

El espacio de superficies en una variedad

Oscar Randal-Williams

Universidad de Cambridge

19 de octubre 2012

trabajo conjunto con Federico Cantero

Superficies en una variedad

Sea M una variedad diferenciable de dimension d posiblemente con borde ∂M .

Definition

Sea $\mathcal{E}(M)$ el conjunto de pares (X, ℓ_X) , donde $X \subset M$ es un subconjunto que admite la estructura de una subvariedad de dimension 2 compacta, conexa y sin borde, y ℓ_X es una orientación de X .

Elegimos, para cada entero $g \geq 0$, una superficie orientada Σ_g de genero g . Existe una función sobreyectiva

$$\coprod_{g \geq 0} \text{Emb}(\Sigma_g, M) \longrightarrow \mathcal{E}(M)$$

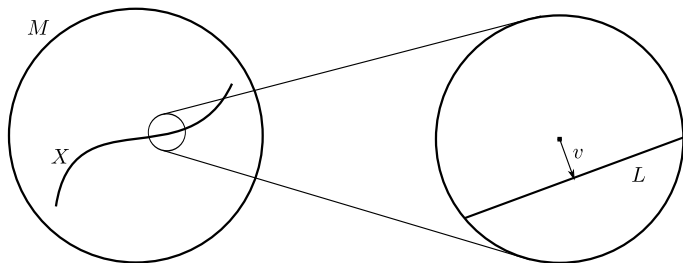
que manda cada embebimiento a su imagen. Dotamos a $\text{Emb}(\Sigma_g, M)$ de la topología de Whitney y a $\mathcal{E}(M)$ de la topología cociente.

Denotamos por $\mathcal{E}_g(M)$ el cociente de $\text{Emb}(\Sigma_g, M)$. El espacio $\mathcal{E}(M)$ se descompone como $\coprod_{g \geq 0} \mathcal{E}_g(M)$. Nuestro objetivo es estudiar los espacios $\mathcal{E}_g(M)$ y especialmente su cohomología $H^*(\mathcal{E}_g(M))$.

La filosofía del “scanning”

Los puntos del espacio $\mathcal{E}(M)$ son superficies orientadas y sin borde dentro de M . Como parecen “a nivel microscópico” en M ?

A nivel microscópico M se parece a un espacio vectorial V de dimensión d , y una superficie orientada se parece a un plano orientado $\mathbb{R}^2 \subset V$. O, si miramos lejos de la superficie, se parece a $\emptyset \subset V$.



Localmente vemos un plano $L \subset V$ y un vector normal $v \in L^\perp$. El vector normal también puede ser “infinitamente largo”: entonces deberíamos olvidar el plano y la dirección del vector.

La filosofía de “scanning” (cont.)

El espacio de planos orientados en V que contienen el origen es la variedad de Grassmann $\text{Gr}_2^+(V)$. Si no insistimos en que el plano contenga el origen, un plano está determinado por un par

$$(L \in \text{Gr}_2^+(V), v \in L^\perp).$$

Así, el espacio de planos en V es homeomorfo al espacio total del fibrado vectorial $\gamma_2^\perp \rightarrow \text{Gr}_2^+(V)$. Si también permitimos que el vector v sea “infinitamente largo”, añadimos un punto \emptyset y obtenemos el espacio de Thom

$$\text{Th}(\gamma_2^\perp \rightarrow \text{Gr}_2^+(V)).$$

Definition

Llamamos este espacio $\mathcal{S}(V)$. Depende de forma natural del espacio vectorial V (y de un producto escalar en V).

Interpretamos $\mathcal{S}(V)$ como *el espacio de superficies orientadas afines (posiblemente vacías) dentro de V .*

“Scanning”

Para explicar honestamente el “scanning” tenemos que modificar un poco el espacio $\mathcal{E}(M)$. Elegimos una métrica de Riemann g sobre M y definimos

$$\mathcal{E}^\nu(M) \subset (0, \infty) \times \mathcal{E}(M)$$

como el conjunto de pares (ε, X) tal que la aplicación exponencial $\exp : \nu(X) \rightarrow M$ es inyectiva cuando se restringe a los vectores de módulo $< \varepsilon$.

Definimos una aplicación

$$M \times \mathcal{E}^\nu(M) \longrightarrow \mathcal{S}^{fib}(TM) = \sqcup_{m \in M} \mathcal{S}(T_m M)$$
$$(x, \varepsilon, X) \longmapsto \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{S}(T_x M) & x \notin \nu_\varepsilon(X) \\ (T_p X + v \subset T_x M, \frac{v}{\varepsilon - |v|} \in (T_p X)^\perp) & x = v \in \nu_\varepsilon(X)_p \end{cases}$$

cuyo adjunto es la aplicación “scanning”

$$\mathcal{E}^\nu(M) \longrightarrow \Gamma_c(\mathcal{S}^{fib}(TM) \rightarrow M).$$

El teorema principal

Sea M una variedad diferenciable, simplemente conexa y de dimensión al menos 6. En este caso hay una biyección natural

$$\pi_0(\Gamma_c(\mathcal{S}^{fib}(TM) \rightarrow M)) \cong \mathbb{Z} \times H_2(M; \mathbb{Z}),$$

tal que la aplicación “scanning” manda (X, ℓ_X) a $(\frac{\chi(X)}{2}, [X])$.

Denotamos por $\Gamma_c(\mathcal{S}^{fib}(TM) \rightarrow M)_g$ a las componentes que se corresponden con $\{1 - g\} \times H_2(M; \mathbb{Z})$.

Theorem (Cantero–R-W)

Si M es simplemente conexa y de dimensión al menos 6, la aplicación “scanning”

$$\mathcal{E}_g(M) \longrightarrow \Gamma_c(\mathcal{S}^{fib}(TM) \rightarrow M)_g$$

induce un isomorfismo en homología con coeficientes enteros en grados
 $* \leq \frac{2g-2}{3}$.

Relación con trabajos anteriores

Este teorema está basado en dos resultados previos. Si tomamos $M = \mathbb{R}^n$, vemos que

$$\mathcal{E}_g(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Omega^n \text{Th}(\gamma_2^\perp \rightarrow \text{Gr}_2^+(\mathbb{R}^n))$$

es un isomorfismo en homología con coeficientes enteros en grados $* \leq \frac{2g-2}{3}$. Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$,

- el espacio $\mathcal{E}_g(\mathbb{R}^n)$ aproxima a $B\text{Diff}^+(\Sigma_g)$, el espacio clasificador del grupo de difeomorfismos de Σ_g ,
- el espacio $\Omega^n \text{Th}(\gamma_2^\perp \rightarrow \text{Gr}_2^+(\mathbb{R}^n))$ aproxima (por definición) el espacio de lazos infinitos de un espectro llamado **MTSO**(2).

Theorem (Madsen–Weiss)

Hay una aplicación

$$B\text{Diff}^+(\Sigma_g) \longrightarrow \Omega_\bullet^\infty \mathbf{MTSO}(2)$$

que induce un isomorfismo en homología con coeficientes enteros en grados $ \leq \frac{2g-2}{3}$.*

Relación con trabajos anteriores (cont.)

$$B\text{Diff}^+(\Sigma_g) \longrightarrow \Omega_\bullet^\infty \mathbf{MTSO}(2)$$

induce un isomorfismo en homología en grados $* \leq \frac{2g-2}{3}$.

El espacio $\Omega_\bullet^\infty \mathbf{MTSO}(2)$ es independiente del entero g , con lo que esta formulación del teorema de Madsen y Weiss implica que $H_*(B\text{Diff}^+(\Sigma_g); \mathbb{Z})$ es independiente del entero g en cierto rango de grados homológicos.

Este resultado era conocido antes del trabajo de Madsen y Weiss: el primer resultado en esta dirección se debe a Harer y posteriormente el rango fue mejorado por Ivanov, Boldsen y R-W.

No hay manera de comparar $B\text{Diff}^+(\Sigma_g)$ con $B\text{Diff}^+(\Sigma_{g+1})$. Para demostrar el teorema de Harer hay que usar *superficies con borde* y nosotros haremos lo mismo.

Superficies con borde

Sea M una variedad diferenciable con borde y $\delta \subset M$ una subvariedad de dimensión 1 formada por b circunferencias. Definimos el conjunto

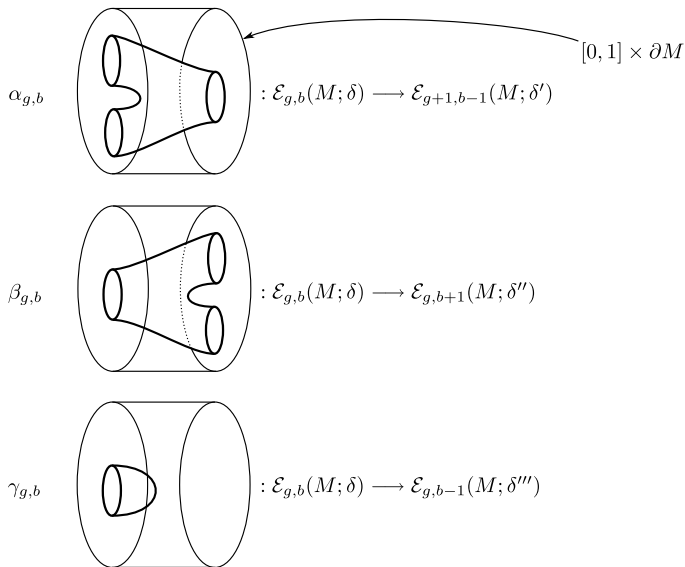
$$\mathcal{E}(M; \delta)$$

cuyos elementos son pares (X, ℓ_X) donde $X \subset M$ es una subvariedad diferenciable compacta, conexa y con borde $\delta \subset \partial M$, y ℓ_X es una orientación de X .

Dotamos a $\mathcal{E}(M; \delta)$ de una topología como antes y denotamos por $\mathcal{E}_{g,b}(M; \delta)$ a la unión de aquellas componentes conexas por caminos en las que la superficie X tiene género g (y b circunferencias como borde).

Si $b = 0$, hay un único δ y recuperamos nuestra definición de $\mathcal{E}(M)$.

Aplicaciones de estabilización



Theorem (Cantero–R-W)

Sea M una variedad diferenciable simplemente conexa y de dimensión al menos 6.

1. Cualquier aplicación $\alpha_{g,b}$ induce un isomorfismo en homología en grados $* \leq \frac{2g-2}{3}$ y un epimorfismo en grados $* \leq \frac{2g+1}{3}$.
2. Cualquier aplicación $\beta_{g,b}$ induce un isomorfismo en homología en grados $* \leq \frac{2g-3}{3}$ y un epimorfismo en grados $* \leq \frac{2g}{3}$. (Si alguna de las circunferencias salientes es contráctil en ∂M , entonces $\beta_{g,b}$ induce un monomorfismo en grados arbitrarios.)
3. Cualquier aplicación $\gamma_{g,b}$ induce un isomorfismo en homología en grados $* \leq \frac{2g}{3}$ y un epimorfismo en grados $* \leq \frac{2g+3}{3}$. Si $b \geq 2$, induce un epimorfismo en grados arbitrarios.

La demostración de este teorema es la más técnica y delicada de cualquier teorema de estabilidad homológica que yo haya visto.

Homología estable

Para demostrar que la homología estable de $\mathcal{E}_g(M)$ es la homología de $\Gamma_c(\mathcal{S}^{fib}(TM) \rightarrow M)$, usamos una modificación de un artículo de Galatius, Madsen, Tillmann y Weiss.

Sea $U \subset \partial M$ una bola abierta y $W = M \cup_U (U \times [0, \infty))$.

- Un resultado de “group completion” que compara el espacio $\mathcal{E}(M; \delta)$ con la fibra de una aplicación

$$Bp : B(\mathcal{C}_2^\partial(U) \wr F) \longrightarrow B\mathcal{C}_2^\partial(U) \quad (1)$$

entre espacios clasificadores de ciertas categorías de cobordismos,

- Un resultado de “parametrised surgery” que identifica los espacios clasificadores de las categorías $\mathcal{C}_2^\partial(U)$ y $\mathcal{C}_2^\partial(U) \wr F$ con los de categorías menos especializadas $\mathcal{C}_2(U)$ y $\mathcal{C}_2(U) \wr F$,
- Un resultado de “ h -principle” que identifica los espacios clasificadores de $\mathcal{C}_2(U)$ y $\mathcal{C}_2(U) \wr F$ con ciertos espacios de secciones.
- En total, esto identifica (1) con el fibrado

$$\Gamma(\mathcal{S}^{fib}(TW) \rightarrow W) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{S}^{fib}(TU \times (0, \infty)) \rightarrow U \times [0, \infty))$$

con fibra $\Gamma_c(\mathcal{S}^{fib}(TM) \rightarrow M)$.

Homología estable (detalle)

Definimos una categoría $\mathcal{C}_2(U)$ con:

- Objetos: un número $t \in \mathbb{R}_{>0}$ y una subvariedad $\delta \subset \{t\} \times U$ de dimensión 1.
- Morfismos: pares de números $t_0 < t_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ y una subvariedad $X \subset [t_0, t_1] \times U$ de dimensión 2, con collar cerca de $\{t_0, t_1\} \times U$.
- Formando la intersección de X con $\{t_0\} \times U$ y $\{t_1\} \times U$ obtenemos las aplicaciones de dominio y codominio respectivamente. La composición de morfismos se define como la unión de subvariedades.
- Los conjuntos de objetos y morfismos se dotan de una topología.

Sea $M_t = M \cup_U (U \times [0, t])$. Definimos un funtor

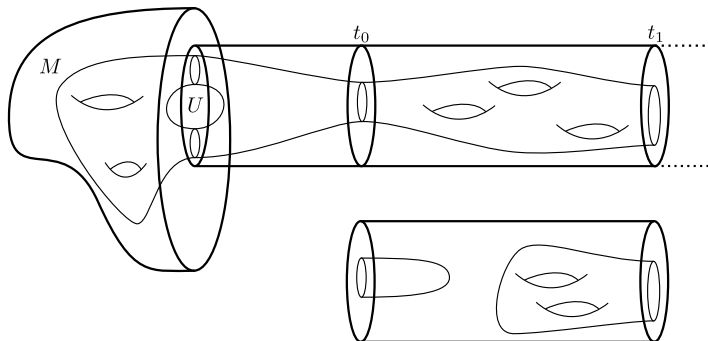
$$F : \mathcal{C}_2(U) \longrightarrow \mathbf{Top}$$

a nivel de objetos como $\delta \subset \{t\} \times U \mapsto \mathcal{E}(M_t; \delta)$, y a nivel de morfismos como

$$(X \subset [t, s] \times U : \delta \rightsquigarrow \delta') \mapsto (- \cup X : \mathcal{E}(M_t; \delta) \longrightarrow \mathcal{E}(M_s; \delta')).$$

Homología estable (detalle, cont.)

Esto no funciona: el espacio $\mathcal{E}(M_t; \delta)$ solo consiste de superficies conexas, pero los morfismos de $\mathcal{C}_2(U)$ no tienen que ser conexos. Para obtener un funtor debemos restringirnos a la subcategoría $\mathcal{C}_2^\partial(U)$ donde solo permitimos aquellos morfismos $X \subset [t_0, t_1] \times U$ tales que el par $(X, X \cap \{t_0\} \times U)$ es conexo.



Homología estable (detalle, cont.)

Formamos la construcción de Grothendieck

$$p : \mathcal{C}_2^\partial(U) \wr F \longrightarrow \mathcal{C}_2^\partial(U) \quad \Rightarrow \quad Bp : B(\mathcal{C}_2^\partial(U) \wr F) \longrightarrow B\mathcal{C}_2^\partial(U).$$

La fibra de esta aplicación (sobre un punto base adecuado) es $\mathcal{E}(M; \delta)$.

Cada cobordismo $X : \delta \rightsquigarrow \delta$ define un lazo en $B\mathcal{C}_2^\partial(U)$ y esto induce una aplicación

$$- \circ X : \mathcal{E}(M; \delta) \rightarrow \mathcal{E}(M; \delta)$$

en la fibra. *Esto no es una equivalencia homotópica: incluso puede no ser sobreyectivo en π_0 .* Por esto Bp no es un fibrado.

Tras estabilizar el funtor F de forma adecuada, podemos asegurar que Bp es un *fibrado homológico*: su fibra es homológicamente equivalente a su fibra homotópica. Es por ello que el teorema principal es homológico y no homotópico.

Para más detalles



Federico Cantero and Oscar Randal-Williams

Homological stability for spaces of surfaces, to appear.



Søren Galatius, Ulrike Tillmann, Ib Madsen, and Michael Weiss

The homotopy type of the cobordism category, Acta Math. 202 (2009), no. 2, 195-239.



Søren Galatius and Oscar Randal-Williams

Monoids of moduli spaces of manifolds, Geom. Topol. 14 (2010), no. 3, 1243-1302.



John L. Harer

Stability of the homology of the mapping class groups of orientable surfaces, Ann. of Math. (2) 121 (1985), no. 2, 215-249.