Questions de cours.

1. *Soit $u : E \to F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Caractériser le fait que u soit injective.*
2. *Énoncer et démontrer les propriétés élémentaires des projecteurs.*
3. *Énoncer et démontrer les propriétés élémentaires des symétries.*

1 Espaces vectoriels

Exercice 1.1 ($\star$)**.** *On se place dans $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On note $\mathcal{P} = \{f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$ et $\mathcal{I} = \{f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$.*

1. *Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.*
2. *Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dans E.*
3. *Expliciter :*
   - **a.** *La projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{I}$,*
   - **b.** *La symétrie de base $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{I}$.*

Exercice 1.2 ($\star$)**.** *On se place dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on considère $d : f \in E \longmapsto f' \in E$.*

1. *Montrer rapidement que d est un endomorphisme de E.*
2. *Existe-t-il un endomorphisme $u : E \to E$ tel que $u \circ d = \mathrm{id}_E$? Tel que $d \circ u = \mathrm{id}_E$?*

Exercice 1.3 ($\star$)**.** *$\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est-il un hyperplan de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$?*

Exercice 1.4 ($\star$)**.** *Soit E l'espace vectoriel des suites réelles convergentes. On considère :*

$$\psi : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \longmapsto (u_{n+1} + u_{n+2})_{n\in\mathbb{N}} \in E.$$

1. *Montrer que ψ est un endomorphisme de E*
2. *ψ est-il injectif ? Surjectif ?*
3. *Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$, déterminer le noyau de $\psi - \lambda\,\mathrm{id}_E$.*

Exercice 1.5 ($\star$)**.** *Soit p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E t.q. $\mathrm{Im}\,p \subset \mathrm{Ker}\,q$. Soit $r = p + q - pq$.*

1. *Montrer que r est un projecteur.*
2. *Déterminer $\mathrm{Ker}\,r$ et $\mathrm{Im}\,r$.*

Exercice 1.6 ($\star$)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ t.q. $u^2 - 3u + 2\,\mathrm{id}_E = 0$.*

1. *On note $E_1 = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}\,(u - 2\,\mathrm{id}_E)$. Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.*

On note p_1 (resp. p_2) le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 (resp. sur E_2 parallèlement à E_1).

2. *Exprimer u en fonction de p_1 et p_2.*
3. *Exprimer p_1 et p_2 en fonction de u et id_E.*
4. *Pour $n \in \mathbb{N}$, en déduire une expression simple de u^n en fonction de n et u.*
5. *L'endomorphisme u est-il inversible ? Si oui, généraliser l'expression obtenue à $n < 0$.*

Exercice 1.7 ($\star$)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Montrer l'équivalence des conditions suivantes :*
   - (i) *u est une homothétie.*
   - (ii) *La famille (id_E, u) est liée dans $\mathcal{L}(E)$.*
   - (iii) *Pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée dans E.*

2. *En déduire qu'un endomorphisme commutant avec tous les endomorphismes de E est une homothétie. On pourra admettre que tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.*

Exercice 1.8 ($\star$). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ commute avec p* ssi *$\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont stables par u.*

Exercice 1.9 ($\star$). *Soit u et v deux formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que u et v sont colinéaires* ssi $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} v$.

Exercice 1.10 ($\star$).

1. *Montrer que les $\mathbb{R}$-endomorphismes de $\mathbb{C}$ sont exactement les applications $\psi_{a,b} : z \longmapsto az + b\overline{z}$, avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.*
2. *À quelle condition $\psi_{a,b}$ est-elle $\mathbb{C}$-linéaire ?*
3. *À quelle condition $\psi_{a,b}$ est-elle inversible ?*

Exercice 1.11 ($\star$). *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

1. *Si F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels stricts de E, montrer que $F_1 \cup F_2 \subsetneq E$.*
2. *Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \ldots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels stricts de E, montrer que $F_1 \cup \cdots \cup F_n \subsetneq E$.*