Colle 13
Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ – Polynômes

Alexis Marchand
07/02/2019

Questions de cours.

1. *Énoncer le Théorème de Division Euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ et démontrer l'unicité.*
2. *Énoncer et démontrer une caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.*
3. *En utilisant le fait que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos (i.e. tout polynôme non constant admet une racine), donner les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.*

1 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Exercice 1.1 ($\star$)**.** *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 4^n + 15n \equiv 1 \mod 9$.*

Exercice 1.2 ($\star$)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On note de plus v_2 la valuation 2-adique.*

1. *On pose $\alpha = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} v_2(k)$. Montrer qu'il existe un unique $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$ t.q. $\alpha = v_2(k_0)$.*
2. *En déduire que $h_n \notin \mathbb{N}$.*

Exercice 1.3 (Nombres de Mersenne, $\star$)**.** *Soit $(a, n) \in (\mathbb{N}_{\geqslant 2})^2$. Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.*

Exercice 1.4 ($\star$)**.** *Soit p un nombre premier et $k \in \{1, \ldots, p-1\}$. Montrer que $\binom{p}{k} \equiv 0 \mod p$.*

Exercice 1.5 ($\star$)**.** *Trouver le dernier chiffre de l'écriture décimale de $7^{7^{7^7}} = 7^{\left(7^{\left(7^7\right)}\right)}$.*

Exercice 1.6 (Rennes '17, $\star$)**.** *Résoudre l'équation diophantienne $x^4 - y^2 = 5z + 3$, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$.*

2 Polynômes

Exercice 2.1 ($\star$)**.** *Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, $a \neq b$. Quel est le reste de la division euclidienne de $P \in \mathbb{K}[X]$ par $(X - a)(X - b)$?*

Exercice 2.2 ($\star$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X \sin\theta + \cos\theta)^n$ par $(X^2 + 1)$ puis pas par $(X^2 + 1)^2$.*

Exercice 2.3 ($\star$)**.** *Quelle identité obtient-on en considérant le coefficient de X^n dans $(1 + X)^{2n}(1 - X)^{2n} = (1 - X^2)^{2n}$?*

Exercice 2.4 ($\star$)**.** *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé. Montrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P''(x)P(x) \leqslant P'^2(x).$$

Exercice 2.5 ($\star$)**.** *Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X] \backslash \{0\}$ t.q. $P\left(X^2\right) = P(X)P(X + 1)$.*

Exercice 2.6 ($\star$)**.** *Déterminer un polynôme à coefficients entiers dont $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est racine, puis montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est irrationnel.*

Exercice 2.7 ($\star$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Factoriser $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$ sur $\mathbb{C}$.*
2. *Calculer $\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.*

Exercice 2.8 ($\star$)**.**

1. *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $U_n \in \mathbb{R}[X]$ t.q.*

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin(n\theta) = U_n(\cos\theta)\sin\theta.$$

2. *Donner le degré de U_n et son coefficient dominant.*

3. *Pour $n \geqslant 2$, déterminer les racines de U_n.*

4. *Démontrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left(1 - X^2\right) U_n'' - 3XU_n' + \left(n^2 - 1\right) U_n = 0.$$

Exercice 2.9 ($\star$)**.** *Soit $P = X^3 - X - 1$. On note α, β et γ les racines complexes de P. Calculer $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$.*

Exercice 2.10 (Ulm '16, $\star$)**.** *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg P \geqslant 3$. On suppose que P est scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que toute racine multiple de P' est racine de P.*