Colle 4

Fonctions usuelles – Calcul des primitives

Alexis Marchand
18/10/2018

Questions de cours.

1. *Donner le domaine de définition de la fonction* arccos*, ainsi que ses propriétés de régularité (continuité et dérivabilité) sur ce domaine, et l'expression de la dérivée là où elle existe.*
2. *Soit* $a \in \mathbb{R}$*. Donner le domaine de définition de la fonction* $f_a : x \mapsto x^a$*, ainsi que ses propriétés de régularité (continuité et dérivabilité) sur ce domaine, et l'expression de la dérivée là où elle existe. On pourra discuter selon la valeur de* a*.*
3. *Donner la formule de Leibniz en explicitant les hypothèses.*

1 Fonctions usuelles

Exercice 1.1 ($\star$)**.** *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les deux équations suivantes :*

$$\arctan(\tan x) = x \qquad \text{et} \qquad \tan(\arctan x) = x.$$

Exercice 1.2 ($\star$)**.** *Tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :*

$$\begin{aligned} &a : x \in \mathbb{R} \longmapsto \arcsin(\sin x), \qquad && b : x \in \mathbb{R} \longmapsto \arccos(\cos x), \\ &c : x \in \mathbb{R} \longmapsto \arcsin(\cos x), \qquad && d : x \in \mathbb{R} \longmapsto \arccos(\sin x). \end{aligned}$$

Exercice 1.3 ($\star$)**.** *Montrer que toute fonction monotone et périodique est constante.*

Exercice 1.4 ($\star$)**.** *Soit* $k \in \mathbb{R}$*.*

1. *On suppose ici que* $k > 0$*. Montrer que l'équation* $2^x + 3^x = k$ *possède une unique solution réelle.*
2. *Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation* $2^x - 3^x = k$*.*

Exercice 1.5 ($\star$)**.** *On fixe* $n \in \mathbb{Z}$*. On définit, pour* $N \in \mathbb{N}$ *:*

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} \left\lfloor \frac{n + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor.$$

1. *Montrer que la suite* $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *est stationnaire.*
2. *Pour* $x \in \mathbb{R}$*, exprimer* $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ *en fonction de* $\lfloor 2x \rfloor$*.*
3. *Déterminer* $S = \lim_{N\to+\infty} S_N$*.*

Exercice 1.6 ($\star$)**.**

1. *Comparer* $\lim_{x\to0^+} x^{(x^x)}$ *et* $\lim_{x\to0^+} (x^x)^x$*.*
2. *Soit* $a > 1$*. Comparer les fonctions* $x \mapsto a^{(a^x)}$ *et* $x \mapsto x^{(x^a)}$ *au voisinage de* $+\infty$*.*

Exercice 1.7 ($\star$)**.** *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$*.*

Exercice 1.8 ($\star$)**.**

1. *Pour* $n \in \mathbb{N}$*, calculer* $\arctan(n+1) - \arctan(n)$*.*
2. *Pour* $n \in \mathbb{N}$*, soit* $S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$*. Déterminer* $\lim_{n\to+\infty} S_n$*.*

Exercice 1.9 ($\star$)**.** *On définit* $\tanh : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$*.*

1. *Justifier que* tanh *admet une fonction réciproque, notée* argtanh*.*
2. *Pour* $x \in \left]-1, 1\right[$*, exprimer* $\operatorname{argtanh} x$ *en utilisant la fonction* ln*.*

Exercice 1.10 ($\star$)**.** *Montrer que :*

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \; \frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x \leqslant x.$$

Exercice 1.11 ($\star$)**.** *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit :*

$$f_\lambda : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{1}{2}\lambda x^2 - \ln x.$$

Déterminer, s'il existe, le maximum de f_λ.

Exercice 1.12 ($\star$)**.** *On considère $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+x+1}$.*

1. *Déterminer le domaine de définition de f.*
2. *Calculer f'.*
3. *Préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 1.*
4. *Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de f.*
5. *Tracer la courbe représentative de f.*

Exercice 1.13 ($\star$)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que $\forall x \in I, f(x)^2 = 1$. Montrer que f est constante.*

Exercice 1.14 ($\star$)**.** *On considère $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^{\frac{1}{x}}$.*

1. *Étudier les variations de f.*
2. *Montrer l'existence de et déterminer $\max f(\mathbb{N}^*)$.*

Exercice 1.15 ($\star$)**.** *Déterminer les fonctions convexes et bornées sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 1.16 ($\star$)**.** *Comparer π^e et e^π.*

Exercice 1.17 ($\star$)**.** *Soit A un ensemble, $f : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que, pour tout $a \in A$, $f(a, \cdot)$ est convexe sur $\mathbb{R}$. On pose :*

$$g : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sup_{a \in A} f(a, x).$$

Montrer que g est convexe.

2 Calcul des primitives

Exercice 2.1 ($\star$)**.** *Calculer les intégrales suivantes :*

1. $\int_{-1}^{1} \frac{e^{2t}}{e^t+1}\,\mathrm{d}t$
2. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$
3. $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$
4. $\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$
5. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$
6. $\int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$
7. $\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.