Colle 18

Matrices – Dimension finie

Alexis Marchand
04/04/2019

Questions de cours.

1. *Montrer que le produit matriciel est associatif.*
2. *On note* $(E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *la base canonique de* $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$*. Calculer* $E_{ij}E_{k\ell}$ *pour tous* $1 \leqslant i,j,k,\ell \leqslant n$.
3. *Pour toutes matrices* $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$*, calculer* ${}^t(AB)$ *en fonction de* ${}^tA$ *et* ${}^tB$.

1 Matrices

Exercice 1.1 ($\star$)**.** *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*. Calculer* A^n *pour* $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 1.2 ($\star$)**.** *On pose* $M = \begin{pmatrix} 2 & j & j^2 \\ j & -j & 1 \\ j^2 & 1 & -j^2 \end{pmatrix}$ *où* $j = \exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)$.

1. *Calculer* $(M - I_3)^2$.
2. *En déduire* M^n *pour* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.3 ($\star$)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. Si* $A \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$*, on appelle commutant de* A *dans* $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ *l'ensemble* $C(A) = \{M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall N \in A,\ MN = NM\}$ *et centre de* A *l'ensemble* $Z(A) = A \cap C(A)$.

1. *Déterminer* $Z(\mathbb{M}_n(\mathbb{K}))$.
2. *Déterminer le commutant puis le centre de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes.*
3. *Déterminer le commutant puis le centre de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.*
4. *Soit* D *une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Déterminer* $C(\{D\})$.

Exercice 1.4 ($\star$)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *t.q.*

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ |A_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |A_{i,j}|.$$

Montrer que A *est inversible.*

Exercice 1.5 ($\star$)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *une matrice de rang* 1.

1. *Montrer que* $H^2 = (\operatorname{tr} H)\, H$.
2. *Après avoir précisé quand* $(I_n + H)$ *est inversible, calculer* $(I_n + H)^{-1}$.

Exercice 1.6 ($\star$)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$*. On note :*

$$E_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. E_n *est-il un espace vectoriel ?*
2. *Si* E_n *est un espace vectoriel, est-il de dimension finie ?*
3. *Si* E_n *est de dimension finie, quelle est sa dimension ?*
4. *Montrer que* E_n *est stable par produit (c'est donc une algèbre).*
5. *Trouver une base* $(P_1, \dots, P_{\dim E_n})$ *de* E_n *t.q.* $\forall k \in [\![1, \dim E_n]\!]$, $P_k^2 = P_k$*. On utilisera cette base par la suite.*

6. *Trouver les éléments inversibles de E_n (i.e. les éléments de E_n admettant un inverse dans E_n).*
7. *Quel type de structure a l'ensemble des éléments non inversibles de E_n (ex : plan vectoriel, droite vectoriel, réunion d'un plan et d'une droite ...).*
8. *Résoudre dans E_n l'équation $X^2 = X$.*
9. *Montrer qu'il existe un isomorphisme d'algèbres entre E_n et E_2.*

Exercice 1.7 (Trace, $\star$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La trace d'une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ est définie par $\operatorname{tr} A = \sum_{k=1}^{n} A_{k,k}$.*

1. *Montrer que $\operatorname{tr} : \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire. Est-elle injective ? Surjective ?*
2. *Montrer que $\forall (A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.*
3. *Existe-t-il deux matrices A, B de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ t.q. $AB - BA = I_n$?*
4. *Déterminer la trace de la matrice d'un projecteur et d'une symétrie.*
5. *Soit f une forme linéaire sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ t.q. $\forall (A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})^2$, $f(AB) = f(BA)$. Montrer que $f \in$* $\operatorname{Vect}(\operatorname{tr})$.
6. *Soit f une forme linéaire quelconque sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que :*

$$\exists A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}), \ \forall M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}), \ f(M) = \operatorname{tr}(AM).$$

2 Dimension finie

Exercice 2.1 ($\star$)**.** *On se place dans $E = \mathbb{R}^4$. On considère $F = \{x \in E,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ et $G = \{x \in E,\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$. Déterminer la dimension et donner une base de F, G, $F + G$ et $F \cap G$.*

Exercice 2.2 ($\star$)**.** *Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynôme de $\mathbb{K}[X]$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg P_n = n$.*

1. *Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $(P_0, \ldots, P_N)$ est une base de $\mathbb{K}_N[X]$.*
2. *Montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.*

Exercice 2.3 ($\star$)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.*

1. *Si H_1 et H_2 sont deux hyperplans de E, montrer l'existence d'un sous-espace vectoriel $D \subset E$ t.q. $E = H_1 \oplus D = H_2 \oplus D$.*
2. *Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension, montrer l'existence d'un sous-espace vectoriel $G \subset E$ t.q. $E = F_1 \oplus G = F_2 \oplus G$.*

Exercice 2.4 ($\star$)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ t.q. la famille $(f(x_0), \ldots, f^n(x_0))$ est libre.*

1. *Montrer que f est bijective.*
2. *Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ t.q. $g \circ f = f \circ g$. Montrer qu'il existe $(b_0, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ t.q. $g = \sum_{k=0}^{n-1} b_k f^k$.*

Exercice 2.5 ($\star$)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Montrer l'équivalence des assertions suivantes :*
   (i) $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.
   (ii) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
2. *Que subsiste-t-il de ce résultat en dimension infinie ?*