

Tom Körner

Centre for Mathematical Sciences

Wilberforce Road

Cambridge CB3 0WA

United Kingdom

twk@dpmms.cam.ac.uk

Wiskundig Werktuig

Lof der Lezing

In de reeks Wiskundig Werktuig gaat het om de dagelijkse praktijk van het wiskunde-onderzoek. Hoe luister je naar een wiskundelezing? Hoe houd je een goed wiskundig praatje? De eeuwige vraag: krijtbord, whiteboard, overhead of beamer? Hoe zorg je voor zinvolle citeringen in je artikelen? Hoe kan je computeralgebra inzetten, en welk pakket moet je dan kiezen? Tom Körner, hoogleraar in de Fourieranalyse in Cambridge en auteur van het wiskundeboek voor middelbare scholieren *'The Pleasures of Counting'*, bijt de spits af met een artikel over luisteren naar wiskundige lezingen. Heeft u ook altijd moeite gehad met onbegrijpelijke colloquia?

De ibis was voor de Egyptenaren een heilige vogel en gelovigen konden voorrechten verwerven door hen met gepaste ceremonie te begraven. Jammer genoeg overschreed het aantal gelovigen het aantal ibissen dat op natuurlijke wijze stierf sterk, zodat tempels ibissen gingen fokken om te kunnen doden en op correcte manier te kunnen begraven.

Ceremonie en ritueel

Voor veel wiskundestudenten voldoen wiskundecolleges aan de universiteit hetzelfde patroon. Voor hen heeft het bijwonen van een college eerder een magische dan een reële betekenis. Ze wonen regelmatig —devoot, zou men kunnen zeggen— colleges bij, waarbij ze zo ver mogelijk van de docent gaan zitten —het is geen goed idee om de aandacht te trekken van weinig begrepen doch sterke krachten— en maken uitgebreid aantekeningen. Sommige docenten geven informatie met zo'n tempo —vaak gebruikmakend van het technologische equivalent van een Tibetaans gebedswiel: de beamer— dat

het gehoor in continue strijd is verwickeld om alles op te schrijven, hetgeen het merendeel niet lukt. Eventuele korte stiltes worden door de meer asociale luisteraars gevuld door het zacht (of minder zacht) voeren van een gesprek¹, het lezen van een krant etc., terwijl de rest van het gehoor wat op zijn papier krabbelt of wegdroomt. De aantekeningen bij het college blijven vervolgens onaangeroerd liggen tot de vakantie of —vaker— tot een week voor het examen wanneer ze zorgvuldig gemarkeerd worden met fluorescerend gele pen- nen (dit heet 'studeren'). Als meer dan 50% van de aantekeningen gemarkeerd is, is men klaar met studeren. (Soms worden de aantekeningen aan het einde van de universitaire opleiding ceremonieel verbrand, waarmee op levendige wijze aanschouwelijk wordt gemaakt welke waarde wordt gehecht aan de academische kant van vijftien jaar onderwijs.)

Veel studenten zullen mijn omschrijving enigszins karikaturaal noemen. Ze zouden ermee instemmen dat de colleges die zij bijwonen onbegrijpelijk en saai zijn, maar ze zou-

den ook beweren dat zij erheen gaan om erachter te komen wat er getoetst gaat worden. Echter, was dit het geval, dan nog zou hun gedrag irrationeel zijn. Sinds de uitvinding van het kopieerapparaat hoeft slechts één student elke voordracht bij te wonen, waardoor de rest vrij is voor gezamenlijke activiteiten en voor het sociale leven, etc.² Verder zou deze ene student geen uitgebreide aantekeningen hoeven maken aangezien alles wat in de voordracht behandeld wordt, beter in de studieboeken staat.

Boek versus collegeaantekeningen

Zelfs de minst ervaren waarnemer ziet dat een gemiddelde spreker veel kleine fouten maakt. Meestal zijn dit spreekfouten of schrijffouten die soms door de spreker zelf worden opgemerkt, soms hardop verbeterd door een oplettend lid van het gehoor, soms stillemans verbeterd door degene die aantekeningen maakt, maar ook vaak onopgemerkt opgenomen in de aantekeningen van studenten om er later door in verwarring te worden gebracht. De ervaren waarnemer zal opmerken dat, ook al wordt de grote lijn van een bewijs redelijk goed weergegeven, de fijne details vaak onvoldoende efficiënt of precies worden gepresenteerd, met bijvoorbeeld een bewijs van vier regels waar een enkele regel had kunnen volstaan. Een college vindt plaats in reële tijd, om het maar eens zo te noemen, waarbij



vijftig minuten wiskunde ook vijftig minuten van het college vullen, terwijl een hoofdstuk uit een boek dat men in tien minuten leest, misschien wel tien dagen heeft gekost om het te schrijven.

Wanneer de auteur van een boek een probleem tegenkomt kan zij stoppen en erover nadenken; de spreker moet hoe dan ook verder. Wanneer de notatie te ingewikkeld wordt of het duidelijk wordt dat een bepaalde variant van een vroegere definitie handig zou zijn geweest, kan de auteur teruggaan en het veranderen; de spreker zit vast aan haar eerdere keuze. Wanneer haar boek af is kan de auteur het herlezen en het op haar gemak verbeteren. Zij zal haar vrienden vragen het manuscript te lezen en ieder, die het met een verse blik bekijkt, zal correcties of verbeteringen aan kunnen dragen. Tenslotte, als zij slim is, zal zij een promovendus een geschikt geldbedrag bieden voor elke gevonden fout. Zelfs met al deze voorzorgsmaatregelen blijven er fouten voorkomen, maar het is bijna zeker dat het boek een duidelijker, simpeler en nauwkeuriger uiteenzetting zal geven dan welke collegeaantekeningen dan ook...³

Voordelen van de voordracht

Studenten ervaren mogelijk enige dwang om naar colleges te gaan; hun docenten niet. Toch gaan ook wiskundigen naar seminars, colloquiumvoordrachten, doctoraalcolleges: allemaal colleges in vermomming. Maar waarom, terwijl voordrachten alle hierboven beschreven nadelen hebben? Het verrassende antwoord is dat veel wiskundigen het gemakkelijker vinden om vanuit voordrachten te leren dan vanuit boeken. Volgens mij zijn hier meerdere onderling verbonden redenen voor.

- In een voordracht is wiskunde een groeiend geheel en niet een starre momentopname. Wij leren meer van het kijken naar het bouwen van een huis dan van het inspecteren ervan.
- Zoals ik eerder al zei: de wiskunde van een voordracht wordt in reële tijd opgeschreven. Als wiskunde ingewikkeld is zal de spreker, en daarmee ook haar gehoor, langzamer gaan, terwijl ze weinig tijd hoeft te besteden aan eenvoudige stukken. In een boek komt de wiskunde, of die nu ingewikkeld of eenvoudig is, steeds in hetzelfde regelmatige tempo voorbij.
- Sommige sprekers zijn te verlegen, sommige te paniekerig en een (gering) aantal is te verwaand of te lui om te reageren op de stemming van het gehoor. De meeste sprekers voelen aan wanneer een gehoor in de war is en zullen reageren door een

nieuwe uitleg of met een illustratie. Wanneer een voordracht naar wens verloopt kan een spreker de gelegenheid te baat nemen om het gehoor net iets verder te laten gaan dan voorafvoor mogelijk werd gehouden. Een boek gaat daarentegen niet in op onze stemmingen.

- De auteur van een boek kan de verleiding bijna nooit weerstaan om net iets meer toe te voegen. (Waarom ook niet: kopers en uitgevers hebben liever met 'echte' boeken te maken dan met dunne pamfletten!) De spreker wordt door de opzet van de voordracht gedwongen om zich tot de hoofdzaak te beperken.
- In een boek laat de auteur haar beste kant zien; opmerkingen die het goed doen in een lezing lijken zwart op wit wat vlak. Een spreker kan "Dit is saai maar noodzakelijk" of "Het nam mij drie dagen om dit uit te werken" zeggen op een manier die een auteur niet kan.

Voordrachten hebben een ander voordeel dat voor beginners van bijzonder belang is. Er is een devies: 'wiskunde leert men door het te doen', dat net als veel andere deviezen een achterliggende waarheid bevat. We leren geen viool spelen door een viool te bespelen of bergklimmen door een berg te beklimmen. We leren het door experts te observeren en hen na te doen. Oefening is een essentieel onderdeel van leren maar oefenen zonder begeleiding is over het algemeen nutteloos en vaak erger dan dat. Mensen die zichzelf leren programmeren verwerven een massa slechte programmeer gewoontes die ze vervolgens (tenzij ze hun hele leven hacker willen blijven) met veel moeite af moeten leren. Wiskundige leerboeken laten ons zien hoe wiskundigen wiskunde opschrijven (zeker een belangrijke vaardigheid), maar voordrachten laten ons zien hoe wiskundigen daadwerkelijk wiskunde bedrijven.

In zijn boek *Ontwakende wetenschap* maakt Van der Waerden de volgende suggestieve opmerkingen over de aftakeling van de oude Griekse wiskundige traditie.

"Het lezen van een bewijs van Apollonius vereist uitgebreide en geconcentreerde studie. In plaats van een korte algebraïsche formule vindt men een lange zin, waarin elk lijnstuk aangegeven is door twee letters die teruggevonden moeten worden in de figuur. Om de gedachtengang te begrijpen wordt men gedwongen deze zinnen in moderne korte formules te herschrijven. De oude Grieken hadden dit hulpmiddel niet; in plaats daarvan hadden zij de mondelinge overdracht.

Mondelinge overdracht maakt het moge-

lijk de lijnstukken met je vingers aan te geven; men kan dan de hoofdzaak benadrukken en aangeven hoe het bewijs gevonden is. Dit allemaal verdwijnt in de geschreven bewoording van de streng klassieke stijl. De bewijzen zijn logisch gezien deugdelijk, maar ze spreken niet tot de verbeelding. Men voelt zich gevangen in een logische muizenval, maar men slaagt er niet in de grote lijn te ontdekken.

Zolang dit proces niet werd onderbroken en elke generatie zijn methode aan de volgende kon doorgeven, ging alles goed en bloeide de wetenschap op. Maar toen de mondelinge overlevering door externe oorzaken staakte en enkel nog de boeken overbleven, werd het moeilijk om zich het werk van de grote voorgangers nog eigen te maken en bijna onmogelijk om het te overtreffen."

Dialog

Veel studenten verwachten tegelijkertijd te weinig en te veel van hun colleges⁴. Als het hen gevraagd zou worden, zouden ze mogelijk zeggen 'Een college helpt mij de stof te begrijpen' of 'Het volgen van colleges helpt bij het maken van de sommen'. Aangezien de colleges niet aan deze verwachtingen voldoen, zullen de studenten aannemen dat ofwel de spreker ofwel zichzelf incompetent zijn. Vaak zijn beide aannames fout.

Stel dat je een grote stad bezoekt en dat je de omgeving wilt verkennen. Een manier om dit te leren is om te voet een rondleiding te volgen die langs de belangrijkste oriëntatiepunten gaat. Aan het einde van de wandeling zul je echter de stad niet even goed kennen als je gids, zelfs al heb je alles onthouden wat de gids je heeft laten zien (ofte wel 'je hebt de bewijzen uit je hoofd geleerd'). Om de stad als een inwoner te leren kennen, zul je het zelf moeten onderzoeken. In plaats van de route van de markt naar het station steeds via de hoofdweg te lopen, moet je ook andere routes proberen en kijken of die werken. (Je zult natuurlijk zo nu en dan de weg kwijt raken, maar aangezien je de routes tussen de belangrijkste oriëntatiepunten gezien hebt, zul je de weg ook terug kunnen vinden.) Je gids heeft mogelijk uitgelegd dat de straten lopen zoals ze dat doen, omdat er maar drie bruggen over de rivier zijn, echter alleen door zelf door de straten te lopen kun je deze kennis echt verwerven. Hoe hard je gids ook haar best gedaan heeft, er zijn duidelijke grenzen aan hetgeen je tijdens de eerste wandeling kunt leren. Echter, zonder die eerste rondleiding door een inwoner zul je het erg moeilijk vinden om je weg te weten in de stad. Colleges geven op zichzelf niet een volledig begrip

van een stuk wiskunde, maar zonder colleges die je op weg helpen is het erg moeilijk om iets volledig te begrijpen.

Naar mijn mening zouden studenten hun colleges niet moeten gebruiken als een mogelijkheid om aantekeningen te maken, maar als een dialoog tussen henzelf en de spreker. Ze zouden moeten proberen de argumenten te volgen zoals deze tevoorschijn komen en niet door deze slechts blindelings op te schrijven. 'Maar' zal de lezer uitroepen 'dit is een onmogelijke en nutteloze raad om perfectie na te streven', en nadat zij haar aantekeningen in de dichtstbijzijnde prullenbak gegooid heeft, zal zij mogelijk haar verontwaardiging omzetten in een reeks vragen.

Hoe zit het met aantekeningen maken?

Als je kijkt naar ervaren wiskundigen tijdens een voordracht zul je zien dat het maken van aantekeningen een automatisch proces is dat hen de vrijheid laat zich op de voordracht te concentreren. De meeste wiskundige sprekers volgen twee conventies die het mogelijk maken automatisch, of minstens halfautomatisch, aantekeningen te maken.

- Alles wat opgeschreven wordt op het bord dient overgeschreven te worden en niets dat gezegd wordt hoeft opgeschreven te worden.
- Het is de verantwoordelijkheid van de spreker om ervoor te zorgen dat wat op het bord verschijnt zonder meer fatsoenlijke aantekeningen geeft. Halfautomatisch aantekeningen maken is een vaardigheid die geleerd moet worden, maar deze schijnt gemakkelijk te verwerven te zijn.

Zou het beter zijn geen aantekeningen te maken?

Sommige wiskundigen maken nooit aantekeningen, maar de meesten vinden dat het maken van aantekeningen hen helpt om zich te concentreren op het huidige onderwerp van de lezing. (Wanneer het gehoor tijdens een seminarium stopt met het maken van aantekeningen weet de ervaren spreker dat hun aandacht weg is en dat zij haar lezing vanaf dit moment gaan gebruiken als een babbelende bron van witte ruis voor hun eigen gedachten). Overigens zal zelfs het grootste bord uiteindelijk gewist worden en aantekeningen staan je dan toe om je eerdere delen van de voordracht weer voor de geest te halen.

Wat moet je doen als je het niet meer kunt volgen?

Het eerste en belangrijkste om te onthouden is het feit dat de meeste wiskundigen het

grootste deel van de tijd de voordrachten niet kunnen volgen. (Vraag maar om je heen als je dit niet gelooft.) Een wiskundige voordracht bijwonen is als een nachtelijke tocht door een onweersstorm. De meeste tijd ben je de weg kwijt, nat en ellendig, maar tijdens zeldzame tussenpozen is er een lichtflits en is het hele platteland opgelicht. Zodra je je realiseert dat je toestand noch een ondubbeltzinnig teken van ongeneeslijke stomheid noch een duidelijke aanwijzing van volledige incompetentie van de spreker is, maar een normale gebeurtenis, is het duidelijk wat je moet doen. Je moet doorgaan met aantekeningen maken, terwijl je er steeds goed op let wanneer de spreker van onderwerp verandert (of een bewijs, of wat dan ook, afmaakt) en je haar voordracht weer als actieve partner kunt volgen.

Het is duidelijk dat als je je aantekeningen na het college bestudeert *met als doel de stof te begrijpen tot op het punt waar de spreker ook is aangekomen*, je een betere kans zult hebben het volgende college te begrijpen. Als je behoort tot de meerderheid van studenten die vinden dat ik hiermee onhaalbare perfectie nastreef, dan kun je op zijn minst de laatste vijf minuten voor het college gebruiken om het laatste deel van je aantekeningen door te nemen. (Als je dat niet eens doet, vraag jezelf dan tenminste wel af waarom je het niet doet.)

Wat moet je doen als je helemaal niets begrijpt van wat er verteld wordt?

Op geavanceerd niveau is het mogelijk dat een volledige reeks van 24 lezingen gewijd wordt aan het bewijs van een enkele stelling. Als je in zo'n college echt de draad kwijt bent (en waarschijnlijk is aan het einde iedereen, behalve mogelijk de spreker, de draad echt kwijt), dan blijf je de draad kwijt zijn. Eerst- en tweedejaarscolleges worden opgemaakt uit meerdere korte onderwerpen die aan elkaar gekoppeld zijn in een redelijke volgorde. Zelfs al lukt het je volstrekt niet een onderwerp te begrijpen, dan is er geen reden waarom je het volgende onderwerp niet zou kunnen begrijpen. (Je kunt Cauchy ook toepassen zonder het bewijs te begrijpen.) Aan de andere kant, als het ene na het andere onbegrijpelijke onderwerp wordt opgedist, dan is het maken van aantekeningen in de hoop dat je alles duidelijk wordt zodra je het doorneemt niet de juiste oplossing. In dit geval moet je je trots inslikken en raad vragen bij je studiebegeleider.

Hoe zit het met vragen?

Het gehoor kan drie soorten vragen stellen.

- *Vragen met correctie als doel* Als je denkt dat de spreker een minteken gemist heeft of een α geschreven heeft in plaats van een β , dan moet je dit altijd vragen. Geen enkele spreker vindt het prettig om een bord met berekeningen te vullen die steeds verder het moeras in zakken, omdat het gehoor heeft nagelaten om een fout in de eerste regel aan te wijzen. Soms wachten zeer beleefde studenten tot na de voordracht om de fouten door te geven met als gevolg dat de spreker weet dat zij een fout gemaakt heeft maar ook dat zij hem niet kan verbeteren. De regel is dus vragen, en wel meteen.
- *Vragen met extra uitleg als doel* Het eist aanzienlijke moed om in de aanwezigheid van anderen toe te geven dat je iets niet begrijpt. Echter, als je iets niet begrijpt is het aannemelijk dat veel anderen in het gehoor zich in dezelfde situatie bevinden en je stilzwijgend zullen bedanken. Je zult meestal de hoorbare en welgemeende dank van de spreker hebben, omdat, zoals ik eerder al zei, meeste sprekers graag in contact blijven met hun gehoor.⁵ (Er is een kleine en ongelukkige minderheid die liever voor een lege zaal spreekt; geef je spreker het voordeel van de twijfel en vraag vooral.)
- *Vragen met uitbreiding als doel* Als je in de gelukkige positie verkeert dat je alles begrijpt wat de lezer vertelt, dan zou je mogelijk willen dat zij dieper op de stof ingaat. Je bescheiden verzoek om meer over het algemene geval te horen valt hoogstwaarschijnlijk niet in goede aarde bij de rest van het gehoor, die nog steeds met het huidige geval aan het worstelen is. Dergelijke vragen zijn behouden voor na de lezing, wanneer de spreker met plezier antwoord zal geven (weinig wiskundigen kunnen een uitnodiging om meer over hun onderwerp te vertellen weerstaan). Als je meer dan één vraag per voordracht stelt, onderzoek dan je beweegredenen.

De eenvoudige vraag

Bij seminaria valt op dat het vaak de meest eminente wiskundigen zijn die de eenvoudigste vragen stellen. (Als de wiskundigen niet zo eminent waren zouden we ze naïef kunnen noemen.) Het zou kunnen zijn, dat zij slechts met het stellen van vragen zijn begonnen, nadat ze eminent werden, maar ik geloof dat de bereidheid om te vragen wat je niet weet een kenmerk van vele grote geesten is.⁶

Wiskundige anekdotes neigen ertoe aan meerdere bronnen te worden toegeschreven

(misschien omdat wiskundigen eerder processen onthouden dan geïsoleerde feiten als namen). De volgende anekdote werd door de Grieken onder andere aan Euclides toegeschreven. Ptolemaeus, koning van Egypte, vroeg aan Euclides om hem meetkunde te on-

derwijzen. 'O, koning' antwoordde Euclides 'in Egypte zijn er koninklijke wegen en wegen voor het gewone volk, maar er zijn geen koninklijke wegen in de meetkunde.' Wiskunde is moeilijk, er zijn geen eenvoudige manieren om het te begrijpen, maar een voordracht, op

de juiste manier gebruikt, is de meest gemakkelijke manier die ik ken. 

Bronvermelding

Een engelstalige versie van dit stuk is te lezen op <http://www.dpmms.cam.ac.uk/~twk>

Noten

- 1 Een *college* (of *voordracht*) is een openbaar optreden vergelijkbaar met een concert of theateruitvoering. Dit in tegenstelling tot *televisiekijken*: dit laat het zogenaamde zappen en het voeren van een gesprek toe. Bij openbare optredens zijn privégesprekken, hoe interessant ze ook mogen wezen voor de gesprekspartner, afleidend voor de rest van het gehoor. Het moet gezegd worden dat net zoals een goede eter een goede kok creëert, zo maakt een goed gehoor ook een goede spreker. Een spreker zal een betere voordracht geven voor een gehoor dat stil en aandachtig luistert, dan voor publiek dat zich lawaaiig en onoplettend betoont.
- 2 In het verleden hebben sommige universiteiten het bijwonen van colleges verplicht gesteld. In Cambridge, in het begin van de negentiende eeuw, was aanwezigheid niet verplicht bij colleges, maar wel bij kerkdiensten. De 'keuze', beweerden voorstanders van verplichte kerkdiensten, 'is tussen verplichte godsdienst en geen godsdienst.' 'Het verschil' antwoordde

een tegenstander '... is te subtiel voor mij.'

- 3 Ooit was het de gewoonte dat beginnende docenten hun eerste paar jaar besteedden aan het schrijven van een perfecte serie college-aantekeningen: in feite een boek. De rest van hun werkzame leven bestond hun college uit het op dicteersnelheid voorlezen van deze aantekeningen. Hun uiteenzetting was dan helder, eenvoudig en nauwkeurig, maar gezien de ontwikkeling van de drukpers enige eeuwen eerder had hetzelfde resultaat efficiënter bereikt kunnen worden.
- 4 'Ik ben naar een lezing gegaan over de viool, maar toen ik probeerde om erop te spelen klonk het vreselijk. Die spreker kan niet goed geweest zijn.'
- 5 Ik heb vaak gedacht dat de technologie van spelprogramma's op de televisie aangepast zou moeten worden voor gebruik in collegezalen. Elke stoel zou een verborgen knop moeten hebben waarop de mensen in het gehoor kun-

nen drukken wanneer ze willen dat de spreker langzamer gaat. De 'stemmen' zouden opgeteld kunnen worden, waarbij het resultaat op een wijzerplaat getoond zou worden die alleen zichtbaar is voor de spreker. Deze is dan in dezelfde positie als een automobilist die zich aan een snelheidslimiet moet houden.

- 6 Er is echter geen uniek recept voor grootheid. Toen de zeer vooraanstaande natuurkundige Bohr de vooraanstaande natuurkundige Landau in Moskou bezocht, werd hij uitgenodigd een voordracht voor promovendi te houden, waarbij Landau zou vertalen. Bohr concludeerde zijn voordracht met de bewering 'Ik schrijf mijn succes toe aan het feit dat ik nooit bang geweest ben om mij door mijn studenten te laten vertellen, wat een dwaas ik ben'. De Russische vertaling eindigde met 'Ik schrijf mijn succes toe aan het feit dat ik nooit bang ben geweest mijn studenten te vertellen wat een dwazen zij zijn'.