Questions de cours.

1. *Donner un équivalent simple en* 0 *de* $\cos x - 1$.
2. *Donner un équivalent simple en* 0 *de* $\ln(1+x)$.
3. *Donner un équivalent simple en* 0 *de* $(1+x)^\alpha - 1$ *pour* $\alpha \in \mathbb{R}$.

1 Relations de comparaison

Exercice 1.1 ($\star$)**.** *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $u_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n - 1$. *Étudier le comportement asymptotique de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1.2 ($\star$)**.** *Soit* $1 < a < b$. *Déterminer les limites des suites définies ci-dessous :*

1. $u_n = \left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n$ **2.** $u_n = \left(3\cdot 2^{1/n} - 2\cdot 3^{1/n}\right)^n$.

Exercice 1.3 ($\star$)**.** *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on définit* $g_n : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto nx\ln x - 1$.

1. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *montrer qu'il existe un unique* $\pi_n \in \mathbb{R}_+^*$ *t.q.* $g_n(\pi_n) = 0$.
2. *La suite* $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?*
3. *On note* $\ell = \lim_{n\to+\infty} \pi_n$. *Donner un équivalent simple de* $(\pi_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 1.4 ($\star$)**.** *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on définit* $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^{n+1} + x^n + 2x - 1$.

1. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *montrer qu'il existe un unique* $u_n \in \mathbb{R}_+$ *t.q.* $f_n(u_n) = 0$.
2. *Étudier la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 1.5 ($\star$)**.** *Étudier la suite* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $z_0 \in \mathbb{C}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$.

Exercice 1.6 ($\star$)**.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*
2. *Montrer que* $u_n \sim \sqrt{2n}$.

Exercice 1.7 (Lemme de Hadamard, $\star$)**.**

1. *Soit* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ *t.q.* $w_{n+1} - w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. *Démontrer (à l'aide du théorème de Cesàro) que* $\frac{w_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
2. *On s'intéresse à la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ *et :*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}.$$
   a. *Étudier la convergence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b. *Déterminer un réel* $\alpha > 0$ *t.q.* $\left(\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
   c. *En déduire un équivalent simple de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1.8 ($\star$)**.** *On définit une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$.

1. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers une limite que l'on précisera.*
2. *Trouver un* $\gamma \in \mathbb{R}$ *t.q. la suite* $(u_{n+1}^\gamma - u_n^\gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
3. *Utiliser le théorème de Cesàro pour en déduire un équivalent de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1.9 (Mines '01, $\star$)**.**

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *justifier l'existence d'un unique* $x_n \in \mathbb{R}$ *t.q.* $x_n + e^{x_n} = n$.
2. *Déterminer la limite puis un équivalent de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1.10 ($\star$)**.** *Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une bijection. Montrer que si la suite $\left(\frac{f(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\ell = 1$.*

Exercice 1.11 ($\star$)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(x) = x - ax^b + o_0(x^b)$, avec $a \in]0, +\infty[$, $b \in]1, +\infty[$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.*

1. *Montrer qu'il existe un voisinage V de 0 tel que, si $u_0 \in V$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*
2. *Trouver un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 1.12 (Mines-Pont '16, $\star$)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donner un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1.13 (Polytechnique '17, $\star$)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par :*

$$u_0 = a \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \tanh u_n.$$

Donner la limite, puis un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.