Colle 6
Nombres réels

Alexis Marchand
15/11/2018

Questions de cours.

1. *Montrer que les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.*
2. *Prouver que $\mathbb{R}$ est archimédien.*
3. *Démontrer la bonne définition de la fonction partie entière.*

1 Nombres réels

Exercice 1.1 ($\star$)**.** *Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ t.q. $\forall (a,b) \in A \times B,\ a \leqslant b$. Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leqslant \inf B$.*

Exercice 1.2 ($\star$)**.** *Soit A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. On suppose que $A \subset B$. Comparer $\inf A$, $\sup A$, $\inf B$ et $\sup B$.*

Exercice 1.3 ($\star$)**.** *Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que A, B et $A \cup B$ admettent une borne supérieure et que :*

$$\sup (A \cup B) = \max (\sup A, \sup B)\,.$$

Exercice 1.4 ($\star$)**.** *Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble $A + B = \{a + b,\ (a,b) \in A \times B\}$. Montrer que A, B et $A + B$ admettent une borne supérieure et que :*

$$\sup (A + B) = \sup A + \sup B.$$

Exercice 1.5 ($\star$)**.** *Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer les assertions suivantes :*

1. $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
2. $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor$.
3. $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Exercice 1.6 ($\star$)**.** *On se place dans $(\mathbb{Q}, \leqslant)$. On considère l'ensemble B des $x \in \mathbb{Q}_+$ t.q. $\lfloor x \rfloor$ a exactement deux chiffres dans son écriture décimale.*

1. *Décrire B.*
2. *B est-il majoré (dans $\mathbb{Q}$) ?*
3. *B a-t-il un plus grand élément ?*
4. *B a-t-il une borne supérieure ?*

Exercice 1.7 ($\star$)**.** *Soit A, B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On considère $AB = \{ab,\ (a,b) \in A \times B\}$ et $A + B = \{a + b,\ (a,b) \in A \times B\}$.*

1. *On suppose que A et B sont denses. Les ensembles AB et $A + B$ sont-ils denses ?*
2. *Étude de la réciproque.*

Exercice 1.8 ($\star$)**.** *Soit $A \subset \mathbb{R}$ vérifiant :*

(i) $\forall (a,b) \in A^2,\ \frac{a+b}{2} \in A$,

(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (a,b) \in A^2,\ a < x < b$.

Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1.9 (Automorphismes de $\mathbb{R}$, $\star$)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application vérifiant $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.*

1. *Montrer que $f_{|\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$.*
2. *On suppose ici que f est continue. Montrer que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.*
3. *On suppose ici que f vérifie $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x)f(y)$.*

a. *Montrer que f est croissante.*

b. *En déduire que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.*

4. *Qu'en conclut-on si on supprime l'hypothèse $f(1) = 1$?*

Exercice 1.10 ($\star$)**.** *Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre. On dit que E est un treillis lorsque tout sous-ensemble de E admet une borne supérieure (dans E).*

1. *Déterminer si les ensembles ordonnés suivants sont des treillis :* $([0,1], \leqslant)$, $(]0,1[, \leqslant)$, $(\mathbb{R}, \leqslant)$, $\left(\overline{\mathbb{R}}, \leqslant\right)$, $(\mathcal{P}(X), \subset)$, $(\mathbb{N}, \mid)$.

2. *Soit E un treillis et $f : E \to E$ une fonction croissante. Montrer que f admet un point fixe.*

Exercice 1.11 (Théorème de Cantor, $\star$)**.**

1. *Soit E un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de surjection $E \to \mathcal{P}(E)$.*

2. **a.** *Montrer que, pour tout ensemble E, $\mathcal{P}(E)$ est en bijection avec $\{0,1\}^E$.*

b. *On admet $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (cela peut se démontrer à l'aide du théorème de Cantor-Bernstein). Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, i.e. il n'existe pas de surjection $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.*