Aux Lazaristes
PCSI

Colle 22

Groupe symétrique – Déterminants – Espaces préhilbertiens réels – Espaces euclidiens

Alexis Marchand
23/05/2019

Questions de cours.

1. *Énoncer et démontrer l'Inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace préhilbertien réel.*
2. *Énoncer et démontrer le Théorème de Pythagore généralisé.*
3. *Soit E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de E muni d'une base orthonormée $(f_1, \dots, f_r)$. Donner l'expression de la projection orthogonale sur F (et la démontrer).*

1 Groupe symétrique

Exercice 1.1 ($\star$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Montrer que $\mathfrak{S}_n = \langle (1\,2), (1\,2\,\cdots\,n) \rangle$.*

Exercice 1.2 ($\star$)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $Z(\mathfrak{S}_n) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \forall \tau \in \mathfrak{S}_n,\ \sigma\tau = \tau\sigma\}$.*

Exercice 1.3 ($\star$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \leqslant n$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ un p-cycle. Donner une CNS sur $k \in \mathbb{Z}$ pour que σ^k soit un cycle.*

Exercice 1.4 ($\star$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Caractériser puis dénombrer les involutions de $\mathfrak{S}_n$.*

Exercice 1.5 ($\star$)**.** *On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, un couple $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$ est appelé inversion de σ lorsque $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. On note $\iota(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ. Calculer le nombre moyen d'inversions d'une permutation, i.e. la quantité $\frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \iota(\sigma)$.*

Exercice 1.6 ($\star$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 3}$. Montrer que le groupe engendré par les cycles de longueur 3 dans $\mathfrak{S}_n$ est égal à $\mathfrak{A}_n$.*

2 Déterminants

Exercice 2.1 ($\star$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les déterminants des matrices suivantes :*

1. $A_1 = \left((-1)^{\max(i,j)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.
2. $A_2 = (\min(i,j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.
3. $A_3 = (\max(i,j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.
4. $A_4 = (|i-j|+1)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.
5. $A_5 = (1-\delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.
6. $A_6 = E^{1,1} + (\operatorname{sign}(j-i) \cdot j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, *où* $\operatorname{sign}(0) = 0$ *et* $\operatorname{sign}(x) = \frac{x}{|x|}$ *si* $x \neq 0$.

3 Espaces préhilbertiens réels

Exercice 3.1 ($\star$)**.** *On se place dans $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. On définit $[\cdot \mid \cdot]$ sur E^2 par :*

$$\forall (f,g) \in E^2,\ [f \mid g] = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\ \mathrm{d}t.$$

Montrer que $[\cdot \mid \cdot]$ est un produit scalaire sur E.

Exercice 3.2 ($\star$)**.** *Déterminer :*

$$\inf_{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \left(\alpha \sin t + \beta \cos t - e^t\right)^2\ \mathrm{d}t.$$

Exercice 3.3 ($\star$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $(\cdot \mid \cdot)$ sur $\mathbb{R}_n[X]^2$ par :*

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2,\ (P \mid Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k).$$

1. *Montrer que* $(\cdot \mid \cdot)$ *est un produit scalaire sur* $\mathbb{R}_n[X]$.

2. a. *Vérifier qu'il existe une famille* $(L_0, \ldots, L_n) \in \mathbb{R}_n[X]^{n+1}$ *t.q.*

$$\forall (k, \ell) \in \{0, \ldots, n\}^2, \; L_\ell(k) = \delta_{k,\ell}.$$

b. *Montrer que* $(L_0, \ldots, L_n)$ *est une base orthonormée de* $(\mathbb{R}_n[X], (\cdot \mid \cdot))$.

3. *Pour* $\ell \in \{0, \ldots, n\}$, *déterminer un réel* $\lambda_\ell \in \mathbb{R}$ *t.q.* $L_\ell - \lambda_\ell X^n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

4. *Déterminer* $\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$.

5. *En déduire que* $d\left(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X]\right) = \frac{(n!)^3}{(2n)!}$.

Exercice 3.4 (Centrale '14, $\star$). *On se place dans* $E = \mathcal{C}^1\left([-1, 1], \mathbb{R}\right)$. *On définit* $(\cdot \mid \cdot)$ *sur* E^2 *par :*

$$\forall (u, v) \in E^2, \; (u \mid v) = \int_{-1}^{1} u(t)v(t) \; \mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que* $(\cdot \mid \cdot)$ *est un produit scalaire sur* E.

On considère $F = \left\{u \in E, \; u_{|[-1,0]} = 0\right\}$ *et* $G = \left\{u \in E, \; u_{|[0,1]} = 0\right\}$.

2. *Montrer que* $F^\perp = G$.

3. *A-t-on* $E = F \oplus G$ *?*

Exercice 3.5 (Mines '14, $\star$). *On se place dans* $E = \mathcal{C}^2\left([0, 1], \mathbb{R}\right)$. *On définit* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *sur* E^2 *par :*

$$\forall (f, g) \in E^2, \; \langle f \mid g \rangle = \int_0^1 \left(fg + f'g'\right).$$

1. *Montrer que* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *est un produit scalaire sur* E.

2. *Soit* $V = \{f \in E, \; f(0) = f(1) = 0\}$ *et* $W = \{f \in E, \; f = f''\}$.

a. *Quelles sont les dimensions de* V *et* W *?*

b. *Montrer que* V *et* W *sont supplémentaires et orthogonaux.*

c. *Expliciter la projection orthogonale sur* V.

4 Espaces euclidiens

Exercice 4.1 ($\star$). *Soit* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien* E.

1. *Montrer que :*
a. $(E + F)^\perp = E^\perp \cap F^\perp$ **b.** $(E \cap F)^\perp = E^\perp + F^\perp$.

2. *Que subsiste-t-il de ces égalités en dimension infinie ?*

Exercice 4.2 ($\star$). *On se place dans* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. *On définit* $(\cdot \mid \cdot)$ *sur* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *par :*

$$\forall (A, B) \in E^2, \; (A \mid B) = \mathrm{tr}\left({}^t\!BA\right).$$

1. *Montrer que* $(\cdot \mid \cdot)$ *est un produit scalaire sur* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *pour lequel la base canonique est orthonormée.*
On note $\|\cdot\|$ *la norme euclidienne associée à* $(\cdot \mid \cdot)$.

2. *Montrer que* $\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \; |\mathrm{tr}\, A| \leqslant \sqrt{n}\, \|A\|$.

3. a. *Déterminer* $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$, *où* $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *est l'espace des matrices symétriques.*

b. *Expliciter la projection orthogonale sur* $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

4. *Soit* $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. *Donner une CNS pour que l'application* $f_U : A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto AU \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *soit une isométrie (pour la norme* $\|\cdot\|$*).*

Exercice 4.3 (Centrale '14, $\star$). *Soit* E *un espace euclidien et* $u \in E$ *un vecteur unitaire. Pour quelles valeurs de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *l'endomorphisme* $f_\alpha : x \in E \longmapsto x - \alpha \langle u \mid x \rangle u$ *est-il bijectif ?*

Exercice 4.4 (Mines '14, $\star$). *Soit* E *un espace euclidien,* F *et* G *des sous-espaces vectoriels de* E. *Déterminer une CNS sur* F *et* G *pour que :*

$$\forall x \in E, \; \|x\|^2 = d(x, F)^2 + d(x, G)^2.$$