Colle 19

Matrices – Dimension finie

Alexis Marchand
11/04/2019

Questions de cours.

1. *Montrer que le produit matriciel est associatif.*

2. *On note* $(E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *la base canonique de* $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$*. Calculer* $E_{ij}E_{k\ell}$ *pour tous* $1 \leqslant i,j,k,\ell \leqslant n$*.*

3. *Pour toutes matrices* $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$*, calculer* ${}^t(AB)$ *en fonction de* ${}^tA$ *et* ${}^tB$*.*

1 Matrices

Exercice 1.1 ($\star$)**.** *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*. Calculer* A^n *pour* $n \in \mathbb{Z}$*.*

Exercice 1.2 ($\star$)**.** *On pose* $M = \begin{pmatrix} 2 & j & j^2 \\ j & -j & 1 \\ j^2 & 1 & -j^2 \end{pmatrix}$ *où* $j = \exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)$*.*

1. *Calculer* $(M - I_3)^2$*.*

2. *En déduire* M^n *pour* $n \in \mathbb{N}$*.*

Exercice 1.3 ($\star$)**.** *On note* $E = \left\{\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{K}^2\right\}$*.*

1. *Montrer que* E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{M}_2(\mathbb{K})$*.*

2. *Montrer que* E *est un sous-anneau de* $\mathbb{M}_2(\mathbb{K})$*.*

3. *Montrer que l'anneau* E *est commutatif.*

4. *Montrer que* $\forall M \in E \cap GL_2(\mathbb{K}),\ M^{-1} \in E$*.*

Exercice 1.4 (Matrices magiques, $\star$)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. Une matrice* $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ *est dite magique s'il existe* $\sigma \in \mathbb{K}$ *t.q.*

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \sum_{j=1}^{n} M_{i,j} = \sigma \qquad \text{et} \qquad \forall j \in \{1,\dots,n\},\ \sum_{i=1}^{n} M_{i,j} = \sigma.$$

On note alors $s(M) = \sigma$*. On note de plus* $\mathfrak{M}$ *l'ensemble des matrices magiques.*

1. *Montrer que* $\mathfrak{M}$ *est une sous-algèbre de* $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ *et que* $s : \mathfrak{M} \to \mathbb{K}$ *est un morphisme d'algèbres.*

2. *Si* $M \in \mathfrak{M} \cap GL_n(\mathbb{K})$*, montrer que* $M^{-1} \in \mathfrak{M}$*.*

Pour $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$*, on note* ϕ_M *l'endomorphisme de* $\mathbb{K}^n$ *canoniquement associé à* M*. On note de plus* $H = \{x \in \mathbb{K}^n,\ x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ *et* $D = \mathrm{Vect}\,((1,\dots,1)) \subset \mathbb{K}^n$*.*

3. *Montrer que* $M \in \mathfrak{M}$ ssi H *et* D *sont stables par* ϕ_M*.*

4. *En déduire* $\dim \mathfrak{M}$*.*

Exercice 1.5 (Un peu de réduction, $\star$)**.** *Pour* $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$*, on appelle idéal annulateur de* M *l'ensemble* $\mathfrak{I}_M = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(M) = 0\}$*.*

1. *Justifier que* $\mathfrak{I}_M$ *est un idéal de* $\mathbb{K}[X]$*.*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$*.*

2. *Déterminer* $\mathfrak{I}_A$ *et* $\mathfrak{I}_B$*.*

3. *Montrer que* A *et* B *ne sont pas semblables.*

4. *Montrer que de manière générale, si* $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$*, alors il existe* $\mu \in \mathbb{K}[X]$ *t.q.* $\mathfrak{I}_M = \mu\mathbb{K}[X]$*.*

2 Dimension finie

Exercice 2.1 ($\star$). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $e = (e_1, \dots, e_n)$. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose $\varepsilon_i = e_1 + \cdots + e_i$.*

1. *Montrer que $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E.*

2. *Exprimer les composantes d'un vecteur dans la base ε en fonction de ses composantes dans e.*

Exercice 2.2 ($\star$). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :*

(i) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

(ii) $\dim E = 2 \operatorname{rg} f$ *et* $f^2 = 0$.

Exercice 2.3 (Lemmes de factorisation, $\star$). *Soit E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*

1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E, G)$. Montrer que* $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} f \iff \exists g \in \mathcal{L}(G, F),\ f = g \circ u$.

2. *Soit $u \in \mathcal{L}(G, F)$. Montrer que* $\operatorname{Im} u \supset \operatorname{Im} f \iff \exists g \in \mathcal{L}(E, G),\ f = u \circ g$.

Exercice 2.4 (Images et noyaux itérés, $\star$). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Montrer que la suite $\left(\operatorname{Im} u^p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ décroît et que la suite $\left(\operatorname{Ker} u^p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ croît (pour l'inclusion).*

2. *Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall p \geqslant p_0$, $\operatorname{Im} u^p = \operatorname{Im} u^{p_0}$.*

3. *On suppose que p_0 est choisi minimal. Montrer que $\left(\operatorname{Ker} u^p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ stationne à partir de p_0 et pas avant.*

4. *Montrer que $E = \operatorname{Ker} u^{p_0} \oplus \operatorname{Im} u^{p_0}$.*

Exercice 2.5 (TPE '87, $\star$). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit :*

$$\phi : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ g & \longmapsto & f \circ g \end{array} \right. .$$

Déterminer le rang de ϕ.

Exercice 2.6 ($\star$). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.*

1. *Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, montrer que $u^n = 0$.*

2. *Si $u_1, \dots, u_n$ sont n endomorphismes nilpotents commutant deux à deux, montrer que $u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0$.*

3. *Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Existe-t-il un endomorphisme u de l'espace $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ dont le carré pour la composition vaut la dérivation ?*