Colle 11
Dérivation

Alexis Marchand
20/12/2018

Questions de cours.

1. *Énoncer et démontrer la formule de dérivation d'une composée de deux fonctions dérivables.*
2. *Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.*
3. *Énoncer et démontrer la caractérisation des fonctions monotones parmi les fonctions dérivables.*

1 Dérivation

Exercice 1.1 ($\star$)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable strictement croissante et bijective. L'application f^{-1} est-elle nécessairement dérivable ? Sinon, quelle hypothèse supplémentaire faut-il ajouter ?*

Exercice 1.2 ($\star$)**.** *Étudier la régularité de :*

$$f_\alpha : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases},$$

pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.3 ($\star$)**.** *Vrai ou faux ?*

1. *Une fonction dérivable strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ a une dérivée strictement négative.*
2. *Si une fonction n'est pas dérivable en un point a, alors elle n'est pas continue en a.*
3. *Si une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ présente un extremum local en un point a t.q. f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.*
4. *Une fonction dérivable sur un segment est lipschitzienne.*

Exercice 1.4 ($\star$)**.** *Par application du théorème des accroissements finis à $\ln$ sur $[n, n+1]$, montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ et donner une estimation du comportement asymptotique de cette suite.*

Exercice 1.5 ($\star$)**.** *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue sur $[0,1]$ et dérivable en 0 t.q. $f(0) = 0$. Montrer l'existence de $k \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\forall x \in [0,1],\ |f(x)| \leqslant kx$.*

Exercice 1.6 ($\star$)**.** *Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f' est décroissante.*

1. *Montrer que $\forall x \in \left]1, +\infty\right[,\ f(x+1) - f(x) \leqslant f'(x) \leqslant f(x) - f(x-1)$.*
2. *Montrer que si f a une limite finie en $+\infty$ alors $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.*
3. *La réciproque du* **2.** *est-elle vraie ?*
4. *Le* **2.** *reste-t-il vrai sans l'hypothèse f' décroissante ?*

Exercice 1.7 ($\star$)**.** *Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable et s'annulant en $(n+1)$ points de $]a, b[$. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule sur $]a, b[$.*

Exercice 1.8 ($\star$)**.** *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et dérivable t.q. $\lim_{+\infty} f = f(0)$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $f'(c) = 0$.*

Exercice 1.9 ($\star$)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable t.q. $ff' \geqslant 0$. Montrer que $f^{-1}\left(\mathbb{R}^*\right)$ est un intervalle.*

Exercice 1.10 ($\star$)**.** *On considère :*

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leqslant 0 \end{cases}.$$

1. *Tracer (sommairement) la courbe représentative de f.*

2. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un $\alpha_n \in \mathbb{N}$ t.q.*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{\alpha_n}} f(x).$$

3. *En déduire que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 1.11 ($\star$)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$. Montrer l'existence de $c \in]a,b[$ t.q.*

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c).$$

Exercice 1.12 ($\star$)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable t.q. $f^2 + (1+f')^2 \leqslant 1$. Montrer que $f = 0$.*

Exercice 1.13 ($\star$)**.** *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction deux fois dérivable t.q. il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $\alpha f \leqslant f''$.*

1. *Montrer que f' a une limite en $+\infty$ et déterminer cette limite.*

2. *Montrer que f est décroissante et que $\lim_{+\infty} f = 0$.*

3. *Soit $g : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \alpha f^2(x) - f'^2(x)$. Montrer que g est croissante et que $\lim_{+\infty} g = 0$.*

4. *En posant $h : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto f(x)\exp(\sqrt{\alpha}x)$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leqslant f(0)\exp(-\sqrt{\alpha}x)$.*

Exercice 1.14 ($\star$)**.** *Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifiant :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f'(x)f''(x) = 0.$$

Exercice 1.15 (Théorème de Darboux, $\star$)**.** *Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On cherche à montrer que pour tout intervalle $J \subset I$, $f'(J)$ est un intervalle.*

1. *Sous l'hypothèse f $\mathcal{C}^1$, de quel théorème découle le résultat ?*

2. *Montrer le résultat dans le cas général.*

Exercice 1.16 ($\star$)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :*

(i) *f est strictement croissante sur I.*

(ii) *L'ensemble $\{x \in I,\ f'(x) > 0\}$ est dense dans I.*