Colle 2

Systèmes linéaires – Nombres complexes

Alexis Marchand
04/10/2018

Questions de cours.

1. *Développer* $\cos(a+b)$ *pour* $a, b \in \mathbb{R}$.
2. *Factoriser* $\sin p + \sin q$ *pour* $p, q \in \mathbb{R}$.
3. *Linéariser* $\cos^2 \theta$ *pour* $\theta \in \mathbb{R}$.

1 Systèmes linéaires

Exercice 1.1 ($\star$)**.** *Résoudre les systèmes* 2×2 *suivants (en discutant éventuellement selon les valeurs des paramètres réels) :*

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - my = 2 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} (1-\lambda)x + y = -1 \\ x + \lambda y = 0 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x + (1+a)y = a \\ -x + y = -a \end{cases}$.

Exercice 1.2 ($\star$)**.** *Résoudre le système suivant selon la valeur du paramètre* $m \in \mathbb{C}$ *:*

$$\begin{cases} x + y + z = m + 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}.$$

Exercice 1.3 ($\star$)**.** *Résoudre le système suivant selon la valeur du paramètre* $m \in \mathbb{C}$ *:*

$$\begin{cases} 2x - y + z + t = 1 \\ x + 2y - z + 4t = 2 \\ x + 7y - 4z + 11t = m \end{cases}.$$

Exercice 1.4 ($\star$)**.** *Résoudre le système suivant selon la valeur du paramètre* $a \in \mathbb{R}$ *:*

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{cases}.$$

2 Nombres complexes

Exercice 2.1 ($\star$)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On considère un point* M *d'affixe* z *tel que* $nz^n = 1 + \cdots + z^{n-1}$. *Le point* M *est-il à l'intérieur du disque unité ?*

Exercice 2.2 ($\star$)**.** *Soit* $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. *Donner une CNS pour que* $||z| - |z'|| = |z - z'|$.

Exercice 2.3 ($\star$)**.** *On pose* $u = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$. *Calculer* u^4 *et* $|u|$.

Exercice 2.4 ($\star$)**.** *Déterminer les* $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ *t.q.* $\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.5 ($\star$)**.** *On note* $H = \{z \in \mathbb{C},\ \Im(z) > 0\}$ *et* $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. *On définit :*

$$g : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{C}\setminus\{-i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z-i}{z+i} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad f : \left| \begin{array}{rcl} H & \longrightarrow & D \\ z & \longmapsto & \dfrac{z-i}{z+i} \end{array} \right. .$$

1. f *et* g *sont-elles bien définies ?*
2. *Étudier l'injectivité et la surjectivité de* g.
3. *Mêmes questions avec* f.

Exercice 2.6 ($\star$). *Déterminer l'ensemble E des complexes z t.q. les points d'affixes i, z et iz sont alignés.*

Exercice 2.7 ($\star$). *Soit $z \in \mathbb{C}$.*

1. *Donner une CNS sur z pour que 1, z et z^3 soient alignés.*

2. *Donner une CNS sur z pour que 1, z et $(z+i)$ soient les affixes des sommets d'un triangle dont le cercle circonscrit a pour centre l'origine du repère.*

Exercice 2.8 ($\star$). *Soit $z \in \mathbb{C}$. Donner une CNS sur z pour que l'orthocentre du triangle dont les sommets ont pour affixes z, z^2 et z^3 soit l'origine.*

Exercice 2.9 (Droite d'Euler, $\star$). *On considère trois points (non alignés) A, B, C dans le plan, d'affixes respectives a, b, c. Le centre de gravité G du triangle (ABC) est l'unique point vérifiant :*

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0.$$

1. *Montrer que G est bien défini et exprimer son affixe en fonction de a, b, c.*

On appelle hauteur issue de A (resp. B, C) la droite passant par A (resp. B, C) et orthogonale à la droite (BC) (resp. (AC), (AB)).

2. *Si M est un point du plan d'affixe z, donner une CNS sur z pour que M appartienne à la hauteur issue de A*

On appelle centre du cercle circonscrit de (ABC) l'unique point Ω vérifiant $A\Omega = B\Omega = C\Omega$.

3. *Montrer que Ω est bien défini.*

4. *Montrer que les trois hauteurs de (ABC) s'intersectent en un point H, appelé orthocentre de (ABC), et vérifiant $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$. En particulier, Ω, H et G sont alignés.*

Exercice 2.10 ($\star$). *Décrire l'ensemble $\{z \in \mathbb{C},\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ z^2 - \lambda z + 1 = 0\}$.*