Questions de cours.

1. *Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales, avec les cas d'égalité.*

2. *Énoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.*

3. *Énoncer et démontrer l'inégalité de Taylor-Lagrange.*

1 Intégrales sur un segment

Exercice 1.1 ($\star$)**.** *Calculer les intégrales suivantes :*

1. $\int_{-1}^{1} \frac{e^{2t}}{e^t+1}\,\mathrm{d}t$ **2.** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ **3.** $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$

4. $\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$ **5.** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ **6.** $\int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$

7. $\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 1.2 ($\star$)**.** *Démontrer que :*

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X],\ \int_{-1}^{1} Q = -i \int_0^{\pi} Q\left(e^{i\theta}\right) e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Exercice 1.3 ($\star$)**.** *Étudier la suite de terme général* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k+1)(n+k)}}$.

Exercice 1.4 ($\star$)**.** *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *continue t.q.* $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$. *Montrer que* f *admet un point fixe.*

Exercice 1.5 ($\star$)**.** *On fixe* $a < b$ *deux réels. Donner une CNS sur* $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ *pour que :*

$$\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|\,.$$

Exercice 1.6 ($\star$)**.** *Soit* $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. *On suppose que pour toute application* $g \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ *vérifiant* $g(0) = g(1) = 0$, $\int_0^1 fg = 0$. *Montrer que* $f = 0$.

Exercice 1.7 (Polytechnique '17, $\star$)**.** *Soit* $a < b$ *des réels. Montrer que :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists C > 0,\ \forall f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C}),\ \forall x \in [a,b],\ \left|f^2(x) - f^2(a)\right| \leqslant C \int_a^x f^2 + \varepsilon \int_a^x f'^2.$$

2 Développements limités

Exercice 2.1 ($\star$)**.** *Donner un développement limité en le point et à l'ordre indiqués des fonctions suivantes :*

1. $\tan x$, *en* 0, *à l'ordre* $o(x^5)$.

2. $e^x \ln(1+x)$, *en* 0, *à l'ordre* $o(x^4)$.

3. $\ln(1-\sin x)$, *en* 0, *à l'ordre* $o(x^4)$.

4. $\arctan(e^x)$, *en* 0, *à l'ordre* $o(x^3)$.

5. $\frac{\ln x}{x^2}$, *en* 1, *à l'ordre* $o((x-1)^3)$.

6. $2^x - x^2$, *en* 2, *à l'ordre* $o((x-2)^3)$.

7. $\sqrt[3]{x^3+x+1} - \sqrt{x^2-x-1}$, *en* $+\infty$, *à l'ordre* $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Exercice 2.2 ($\star$)**.** *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on définit* $f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto (e^x - 1)^n$. *Calculer* $f_n^{(k)}(0)$ *pour* $0 \leqslant k \leqslant n$.

Exercice 2.3 (Principe des zéros isolés, $\star$)**.**

1. *Soit* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction* $\mathcal{C}^\infty$ *et* $a \in \mathbb{R}$ *un zéro de* g *d'ordre fini (i.e.* $g(a) = 0$ *et* $\exists p \in \mathbb{N}$, $g^{(p)}(a) \neq 0$*). Montrer que* a *est un zéro isolé, i.e. il existe un* $\eta > 0$ *t.q.* g *ne s'annule en aucun point de* $]a-\eta, a+\eta[\setminus\{a\}$.

2. *On considère :*

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

a. *Tracer (sommairement) la courbe représentative de f.*

b. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un $\alpha_n \in \mathbb{N}$ t.q.*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{\alpha_n}} f(x).$$

c. *En déduire que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

d. *Que peut-on dire de la série de Taylor de f en 0 ?*

3. *Étudier la réciproque du* **1.**.

Exercice 2.4 ($\star$)**.** *Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x + \sin x$.*

1. *Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection.*

2. *Donner le développement limité à l'ordre $o\left(x^5\right)$ de f^{-1} en 0.*

Exercice 2.5 ($\star$)**.** *On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$.*

1. *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.*

2. *Trouver un $\gamma \in \mathbb{R}$ t.q. la suite $\left(u_{n+1}^\gamma - u_n^\gamma\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

3. *Utiliser le théorème de Cesàro pour en déduire un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 2.6 ($\star$)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que $\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} f'' = 0$.*

1. *À l'aide d'une formule de Taylor, majorer f' à l'aide de f et f''.*

2. *Montrer que $\lim_{+\infty} f' = 0$.*

3. *Trouver des contre-exemples en supprimant l'hypothèse $\lim_{+\infty} f = 0$ ou $\lim_{+\infty} f'' = 0$.*

Exercice 2.7 (Mines '01, $\star$)**.**

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence d'un unique $x_n \in \mathbb{R}$ t.q. $x_n + e^{x_n} = n$.*

2. *Déterminer la limite puis un équivalent de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

3. *Former un développement asymptotique à deux voire trois termes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*