-1$.

1. *Pour* $n\in\mathbb{N}^*$, *montrer qu'il existe un unique* $u_n\in\mathbb{R}_+$ *t.q.* $f_n(u_n)=0$.
2. *Étudier la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 1.6 ($\star$)**.** *Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une bijection. Montrer que si la suite $\left(\frac{f(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\ell = 1$.*

Exercice 1.7 ($\star$)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer si elle existe la limite de la suite $\left(\lfloor a^n \rfloor^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*

Exercice 1.8 ($\star$)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle u_n le dernier chiffre de l'écriture en base 10 de n^n. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est périodique et donner une période de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*

Exercice 1.9 (Centrale '16, $\star$)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$.*

1. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ t.q. $P_n(x_n) = 1$.*

2. *Étudier $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*