Colle 20
Matrices – Dimension finie

Alexis Marchand
02/05/2019

Questions de cours.

1. *Énoncer et démontrer la Formule de Grassmann.*
2. *Énoncer et démontrer le Théorème du rang.*
3. *Énoncer et démontrer le Théorème de la base incomplète.*

1 Matrices

Exercice 1.1 ($\star$)**.** *On note* $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - z = 0\}$ *et* $D = \mathrm{Vect}(w)$ *avec* $w = (1,0,-1)$.

1. *Montrer que* $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

On note p (resp. q) la projection sur P parallèlement à D (resp. sur D parallèlement à P) et s la symétrie de base P parallèlement à D.

2. *Donner les matrices de p, q et s dans la base canonique.*

Exercice 1.2 ($\star$)**.** *On considère :*

$$u : P \in \mathbb{R}_2[X] \longmapsto XP'' - 2P' + P \in \mathbb{R}_2[X].$$

1. *Donner la matrice A de u dans la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$.
2. *u est-elle bijective ? Si oui, donner son inverse.*
3. *Pour* $k \in \mathbb{N}$, *calculer* A^k.

Exercice 1.3 ($\star$)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *une matrice de rang* 1.

1. *Montrer que* $H^2 = (\mathrm{tr}\, H)\, H$.
2. *Après avoir précisé quand* $(I_n + H)$ *est inversible, calculer* $(I_n + H)^{-1}$.

Exercice 1.4 ($\star$)**.** *Soit E un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie. Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *t.q.* $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u$.

1. *Montrer l'existence de* $r \in \mathbb{N}^*$ *t.q.* $\dim E = 2r$.
2. *Montrer que E admet une base* β *t.q.* $\mathrm{Mat}_\beta(u) = \begin{bmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 1.5 (Matrices magiques, $\star$)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Une matrice* $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ *est dite magique s'il existe* $\sigma \in \mathbb{K}$ *t.q.*

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \sum_{j=1}^{n} M_{i,j} = \sigma \qquad \text{et} \qquad \forall j \in \{1, \dots, n\},\ \sum_{i=1}^{n} M_{i,j} = \sigma.$$

On note alors $s(M) = \sigma$. *On note de plus* $\mathfrak{M}$ *l'ensemble des matrices magiques.*

1. *Montrer que* $\mathfrak{M}$ *est une sous-algèbre de* $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ *et que* $s : \mathfrak{M} \to \mathbb{K}$ *est un morphisme d'algèbres.*
2. *Si* $M \in \mathfrak{M} \cap GL_n(\mathbb{K})$, *montrer que* $M^{-1} \in \mathfrak{M}$.

Pour $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, *on note* ϕ_M *l'endomorphisme de* $\mathbb{K}^n$ *canoniquement associé à M. On note de plus* $H = \{x \in \mathbb{K}^n,\ x_1 + \dots + x_n = 0\}$ *et* $D = \mathrm{Vect}((1, \dots, 1)) \subset \mathbb{K}^n$.

3. *Montrer que* $M \in \mathfrak{M}$ ssi *H et D sont stables par* ϕ_M.
4. *En déduire* $\dim \mathfrak{M}$.

Exercice 1.6 (Trace, $\star$)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *La trace d'une matrice* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ *est définie par* $\mathrm{tr}\, A = \sum_{k=1}^{n} A_{k,k}$.

1. *Montrer que* $\mathrm{tr} : \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *est une forme linéaire. Est-elle injective ? Surjective ?*
2. *Montrer que* $\forall (A,B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
3. *Existe-t-il deux matrices A, B de* $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ *t.q.* $AB - BA = I_n$ *?*
4. *Déterminer la trace de la matrice d'un projecteur et d'une symétrie.*
5. *Soit f une forme linéaire sur* $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ *t.q.* $\forall (A,B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2,\ f(AB) = f(BA)$. *Montrer que* $f \in \mathrm{Vect}(\mathrm{tr})$.
6. *Soit f une forme linéaire quelconque sur* $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. *Montrer que :*

$$\exists A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}),\ f(M) = \mathrm{tr}(AM).$$

2 Dimension finie

Exercice 2.1 ($\star$)**.** *Soit* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de polynôme de* $\mathbb{K}[X]$ *t.q.* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg P_n = n$.

1. *Montrer que pour tout* $N \in \mathbb{N}$, $(P_0, \dots, P_N)$ *est une base de* $\mathbb{K}_N[X]$.
2. *Montrer que* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base de* $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 2.2 ($\star$)**.** *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie. Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$. *Montrer l'équivalence des assertions suivantes :*

(i) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

(ii) $\dim E = 2\operatorname{rg} f$ *et* $f^2 = 0$.

Exercice 2.3 ($\star$)**.** *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$. *On suppose qu'il existe* $x_0 \in E$ *t.q. la famille* $(f(x_0), \dots, f^n(x_0))$ *est libre.*

1. *Montrer que* f *est bijective.*
2. *Soit* $g \in \mathcal{L}(E)$ *t.q.* $g \circ f = f \circ g$. *Montrer qu'il existe* $(b_0, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ *t.q.* $g = \sum_{k=0}^{n-1} b_k f^k$.

Exercice 2.4 (Lemmes de factorisation, $\star$)**.** *Soit* E, F, G *des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie. Soit* $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E, G)$. *Montrer que* $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} f \iff \exists g \in \mathcal{L}(G, F),\ f = g \circ u$.
2. *Soit* $u \in \mathcal{L}(G, F)$. *Montrer que* $\operatorname{Im} u \supset \operatorname{Im} f \iff \exists g \in \mathcal{L}(E, G),\ f = u \circ g$.

Exercice 2.5 (Images et noyaux itérés, $\star$)**.** *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n *et* $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. *Montrer que la suite* $(\operatorname{Im} u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ *décroît et que la suite* $(\operatorname{Ker} u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ *croît (pour l'inclusion).*
2. *Montrer qu'il existe* $p_0 \in \mathbb{N}$ *t.q.* $\forall p \geqslant p_0$, $\operatorname{Im} u^p = \operatorname{Im} u^{p_0}$.
3. *On suppose que* p_0 *est choisi minimal. Montrer que* $(\operatorname{Ker} u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ *stationne à partir de* p_0 *et pas avant.*
4. *Montrer que* $E = \operatorname{Ker} u^{p_0} \oplus \operatorname{Im} u^{p_0}$.

Exercice 2.6 ($\star$)**.** *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n*, soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme nilpotent.*

1. *Si* $p \in \mathcal{L}(E)$ *est un projecteur t.q.* $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} u$, *montrer que* $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $(p \circ u)^j = p \circ u^j$.
2. *Montrer qu'il existe une base* $(e_1, \dots, e_n)$ *de* E *t.q.* $u(e_1) = 0$ *et* $u(e_i) \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1})$ *pour tout* $i \in \{2, \dots, n\}$.
3. *À quoi ressemble la matrice de* u *dans la base* $(e_1, \dots, e_n)$ *?*