Colle 21

Matrices – Dimension finie

Alexis Marchand
16/05/2019

Questions de cours.

1. *Énoncer et démontrer la Formule de Grassmann.*

2. *Énoncer et démontrer le Théorème du rang.*

3. *Énoncer et démontrer le Théorème de la base incomplète.*

1 Matrices

Exercice 1.1 ($\star$)**.** *On note p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :*

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que p est un projecteur dont on déterminera le noyau et l'image.*

2. *Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Exercice 1.2 ($\star$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1.*

1. *Montrer que $H^2 = (\operatorname{tr} H)\, H$.*

2. *Après avoir précisé quand $(I_n + H)$ est inversible, calculer $(I_n + H)^{-1}$.*

Exercice 1.3 ($\star$)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ t.q. $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$.*

1. *Montrer l'existence de $r \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\dim E = 2r$.*

2. *Montrer que E admet une base β t.q. $\operatorname{Mat}_\beta(u) = \begin{bmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.*

Exercice 1.4 (Matrices magiques, $\star$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ est dite magique s'il existe $\sigma \in \mathbb{K}$ t.q.*

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \sum_{j=1}^{n} M_{i,j} = \sigma \qquad \text{et} \qquad \forall j \in \{1, \ldots, n\}, \sum_{i=1}^{n} M_{i,j} = \sigma.$$

On note alors $s(M) = \sigma$. On note de plus $\mathfrak{M}$ l'ensemble des matrices magiques.

1. *Montrer que $\mathfrak{M}$ est une sous-algèbre de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ et que $s : \mathfrak{M} \to \mathbb{K}$ est un morphisme d'algèbres.*

2. *Si $M \in \mathfrak{M} \cap GL_n(\mathbb{K})$, montrer que $M^{-1} \in \mathfrak{M}$.*

Pour $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, on note ϕ_M l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M. On note de plus $H = \{x \in \mathbb{K}^n,\ x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ et $D = \operatorname{Vect}((1, \ldots, 1)) \subset \mathbb{K}^n$.

3. *Montrer que $M \in \mathfrak{M}$ ssi H et D sont stables par ϕ_M.*

4. *En déduire $\dim \mathfrak{M}$.*

Exercice 1.5 (Trace, $\star$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La trace d'une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ est définie par $\operatorname{tr} A = \sum_{k=1}^{n} A_{k,k}$.*

1. *Montrer que $\operatorname{tr} : \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire. Est-elle injective ? Surjective ?*

2. *Montrer que $\forall (A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.*

3. *Existe-t-il deux matrices A, B de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ t.q. $AB - BA = I_n$?*

4. *Déterminer la trace de la matrice d'un projecteur et d'une symétrie.*

5. *Soit f une forme linéaire sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ t.q. $\forall (A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$, $f(AB) = f(BA)$. Montrer que $f \in \operatorname{Vect}(\operatorname{tr})$.*

6. *Soit f une forme linéaire quelconque sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que :*

$$\exists A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}),\ f(M) = \operatorname{tr}(AM).$$

2 Dimension finie

Exercice 2.1 ($\star$). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $\varepsilon_i = e_1 + \cdots + e_i$.*

1. *Montrer que $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base de E.*
2. *Donner la matrice de changement de base entre e et ε.*

Exercice 2.2 ($\star$). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Montrer l'équivalence des assertions suivantes :*
   (i) $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.
   (ii) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
2. *Que subsiste-t-il de ce résultat en dimension infinie ?*

Exercice 2.3 (Images et noyaux itérés, $\star$). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Montrer que la suite $(\operatorname{Im} u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ décroît et que la suite $(\operatorname{Ker} u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ croît (pour l'inclusion).*
2. *Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall p \geqslant p_0,\ \operatorname{Im} u^p = \operatorname{Im} u^{p_0}$.*
3. *On suppose que p_0 est choisi minimal. Montrer que $(\operatorname{Ker} u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ stationne à partir de p_0 et pas avant.*
4. *Montrer que $E = \operatorname{Ker} u^{p_0} \oplus \operatorname{Im} u^{p_0}$.*

Exercice 2.4 (TPE '87, $\star$). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit :*

$$\phi : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ g & \longmapsto & f \circ g \end{array} \right. .$$

Déterminer le rang de ϕ.

Exercice 2.5 ($\star$). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.*

1. *Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, montrer que $u^n = 0$.*
2. *Si $u_1, \ldots, u_n$ sont n endomorphismes nilpotents commutant deux à deux, montrer que $u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0$.*
3. *Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Existe-t-il un endomorphisme u de l'espace $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ dont le carré pour la composition vaut la dérivation ?*

Exercice 2.6 ($\star$). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent.*

1. *Si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur t.q. $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} u$, montrer que $\forall j \in \mathbb{N}^*,\ (p \circ u)^j = p \circ u^j$.*
2. *Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E t.q. $u(e_1) = 0$ et $u(e_i) \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_{i-1})$ pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$.*
3. *À quoi ressemble la matrice de u dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$?*