Questions de cours.

1. *Énoncer le Théorème de Division Euclidienne dans* $\mathbb{K}[X]$ *et démontrer l'unicité.*
2. *Énoncer et démontrer une caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.*
3. *En utilisant le fait que* $\mathbb{C}$ *est algébriquement clos (i.e. tout polynôme non constant admet une racine), donner les irréductibles de* $\mathbb{C}[X]$.

1 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Exercice 1.1 ($\star$)**.** *On suppose que* a, b, c *sont des entiers relatifs non multiples de* 3. *Montrer que* $a^2+b^2+c^2$ *est multiple de* 3.

Exercice 1.2 ($\star$)**.** *Soit* $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$. *Si* $a \wedge b = 1$, *montrer que* $a \wedge (bc) = a \wedge c$.

Exercice 1.3 (Nombres de Fermat, $\star$)**.** *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que si* 2^k+1 *est premier, alors* k *est une puissance de* 2.

Exercice 1.4 ($\star$)**.** *Soit* p *un nombre premier et* a *un entier non divisible par* p. *Montrer que :*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a^{(p-1)p^k} \equiv 1 \mod p^{k+1}.$$

Exercice 1.5 ($\star$)**.** *Trouver le dernier chiffre de l'écriture décimale de* $7^{7^{7^7}} = 7^{\left(7^{\left(7^7\right)}\right)}$.

Exercice 1.6 (Centrale '86, $\star$)**.** *Combien de chiffres y a-t-il dans l'écriture en base* 10 *de* 4444^{4444} *?*

2 Polynômes

Exercice 2.1 ($\star$)**.** *On considère* $P = 2X^3+5X^2+X-2$.

1. *Déterminer les racines de* P.
2. *Résoudre l'équation* $2\sin^3\theta + 5\sin^2\theta + \sin\theta - 2 = 0$.

Exercice 2.2 ($\star$)**.** *Montrer que le polynôme* $\left(X^2+X+1\right)$ *divise* $\left(X^{3m+2}+X^{3n+1}+X^{3p}\right)$ *pour tout triplet* $(m,n,p) \in \mathbb{N}^3$.

Exercice 2.3 ($\star$)**.** *Soit* $(m,n,k) \in \mathbb{N}^3$. *En développant l'égalité* $(1+X)^{m+n} = (1+X)^m(1+X)^n$, *montrer que :*

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i+j=k} \binom{m}{i}\binom{n}{j}.$$

Exercice 2.4 ($\star$)**.** *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$ *un polynôme non constant. Montrer que si* P *est scindé sur* $\mathbb{R}$, *alors* P' *l'est aussi.*

Exercice 2.5 ($\star$)**.** *Trouver tous les polynômes* $P \in \mathbb{R}[X]\backslash\{0\}$ *t.q.* $P\left(X^2\right) = P(X)P(X+1)$.

Exercice 2.6 ($\star$)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Factoriser* $P_n = \sum_{k=0}^n X^k$ *sur* $\mathbb{C}$.
2. *Calculer* $\prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

Exercice 2.7 ($\star$)**.**

1. *Démontrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *il existe un unique polynôme* $U_n \in \mathbb{R}[X]$ *t.q.*
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin(n\theta) = U_n(\cos\theta)\sin\theta.$$
2. *Donner le degré de* U_n *et son coefficient dominant.*
3. *Pour* $n \geqslant 2$, *déterminer les racines de* U_n.
4. *Démontrer que :*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left(1-X^2\right)U_n'' - 3XU_n' + \left(n^2-1\right)U_n = 0.$$

Exercice 2.8 ($\star$)**.** *Soit* $P = X^3-X-1$. *On note* α, β *et* γ *les racines complexes de* P. *Calculer* $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$.