Московский Государственный Университет
им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 515.14

Фельдман Константин Эдуардович

Обобщенный индекс векторных полей Морса-Ботта, трансфер расслоений и их приложения

(01.01.04 — геометрия и топология)

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук, профессор В.М. Бухштабер

Москва
2000

Оглавление

Введение

Классический вопрос о препятствиях к существованию сечения в расслоенном пространстве послужил стимулом для создания мощных методов алгебраической топологии. В середине 70-х годов Беккер и Готтлиб открыли, что достаточно широкий класс расслоенных пространств (например, все расслоения с гладким компактным слоем) обладают сечением в стабильной категории. А именно, после многократной надстройки над проекцией расслоения появляется непрерывное отображение из надстройки над базой в надстройку над пространством расслоения, алгебраические свойства которого во многом аналогичны свойствам сечения расслоения (см. [9]). Это отображение было названо трансфером, поскольку оно обобщает известную алгебраическую конструкцию из теории когомологий групп [31]. Один лишь факт существования трансфера Беккера-Готтлиба дает сильные ограничения на взаимоотношения когомологических свойств базы и пространства расслоения. Например, если слой расслоения имеет ненулевую эйлерову характеристику, то в рациональных когомологиях гомоморфизм, индуцированный проекцией расслоения, является мономорфизмом на прямое слагаемое [9].

Трансфер Беккера-Готтлиба в ряде случаев может быть выражен в терминах обыкновенных сечений расслоения. Например, если на расслоении задано послойное действие окружности, множество неподвижных точек которого представляет собой набор различных сечений расслоения, то трансфер такого расслоения стабильно гомотопен сумме этих сечений [8]. Естественные обобщения этого случая дают выражения трансфера расслоения через трансферы специальных подрасслоений из [14, 24]. Эти выражения называются локализацией трансфера. Результаты о локализации трансфера, полученные к настоящему времени, играют важную роль как в теории расслоенных пространств, так и в ее приложениях (см. примеры в [8, 14, 16, 24, 39]). В то же время, эти результаты не дают полного ответа в задаче о локализации даже в случае расслоения со слоем окружность S^1.

В основе настоящей работы лежит решение проблемы локализации трансфера в терминах нулей векторных полей Морса-Ботта, касательных вдоль слоев исходного расслоения.

Трансфер Беккера-Готтлиба позволил по-новому взглянуть на теорию характеристических классов. Теория характеристических классов векторных расслоений, созданная Понтрягиным, Штифелем, Уитни и Чженем, опирается на построение инвариантов расслоений в терминах препятствий к существованию сечений в специальных расслоениях, ассоциированных с исходным (см., например, [32]). Аппарат теории характеристических классов оказал значительное влияние на развитие теории когомологических операций, теории кобордизмов, K-теории и теории эллиптических операторов на многообразиях. В то же время, развитие алгебраической топологии оказывало существенное влияние на всю теорию характеристических классов. Опираясь на идеи Гротендика, для различных теорий когомологий стали исследовать вопрос о существовании в них характеристических классов векторных расслоений с различными дополнительными структурами. Построение и изучение свойств характеристических классов при этом подходе сводится к вычислению кольца обобщенных когомологий классифицирующего пространства (см. [20]).

В [15] был предложен способ построения характеристических классов при помощи трансфера Беккера-Готтлиба, который опирался на новое понятие – универсальные характеристические классы со значениями в соответствующей теории кобордизмов. В результате, вопрос о существовании характеристических классов в данной теории когомологий был сведен к задаче о нахождении преобразования некоторой универсальной теории кобордизмов в эту теорию когомологий. В основе построения универсальных характеристических классов лежит геометрическая реализация класса Эйлера расслоения через класс Тома, определенный для любого ориентированного в универсальной теории кобордизмов векторного расслоения. Класс Эйлера задает старший характеристический класс векторного расслоения. Младшие характеристические классы расслоения строятся при помощи отображения трансфера из классов Эйлера канонических расслоений над грассманизациями исходного расслоения.

В работе [15] такой подход реализован на примере универсальных характеристических классов Понтрягина. Универсальная теория кобордизмов для классов Понтрягина строится по многообразиям, в стабильном нормальном расслоении которых фиксирована структура комплексификации некоторого вещественного расслоения. Эта теория обозначается как CO. В настоящее время из-за наличия сложных 2-кручений в CO-теории вычисление даже кольца кобордизмов точки в ней остается нерешенной задачей (см. [5, 27]). Предложенный в [15] способ позволил построить для каждого n-мерного векторного расслоения ξ характеристические классы $p_{k/2}(\xi)$, $k = 1, ..., n$, со значениями в CO-ориентированных теориях когомологий. Эти классы с целыми номерами при каноническом преобразовании в теорию целочисленных когомологий переходят в обычные классы Понтрягина, и поэтому в работе [15] классы $p_{k/2}$ были названы полуцелыми классами Понтрягина.

Хорошо известно, что характеристические классы Понтрягина не удовлетворяют системе аксиом, предложенной Гротендиком для классов Чженя комплексных векторных расслоений. Это связано с тем, что основное вычислительное средство теории – формула Уитни – выполняется только по модулю элементов 2-примарного порядка. Как следствие, для характеристических классов Понтрягина в системе аксиом Гротендика не выполняется теорема единственности. Известно [6], что нельзя построить универсальные классы Понтрягина так, чтобы одновременно выполнялось равенство $p_n(\xi) = \chi_{CO}(C\xi)$, где $n = \dim \xi$, и формула Уитни была точной. При подходе, предложенном в [15], теорема сложения не входит в список аксиом для универсальных характеристических классов. Тем не менее, для завершения построения теории универсальных характеристических классов Понтрягина из [15] важно было выяснить, каков же точный закон сложения для них. Полное решение этого вопроса позволило бы также получить новую информацию о структуре 2-примарных компонент CO-теории кобордизмов.

Как следует из [15], теоремы сложения для характеристических классов Понтрягина тесно связаны с гомотопическими свойствами трансфера Беккера-Готтлиба. Возможность сводить вычисление трансфера расслоения к вычислению трансферов от некоторых специальных подрасслоений позволяет получить все известные к настоящему времени теоремы сложения для характеристических классов. Для получения точных формул, выражающих универсальные характеристические классы Понтрягина суммы Уитни двух вещественных векторных расслоений через классы Понтрягина слагаемых, необходимо перенести результаты о локализации трансфера

[8, 14, 24] на более широкий класс расслоений.

Трансфер Беккера-Готтлиба дает геометрическую реализацию фундаментального понятия – прямого образа, играющего важную роль в анализе, алгебре и геометрии. Методы, связанные с понятием прямого образа, позволяют сводить различные вычислительные задачи на базе расслоения к более простым задачам на пространстве этого расслоения. В топологии наиболее важными реализациями прямого образа являются гомоморфизм Гизина и трансфер Беккера-Готтлиба. Каждое из этих отображений имеет простой алгебраический смысл. Гомоморфизм Гизина представляет собой обобщение понятия интегрирования вдоль слоев и тесно связан с понятием вычета. Трансфер Беккера-Готтлиба дает геометрическую реализацию следа оператора умножения на элемент расширения данного кольца для важного класса алгебраических расширений колец. Для расслоений $p : E \to B$ с гладким слоем F можно описать связь между трансфером Беккера-Готтлиба и гомоморфизмом Гизина, используя расслоение касательных вдоль слоев $\tau_F(E)$. Более точно, если такое расслоение $\tau_F(E)$ ориентируемо, то трансфер расслоения выражается через гомоморфизм Гизина при помощи класса Эйлера расслоения $\tau_F(E)$. Это позволяет одинаково успешно использовать в задачах алгебраической и дифференциальной геометрии аппарат алгебраической топологии, хорошо согласованный с трансфером, а в задачах алгебраической топологии – аппарат алгебраической и дифференциальной геометрии, связанный с понятиями вычета и следа алгебраического расширения. Например, ряд задач алгебраической геометрии, дифференциальной геометрии и дифференциальной топологии может быть сведен к исследованию алгебро-топологических свойств многообразий флагов. В работах [12, 13] рассматриваемый подход реализован для вычисления важных операторов деления, построенных в работе [10], в кольце комплексных кобордизмов полных флагов. Как следствие, получена новая информация о мультипликативной структуре кольца кобордизмов многообразий полных флагов различных комплексных полупростых групп Ли. Этот результат естественно называть исчислением Шуберта [25] в комплексных кобордизмах. В настоящее время получен большой объем информации о структуре колец когомологий многообразий флагов [21, 22, 25, 28], и задачи о шубертовском исчислении находятся в центре внимания в связи с новыми приложениями в теории квантовых когомологий [19, 26]. Среди других направлений приложения рассматриваемого подхода отметим важную задачу о соотношениях типа делимости на характеристические числа классов многообразий с дополнительной структурой (например, комплексной) в касательном расслоении [2, 7, 37], а также задачу о соотношениях между характеристическими числами многообразия и его подмногообразий, двойственных к характеристическим классам касательного расслоения исходного многообразия [18]. В настоящее время эти задачи далеки от полного решения.

Представляемая диссертация посвящена решению задачи о локализации трансфера, нахождению точных законов сложения для универсальных классов Понтрягина и полному вычислению гомоморфизма Гизина в комплексных кобордизмах для грассманизаций комплексных векторных расслоений.

В первой главе диссертации мы даем полное исследование вопроса о локализации трансфера. Доказанное свойство локализации трансфера позволяет сводить задачу о вычислении трансфера расслоения к вычислению трансферов специальных подрасслоений – подрасслоений нулей векторных полей, касательных к слоям исходного расслоения. При этом трансфер расслоения может быть записан в виде линейной комбинации трансферов подрасслоений, что отмечалось при исследовании частных случаев в работах [8, 14, 24]. Основным результатом первой главы диссертации является полное вычисление коэффициентов этой линейной комбинации. Мы разрабатываем теорию индексов векторных полей Морса-Ботта со значениями в когомотопических группах подмногообразий нулей этих полей. Оказывается, что коэффициенты, с которыми трансфер расслоения выражается через трансферы подрасслоений нулей послойных векторных полей, в точности совпадают с вводимыми индексами. Построенные индексы векторных полей Морса-Ботта при гомоморфизме в целочисленные когомологии равны индексам нулей векторных полей в обычном понимании. В простейшем случае для расслоений над точками доказательство свойства локализации трансфера воспроизводит доказательство классической теоремы Пуанкаре-Хопфа о суммарной особенности касательного векторного поля на многообразии (см., например, [33]). С этой точки зрения свойство локализации трансфера представляет собой далекое обобщение теоремы Пуанкаре-Хопфа для многообразий на случай расслоеных пространств. В этой же главе мы строим пример векторного поля на проективной плоскости, у которого индекс нуля в окрестности проективной прямой равен

$-1+u$, где u – образующая группы π_1^S. В заключении этой главы мы показываем, что известные результаты работ [14, 24] о локализации трансфера сводятся к частным случаям доказанной общей теоремы о локализации. Результаты этой главы опубликованы в [45, 47].

Во второй главе диссертации изучаются универсальные характеристические классы векторных расслоений. Первый и второй параграф этой главы посвящены нахождению точных формул, выражающих классы Понтрягина суммы Уитни двух вещественных векторных расслоений через классы Понтрягина слагаемых. В первом параграфе мы вычисляем значение в кобордизмах индекса векторного поля Морса-Ботта в случае, когда дифференциал поля в окрестности нуля имеет диагональный вид. Мы исследуем важное векторное поле Морса-Ботта на грассманизации суммы Уитни двух вещественных векторных расслоений, описываем связные компоненты нулей и вычисляем их индексы. Во втором параграфе мы доказываем центральный результат этой главы – теорему сложения универсальных характеристических классов Понтрягина вещественных векторных расслоений. Детально рассмотрен случай первого полуцелого класса $p_{1/2}$. В комплексных кобордизмах получена точная формула, выражающая первый полуцелый класс Понтрягина суммы двух вещественных векторных расслоений через классы Понтрягина слагаемых.

В третьем параграфе второй главы мы рассматриваем пример использования теорем сложения обобщенных характеристических классов. Мы даем новое доказательство гипотезы Фробениуса о размерностях вещественных алгебр без делителей нуля. Мы показываем, что замена классов Штифеля-Уитни на первый класс Чженя в K-теории позволяет довести элементарное доказательство [32] того, что размерность таких алгебр есть 2^k, до доказательства того, что реализуются только случаи $k = 0, 1, 2$ и 3.

В заключительном четвертом параграфе этой главы мы исследуем характеристические классы Понтрягина стабильно комплексных векторных расслоений. Мы показываем, что классы Понтрягина с нецелыми номерами у таких расслоений равны нулю, в то время как классы с целыми номерами обладают реализацией в симплектических кобордизмах. Результаты этой главы опубликованы в [44, 45, 46, 47].

В третьей главе диссертации разрабатывается исчисление Шуберта в комплексных кобордизмах для комплексных многообразий флагов. Мы решаем задачу о вычислении гомоморфизма Гизина в комплексных кобордизмах для грассманизации комплексных векторных расслоений. Этот результат дает явные формулы для исчисления Шуберта в комплексных кобордизмах из [12, 13] и распространяет результаты [21, 22, 28, 38] на широкий класс задач.

В первом параграфе третьей главы мы доказываем технический результат о связи между гомоморфизмом Гизина и отображением трансфера. В свете доказанных результатов свойство локализации трансфера представляет собой общую теорему о локализации алгебро-геометрических инвариантов многообразия в окрестности специальных подмногообразий, таких как подмногообразия неподвижных точек действий групп (см. [4, 20]) или подмногообразия нулей векторных полей (см. [11, 43]).

Во втором параграфе мы вычисляем гомоморфизм Гизина в комплексных кобордизмах для грассманизаций комплексных векторных расслоений. Мы строим удобные для вычислений базисы кольца любых комплексно-ориентированных обобщенных когомологий произвольного многообразия комплексных флагов. Элементы построенных базисов представляют собой деформации классических полиномов Шура [30]. Параметрами этой деформации являются коэффициенты формальной группы теории когомологий. Гомоморфизм Гизина описывается в терминах операции объединения на индексах элементов базисов. Доказательство этого утверждения получается из результатов о структурах градиентных потоков на симметрических пространствах [41] и доказанного в диссертации свойства локализации трансфера.

В заключительном третьем параграфе мы вычисляем след оператора умножения на элемент расширения кольца когомологий пространства B в классе алгебраических расширений, определяемых грассманизациями $(CG_k^n(\eta), CG_k^n, B, p)$ произвольных комплексных векторных расслоений. Общий вид таких алгебраических расширений есть кольцо полиномов над кольцом когомологий базы от классов Чженя тавтологического расслоения $\eta(k)$ над $CG_k^n(\eta)$ и соотношением $\mathcal{C}(\eta(k))\cdot\mathcal{C}(\eta(n-k)) = p^*(\mathcal{C}(\eta))$, где через $\mathcal{C}(\xi)$ мы обозначаем полный класс Чженя комплексного расслоения ξ в данной теории когомологий (теория когомологий предполагается комплексно-ориентированной). След такого оператора умножения в описанных алгебраических расширениях совпадает с гомоморфизмом, индуцированным трансфером в когомологиях. Применение свойства локализации трансфера позволяет дать точное выражение для следа оператора умножения в терминах образующих Ву исходного расслоения и тавтологического расслоения над грассманизацией. Результаты этой главы опубликованы в [45, 48].

Благодарности. Я хочу выразить глубокую признательность своему научному руководителю профессору В. М. Бухштаберу за многочисленные обсуждения, ценные советы и постановки задач, а также выразить благодарность сотрудникам кафедры Высшей геометрии и топологии Л. А. Алания, И. А. Дынникову и Т. Е. Панову за полезные обсуждения во время моего обучения в Московском государственном университете.

Глава 1.

Эквивариантный аналог теоремы Пуанкаре-Хопфа

1.1. Трансфер

В этом пункте мы дадим определения основных понятий, связанных с трансфером Беккера-Готтлиба [9].

Пусть X и Y – топологические пространства с отмеченными точками и $[X, Y]$ - множество гомотопических классов отображений X в Y, переводящих отмеченную точку в отмеченную. Обозначим через $\{X, Y\}$ группу стабильных гомотопических классов отображений

$$\{X, Y\} = \lim_{n\to\infty}[S^n \wedge X, S^n \wedge Y].$$

Определение 1.1. *Нульмерной когомотопической группой* пространства X с отмеченной точкой называется группа

$$\pi_S^0(X) = \{X, S^0\} = \lim_{n\to\infty}[S^n \wedge X, S^n].$$

Будем обозначать через X^+ несвязное объединение пространства X и точки, которую будем полагать отмеченной. Если в пространстве X задана отмеченная точка, то $S^n \wedge X^+$ гомотопически эквивалентно $S^nX \vee S^n$, и поэтому

$$\pi_S^0(X^+) = \pi_S^0(X) \oplus Z.$$

Каноническую проекцию $\pi_S^0(X^+) \to Z$ мы будем обозначать через ϵ. Если в качестве X взять сферу S^k, то

$$\mathrm{Ker}(\epsilon) \cong \pi_k^S,$$

где π_k^S – k-тая стабильная гомотопическая группа сфер.

Каждое расслоение (E, F, B, p) с гладким компактным замкнутым слоем F задает канонический элемент в группе $\{B^+, E^+\}$, существование которого обеспечивается трансфером Беккера-Готтлиба [9]. Приведем конструкцию этого элемента в случае, когда E есть гладкое расслоение с компактной базой (для произвольных клеточных баз см. определение в [17]).

Пространство расслоения E может быть вложено в R^n для подходящего n. Обозначим это вложение как i. Пусть $\tau_F(E)$ – касательное расслоение вдоль слоев расслоения E и $\nu(E)$ – нормальное расслоение вложения $p \times i : E \subset B \times R^n$. Нетрудно проверить, что $\tau_F(E) \oplus \nu(E)$ есть тривиальное n-мерное векторное расслоение над E [9]. Будем обозначать пространство Тома произвольного векторного расслоения ξ как $T\xi$.

Определение 1.2. *Трансфером* гладкого расслоения (E, F, B, p) называется композиция отображений

$$\tau(p) : S^n \wedge B^+ \to T\nu(E) \to T(\nu(E) \oplus \tau_F(E)) = T[\bar{n}],$$

где первое отображение – это отображение Понтрягина-Тома, представляющее собой склейку внешности трубчатой окрестности подмногообразия E в многообразии $B \times R^n$, а второе отображение есть вложение расслоения $\nu(E)$ на прямое слагаемое.

Заметим, что пространство Тома тривиального n-мерного векторного расслоения над B есть n-кратная надстройка над B^+. Поэтому трансфер определяет некоторый элемент группы $[S^n \wedge B^+, S^n \wedge E^+]$. Образ этого элемента в группе $\{B^+, E^+\}$ уже не зависит от выбора вложения [9]. Таким образом, трансфер корректно определяет элемент группы $\{B^+, E^+\}$, который мы будем обозначать через $\{\tau(p)\}$.

Стабильное отображение из X в Y для любой теории когомологий $h^*(\cdot)$ однозначно определяет гомоморфизм групп

$$h^*(Y) \to h^*(X).$$

Соответствующий гомоморфизм для трансфера расслоения (E, F, B, p) мы будем обозначать через $\tau(p)^*$. Пусть π – проекция на первое слагаемое $\pi : S^n \wedge E^+ \to S^n$.

Определение 1.2. *Индексом* $I(E)$ расслоения $p : E \to B$ называется элемент $\{\pi \circ \tau(p)\} \in \pi_S^0(B^+)$. Индексом этого расслоения в теории когомологий $h^*(\cdot)$ называется элемент $I_h(E) = \tau(p)^*(1) \in h^0(B^+)$ (мы считаем, что в h^* группа h^0 является кольцом с единицей). Таким образом, $I(E)$ – это индекс расслоения в стабильной теории когомотопий $\pi_S^*(\cdot)$.

Заметим, что для любой теории когомологий $h^*(\cdot)$ с единицей существует каноническое преобразование теорий ([42])

$$\mu_h : \pi_S^*(\cdot) \to h^*(\cdot),$$

которое переводит единицу теории $\pi_S^*(\cdot)$ в единицу теории $h^*(\cdot)$. Индекс расслоения $p : E \to B$ в теории $h^*(\cdot)$ равен $\mu_h(I(E))$.

Индексы расслоений нетривиальны уже в простейшем случае для расслоений, база которых есть точка. В этом случае $\pi_S^0(B^+) \cong Z$, и индекс расслоения равен эйлеровой характеристике слоя [9].

На протяжении всей этой работы мы будем постоянно использовать три основных свойства трансфера Беккера-Готтлиба, доказательство которых дано в [9].

Пусть $(E_i, F_i, B_i, p), i = 1, 2$ – расслоения, слои которых являются гладкими компактными замкнутыми многобразиями.

Свойство 1.1 (функториальность). Если

$$\psi : (E_1, F_1, B_1, p) \to (E_2, F_2, B_2, p)$$

- отображение расслоений, то

$$\tau(p_2) \circ \psi \sim \psi \circ \tau(p_1).$$

Свойство 1.2 (мультипликативность). Если

$$(E, F, B, p) = (E_1 \times E_2, F_1 \times F_2, B_1 \times B_2, p_1 \times p_2),$$

то

$$\tau(p_1) \wedge \tau(p_2) \sim \tau(p_1 \times p_2).$$

Свойство 1.3 (композиционность). Пусть расслоение (E, F, B, p) разлагается в композицию расслоений (E, F_1, E_1, p_1) и (E_1, F_2, B, p_2). Тогда

$$\tau(p) \sim \tau(p_2) \circ \tau(p_1).$$

1.2. Локализация

Фундаментальной характеристикой невырожденного нуля касательного векторного поля на гладком многобразии является индекс этого векторного поля в окрестности рассматриваемого нуля [33]. Индекс векторного поля определяется как детерминант линейной части векторного поля в малой окрестности нуля [33]. В этом пункте мы покажем, что в окрестности вырожденного нуля дифференциал поля дает важную характеристику этого нуля. В терминах вводимых характеристик выражаются коэффициенты, с которыми трансфер гладкого многообразия может быть представлен в виде линейной комбинации трансферов подмногообразий нулей векторного поля на исходном многообразии.

Прежде чем приступить к доказательству основной теоремы мы приведем пример, который поможет понять формулировку свойства локализации трансфера. Начнем с необходимых понятий.

Каждый элемент группы $\pi_S^0(B^+)$ задается непрерывным отображением вида $S^n \wedge B^+ \to S^n$ для достаточно большого n. Обозначим через π проекцию на первый множитель в пространстве $S^n \wedge B^+$. Представитель γ элемента из $\pi_S^0(B^+)$ задает отображение

$$f_\gamma : B \to \mathrm{Map}(S^n, S^n)$$

по формуле $f_\gamma(b)(y) = \gamma(y, b)$. Верно и обратное. Любое непрерывное отображение $f : B \to \mathrm{Map}(S^n, S^n)$ задает некоторый элемент из $\pi_S^0(B^+)$ по формуле $\gamma_f = \{\pi(f(b)(y), b)\}$. Отождествим S^n с $R^n \bigcup \{\infty\}$ и определим действие $GL(n, R)$ на S^n посредством этого отождествления. Уже в случае, когда $f(b) \in GL(n, R)$ для любого $b \in B$, соответствующий элемент когомотопической группы может иметь ненулевую компоненту в $\mathrm{Ker}(\epsilon)$.

Пример 2.1. Пусть $B = S^1$ и ξ_1 – нетривиальное одномерное вещественное векторное расслоение над S^1. Заметим, что $\xi_1 \oplus \xi_1$ – тривиальное двумерное вещественное векторное расслоение. Рассмотрим отображение

$$S^2 \wedge S^{1+} = T(\xi_1 \oplus \xi_1) \xrightarrow{(1,-1)} T(\xi_1 \oplus \xi_1) = S^2 \wedge S^{1+} \xrightarrow{\pi} S^2. \qquad (2.1)$$

Так как $S^2 \wedge S^{1+} \sim S^3 \vee S^2$, то построенное выше отображение определяет два отображения $\alpha_1 : S^3 \to S^2$ и $\alpha_2 : S^2 \to S^2$. Нетрудно проверить, что α_2 есть симметрия относительно центральной плоскости. Покажем, что α_1 задает образующую группы $\pi_3(S^2)$. Отождествим S^2 и $\mathbf{C}^1 \bigcup \{\infty\}$, полагая бесконечно удаленную точку отмеченной. Рассмотрим прообраз нуля при отображении α_1. Это будет нулевое сечение в расслоении $\xi_1 \oplus \xi_1$, т.е. окружность. Полный прообраз $\mathbf{C}^1 \subset S^2$ при отображении α_1 представляет собой пространство расслоения $\xi_1 \oplus \xi_1$. Расщепление тривиального двумерного вещественного расслоения над S^1 в прямую сумму $\xi_1 \oplus \xi_1$ задает выделенный базис в каждом слое расслоения

$$\langle e_1(\phi), e_2(\phi)\rangle = \langle e^{i\phi/2}, ie^{i\phi/2}\rangle,$$

где $\phi \in [0, 2\pi]$ – угловая координата на нулевом сечении (т.е. на S^1). Для каждой точки $\{\phi, x+iy\}$ из $S^1 \times \mathbf{C}^1 \subset S^3$ ее образ при отображении α_1 есть

$$\alpha_1(\{\phi, x+iy\}) = \{(x-iy)e^{i\phi}\} \in \mathbf{C}^1.$$

Отображение α_1 в координатах $(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^1 \times \mathbf{C}^1$, $|z_1| = 1$, выражается по формуле

$$\alpha_1(z_1, z_2) = \bar{z}_2 z_1,$$

которая показывает, что отображение α_1 гомотопно проекции в расслоении Хопфа.

Следовательно, соответствующий отображению (2.1) элемент из $\pi_S^0(S^{1+})$ есть $-1+u$, где u – образующая группы $\pi_1^S \cong Z_2$.

Теперь мы перейдем к формулировке свойства локализации, которое сначала будет доказано для гладких многообразий, т.е. в случае расслоений, база которых есть точка.

Нам потребуется понятие касательного векторного поля Морса-Ботта (см. [36]), частным случаем которого являются морсовские векторные поля.

Определение 2.1. Касательное векторное поле на гладком многообразии F называется *полем Морса-Ботта*, если выполняются следующие два условия:

1) нули векторного поля образуют конечный набор связных компактных замкнутых подмногообразий в F;

2) в точках подмногообразия нулей ядро матрицы Якоби векторного поля совпадает с касательным пространством к подмногообразию нулей.

Рассмотрим компоненту связности F_l нулей векторного поля Морса-Ботта. Обозначим через ν_l нормальное расслоение вложения $F_l \subset F$. Отметим, что пространство расслоения ν_l может быть отождествлено посредством экспоненциального отображения с трубчатой окрестностью подмногообразия F_l в F [33]. Ограничение векторного поля Морса-Ботта на нормальную трубку задает векторное поле на пространстве ν_l. В силу условия 2) последнее векторное поле обязано иметь всюду ненулевую проекцию на касательное пространство вдоль слоев расслоения ν_l в достаточно малой окрестности нулевого сечения. Поэтому, без ограничения общности можно считать, что построенное на пространстве ν_l векторное поле всюду является касательным вдоль слоев расслоения ν_l. Обозначим это векторное поле через s_l

$$s_l : \nu_l \to \hat{\tau}(\nu_l),$$

где $\hat{\tau}(\nu_l)$ – касательное расслоение вдоль слоев. Пусть p - проекция в расслоении ν_l, тогда $\hat{\tau}(\nu_l) \cong p^*\nu_l$ (см., например, [32]). Таким образом, векторное поле s_l позволяет нам построить отображение

$$\psi_l^s : \nu_l \to \nu_l$$

по правилу

$$\psi_l^s(v) = \hat{p}s(v),$$

где $\hat{p}$ – отображение расслоений $\hat{p} : p^*\nu_l \to \nu_l$.

Рассмотрим гладкое компактное замкнутое многообразие F и некоторое векторное поле Морса-Ботта s на нем. Пусть $F_1, ..., F_m$ – набор связных компактных замкнутых подмногообразий нулей поля s на F. Фиксируем вложение многообразия F в n-мерное евклидово пространство:

$$F_1, ..., F_m \subset F \subset R^n.$$

Сопоставим при помощи векторного поля s каждому подмногообразию F_l отображение

$$j_l : S^n \wedge F_l^+ \to S^n \wedge F_l^+$$

следующим образом. Вложение подмногообразий $F_l \subset F \subset R^n$ индуцирует разложение тривиального n-мерного векторного расслоения над F_l в прямую сумму касательного расслоения τ_l к F_l, нормального расслоения ν_l вложения $F_l \subset F$ и ограничения на F_l нормального расслоения ν вложения $F \subset R^n$. Поле s задает отображение $\psi_l^s : \nu_l \to \nu_l$. Определим отображение j_l на подрасслоениях ν и τ_l тождественным, а на ν_l равным ψ_l^s.

Как и выше, обозначим через π проекцию $S^n \wedge F_l^+ \to S^n$ на первый сомножитель.

Определение 2.2. Элемент $\{\pi \circ j_l\} \in \pi_S^0(F_l^+)$ будем называть *индексом* $Ind_s(F_l)$ *векторного поля* s в окрестности подмногообразия нулей F_l.

Замечание 2.1. Индекс изолированного нуля векторного поля совпадает с $\epsilon(Ind_s(pt))$ и равен обычному индексу изолированного нуля [33].

Пример 2.2. Используя пример 2.1, покажем, что индекс $Ind_s(F_l) \in \pi_s^0(F_l^+)$ может иметь ненулевую компоненту в $\mathrm{Ker}(\epsilon)$.

Определим действие группы положительных чисел R_+ на RP^2 по формуле:

$$t \circ (x_1 : x_2 : x_3) = (x_1 : x_2 : t^{-1}x_3).$$

Дифференциал этого действия при $t = 1$ задает касательное векторное поле s на RP^2. Нулями s будут неподвижные точки действия, т.е.

$$RP^1 = \{(x_1 : x_2 : 0)\} \subset RP^2$$

и точка $(0 : 0 : 1) \in RP^2$. Нормальное расслоение вложения $RP^1 \subset RP^2$ можно отождествить с нетривиальным одномерным вещественным векторным расслоением ξ_1 над S^1. В окрестности $RP^1 = S^1 \subset RP^2$ векторное поле s задается формулой $s(v) = -v$, $v \in \xi_1 \approx N(S^1) \subset RP^2$. В силу примера 3.1 индекс $Ind_s(RP^1)$ равен $-1 + u$, где u - образующая группы $\pi_1^S \cong Z_2$.

Пусть отображение τ_l есть трансфер многообразия F_l. Обозначим через i вложение пространства Тома тривиального n-мерного векторного расслоения над $F_1 \cup \ldots \cup F_m$ в пространство Тома тривиального n-мерного векторного расслоения над F, соответствующее вложению

$$F_1 \cup \ldots \cup F_m \subset F.$$

Теорема 2.1(свойство локализации). *Трансфер τ многобразия F гомотопен композиции*

$$i \circ (j_1 \circ \tau_1 \vee \ldots \vee j_m \circ \tau_m) \circ g,$$

где g – отображение, переводящее сферу S^n в букет m сфер.

Доказательство. Вложение пространства Тома

$$\alpha : T\nu(F) \to T(\nu(F) \oplus \tau(F)),$$

использованное нами при определении трансфера, можно заменить на гомотопное, воспользовавшись наличием касательного векторного поля. Именно, рассмотрим однопараметрическое семейство отображений

$$\alpha_t(v) = \alpha(v) \oplus ts(\pi(v)), v \in \nu(F),$$

где π – проекция в расслоении $\nu(F)$. Выбирая достаточно большой параметр t, мы получим гомотопное α отображение, которое переводит внешности малых окрестностей нулей поля s в отмеченную точку пространства

$T(\nu(F)\oplus\tau(F))$. Это означает, что отображение τ может быть пропущено через отображение g и букет отображений, переводящих S^n в $T\nu(F_l)$, $l=1,...,m$.

Для того чтобы описать устройство отображения τ в окрестности нулей поля s, нам будет удобно заменить отображение α на гомотопное, используя каноническое отождествление трубчатых окрестностей подмногообразий F_l и нормальных расслоений вложений $F_l\subset F$, $l=1,...m$.

Обозначим через exp_l экспоненциальное отображение, которое задает диффеоморфизм расслоения на единичные диски, ассоциированного с нормальным расслоением ν_l вложения $F_l\subset F$, и трубчатой окрестности $N(F_l)\subset F$ подмногообразия F_l в F, $l=1,...,m$. Для каждого $l=1,...,m$, определим две функции

$$\lambda_l,\mu_l : D^{k_l}\to\mathbf{R}^{k_l},$$

где D^s обозначает единичный диск размерности s, $k_l=\mathrm{codim}F_l$, полагая

$$\lambda_l(v)=\begin{cases}|v|,|v|\leqslant 1/2,\\ 1-|v|,|v|>1/2\end{cases}$$

и

$$\mu_l(v)=\begin{cases}0,|v|\leqslant 1/2,\\ 2|v|-1,|v|>1/2.\end{cases}$$

Рассмотрим отображение

$$\tilde\alpha : F\to\tau(F),$$

$$\tilde\alpha(x)=\begin{cases}\alpha(x),x\notin N(F_l),\\ \{exp(\mu_l(exp_l^{-1}(x))exp_l^{-1}(x)),\lambda_l(exp_l^{-1}(x))exp_l^{-1}(x)\},x\in N(F_l),\end{cases}$$
$$l=1,...,m.$$

Поскольку λ_l гомотопно нулевому отображению и $\mu_l(exp_l^{-1}(x))exp_l^{-1}(x)$ гомотопно отображению $\exp^{-1}(x)$, то отображение $\tilde\alpha$ гомотопно вложению на нулевое сечение $F\to\tau(F)$.

Заметим, что

$$\nu(F)|_{N(F_l)}\cong\psi_l(1)^*\nu(F)|_{F_l},$$

где $\psi_l(t)$ – ретракция нормальной t-трубки $N_t(F_l)$ на F_l. Следовательно, отображение α гомотопно отображению

$$\beta(v)=\begin{cases}v,\pi(v)\notin N(F_l),\\ \psi_l(|\pi\alpha(\pi(v))|)^*(v),\pi(v)\in N(F_l),\end{cases}$$

$$l = 1, ..., m.$$

Отметим, что построенное отображение есть результат малого шевеления вложения

$$T\nu(F) \to T(\nu(F) \oplus \tau(F)),$$

при котором слои трубчатых окрестностей подмногообразий F_l переходят в слои нормальных расслоений вложений $F_l \subset F$, соответствующих им при экспоненциальном отображении.

Построим отображение

$$\tau(t) = (\beta(v) \oplus t\tilde{\alpha}_*(s(\pi(v)))),$$

где $v \in T\nu(F)$, $t \in [0;\infty)$, и устремим t к ∞. Мы получим отображение $\tau(\infty)$, которое переводит в бесконечность точки расслоения $\nu(F)$, лежащие в слоях над внешностью трубчатых окрестностей подмногообразий F_l.

Слой трубчатой окрестности подмногообразия F_l в F под действием $\tau(\infty)$ отобразится на слой подрасслоения ν_l (см. выше). При больших t можно пренебречь первым слагаемым в сумме

$$\beta(v) \oplus t\tilde{\alpha}_*(s(\pi(v))).$$

Поэтому ограничение отображения $\tau(\infty)$ на слой трубчатой окрестности подмногообразия F_l в F совпадает с отображением ψ_l^s (см. выше). Для завершения доказательства остается заметить, что образ отображения $\tau(\infty)$ совпадает с образом отображения i.

Замечание 2.2. Требования, налагаемые на векторные поля в формулировке свойства локализации, можно ослабить. Достаточно потребовать, чтобы векторное поле было гомотопно полю Морса-Ботта в классе векторных полей с фиксированным множеством нулей.

Замечание 2.3. Нетрудно проверить, что если векторное поле s на границе трубчатой окрестности подмногообразия нулей F_l гомотопно полю внешних нормалей, то соответствующее этому подмногообразию отображение j_l гомотопно тождественному отображению [17]. Эта ситуация выполняется, в частности, всегда, когда векторное поле на многообразии задается действием окружности на этом многообразии [8].

Замечание 2.4. Непосредственно из доказательства теоремы 2.1 вытекает, что если касательное векторное поле на многообразии не имеет нулей, то трансфер этого многообразия гомотопен отображению в точку.

Свойство локализации и замечание 2.1 позволяют сразу получить следующее обобщение теоремы Пуанкаре-Хопфа (ср. [43]).

Теорема 2.2. *Пусть F – гладкое компактное замкнутое многообразие. Пусть на нем задано касательное векторное поле Морса-Ботта s. Предположим, что нули векторного поля s образуют конечный набор связных компактных замкнутых подмногообразий $F_1, ..., F_m$ многообразия F. Тогда*

$$\chi(F) = \sum_{l=1}^{m} \epsilon(Ind_s(F_l)) \cdot \chi(F_l),$$

где $\chi(F)$ – эйлерова характеристика многообразия F.

Доказательство. Мы будем использовать обозначения теоремы 2.1. Сначала рассмотрим произвольное касательное векторное поле на F с изолированными невырожденными нулями. Применим свойство локализации к этому полю, получим

$$I(F) = \{\pi \circ \tau\} = \sum_{k=1}^{N} \{\pi \circ j_k\} = \sum_{k=1}^{N} \epsilon(Ind_s(z_k)),$$

где z_k – нули векторного поля, $k = 1, ..., N$. В силу замечания 2.1 это означает, что $I(F) = \chi(F)$ – эйлерова характеристика многообразия F.

Применяя свойство локализации к полю s, получим

$$\chi(F) = I(F) = \{\pi \circ \tau\} = \sum_{l=1}^{m} \{\pi \circ j_l \circ \tau_l\} = \sum_{l=1}^{m} \tau(p_l)^* \{\pi \circ j_l\} =$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \epsilon(Ind_s(F_l)) \cdot I(F_l) = \sum_{l=1}^{m} \epsilon(Ind_s(F_l)) \cdot \chi(F_l).$$

1.3. Эквивариантные векторные поля и трансфер Беккера-Готтлиба

В этом пункте мы обобщим свойство локализации трансфера на случай произвольных расслоений с гладким слоем. Известные результаты из [14, 24] являются частными случаями нашего результата. В связи с этим мы показываем, как эти результаты могут быть получены в терминах введенного выше индекса векторного поля.

Рассмотрим гладкое главное G-расслоение $(\mathcal{E}, G, B, p)$, база которого - компактное связное многообразие, а G – компактная группа Ли. Пусть F - компактное замкнутое связное многообразие с гладким действием группы G. Предположим, что на многообразии F задано касательное векторное поле Морса-Ботта s, инвариантное относительно действия группы G. Нули векторного поля s представляют собой объединение неприводимых инвариантных подмногообразий многообразия F. Обозначим их через $F_1, ..., F_m$. Заметим, что из неприводимости следует связность гладких многообразий

$$E_l = \mathcal{E} \times_G F_l.$$

Всякое инвариантное относительно G касательное векторное поле Морса-Ботта s на F позволяет нам построить векторное поле на $E = \mathcal{E} \times_G F$, которое будет касательным вдоль слоев расслоения E. Будем обозначать его также через s. Имеем

$$s : E \to \tau_F(E) = \mathcal{E} \times_G \tau(F).$$

Более того, векторное поле s на E также является полем Морса-Ботта. Нули поля s на E представляют собой подрасслоения $E_l = \mathcal{E} \times_G F_l$, $l = 1, ..., m$, расслоения E. Фиксируем вложение расслоения E в R^n. Точно так же, как и в предыдущем пункте, векторное поле s определяет отображения

$$j_l : S^n \wedge E_l^+ \to S^n \wedge E_l^+.$$

Обозначим через $\tau(p_l)$ трансфер расслоения E_l. Пусть $\hat{g}$ - отображение, переводящее $S^n \wedge B^+$ в букет из m пространств $S^n \wedge B^+$, индуцированное отображением $g : S^n \to \vee_m S^n$.

Теорема 3.1. *Трансфер $\tau(p)$ расслоения E гомотопически разлагается в композицию отображений*

$$\tau(p) \sim i \circ (j_1 \circ \tau(p_1) \vee ... \vee j_l \circ \tau(p_l)) \circ \hat{g},$$

где i – вложение пространства Тома тривиального n-мерного векторного расслоения над $E_1 \bigcup ... \bigcup E_m$ в пространство Тома тривиального n-мерного векторного расслоения над E.

Доказательство. Все гомотопии проделанные при доказательстве теоремы 2.1 эквивариантны относительно действия структурной группы на слое. Поскольку векторное поле s инвариантно относительно действия группы G на F, имеет место эквивариантный аналог теоремы 2.1, который и представляет собой формулировка теоремы 3.1.

Замечание 3.1. Требования, налагаемые на базу расслоения E, можно ослабить. Достаточно потребовать, чтобы база была клеточным комплексом. При этом снова достаточно провести доказательство для слоя расслоения, а затем воспользоваться его эквивариантностью относительно действия структурной группы расслоения. Заметим также, что для бесконечного клеточного комплекса гомотопическая эквивалентность понимается как эквивалентность стабильных классов отображений.

Пусть $h^*(\cdot)$ – мультипликативная теория когомологий с единицей. Обозначим через $(Ind_s(E_l))_h$ образ $Ind_s(E_l)$ при естественном преобразовании теорий когомологий $\mu_h : \pi_S^* \to h^*$.

Теорема 3.2. *В описанных выше условиях имеет место соотношение:*

$$\tau(p)^* a = \sum_{i=1}^{m} \tau(p_l)^*((Ind_s(E_l))_h \cdot i_l^* a),$$

где $a \in h^*(E^+)$ *и* $i_l : E_l \subset E$ *– вложение расслоений,* $l = 1, ..., m$.

Доказательство. Заметим, что отображения j_l как элементы группы стабильно эквивалентных отображений из E_l в себя однозначно определяют гомоморфизмы j_l^* групп когомологий соответсвующих пространств. Непосредственно из определения умножения в мультипликативных теориях когомологий следует, что гомоморфизм j_l^* представляет собой умножение на $(Ind_s(E_l))_h$. Поэтому утверждение теоремы 3.2 следует из теоремы 3.1.

Теорема 3.2 позволяет получить результат работы [14] в следующем виде.

Следствие 3.1. *Для гомоморфизмов теории сингулярных когомологий имеет место равенство*

$$\tau(p)^* = \sum_{l=1}^{m} \epsilon(Ind_s(E_l)) \tau(p_l)^* i^*,$$

где $i : E_l \subset E$, $l = 1, ...m$, *вложение подрасслоений нулей поля* s.

Для того, чтобы получить из теоремы 3.2 результат работы [24], мы приведем сначала необходимые нам определения.

Рассмотрим главное G-расслоение $(\mathcal{E}, G, B, p)$, где G – компактная группа Ли. Пусть G действует на гладком замкнутом компактном многообразии F.

Определение 3.1. Будем говорить, что орбиты точек $x_1, x_2 \in F$ *принадлежат одному типу*, если их стабилизаторы $N(x_1), N(x_2)$ сопряжены. Тип орбиты точки x_1 меньше типа орбиты точки x_2, если $N(x_2)$ сопряжена подгруппе группы $N(x_1)$.

Совокупность точек, принадлежащих орбитам одного и того же типа γ, образует гладкое подмногообразие F_γ в F, граница которого принадлежит орбитам меньшего типа. Рассмотрим фактор-пространство $Y = F/G$. Замыкание множества $Y_\gamma = F_\gamma/G \subset Y$ является гладким многообразием с углами и его граница лежит в $\bigcup_{\gamma'<\gamma} Y_{\gamma'}$ [40].

Теорема 3.3.([40]) *Существует симплициальное разбиение пространства Y, при котором внутренность каждого симплекса лежит в* $\mathrm{Int}(Y_\gamma)$ *для некоторого γ.*

Покажем, как с помощью теоремы 3.1 можно доказать теорему 5.14 из [24].

Теорема 3.4. *В описанных выше условиях для гомоморфизма в произвольной теории когомологий, индуцированного трансфером расслоения $\mathcal{E} \times_G F$, имеет место формула*

$$\tau(p)^* = \sum_{\sigma\subset Y} (-1)^{\dim\sigma} \tau(p_\sigma)^*,$$

где $\tau(p_\sigma)$ – трансфер расслоения $\mathcal{E} \times_G (G/N(x_\sigma))$, x_σ – произвольный прообраз барицентра симплекса $\sigma \subset Y$ в построенном в теореме 3.3 симплициальном разбиении.

Доказательство. Построим на многообразии F каноническое касательное векторное поле Морса-Ботта. Для этого сначала построим морсовское векторное поле на каждом n-мерном остове $\mathrm{sk}^n Y$ в симплициальном разбиении пространства Y. Построение проведем индукцией по размерности остова. Положим нулями поля s все вершины симплексов симплициального разбиения. На $\mathrm{sk}^1 Y$ определим векторное поле s отталкивающимся из $\mathrm{sk}^0 Y$ и притягивающимся в барицентры одномерных симплексов. Предположим, что мы построили векторное поле на $\mathrm{sk}^n Y$. Продолжим его до поля на $\mathrm{sk}^{n+1} Y$, полагая барицентры $(n+1)$-мерных симплексов притягивающими нулями поля s. Это завершает шаг индукции, а вместе с ним и построение поля. Таким образом, мы построили морсовское векторное поле на каждом остове $\mathrm{sk}^n Y$, нули которого суть все барицентры симплексов. Индекс нуля в барицентре симплекса размерности n равен $(-1)^n$. Отображение $g : F \to F/G = Y$ для каждого симплекса $\sigma \subset Y$ индуцирует тривиальное расслоение $g : g^{-1}(\mathrm{Int}(\sigma)) \to \mathrm{Int}(\sigma)$. Фиксируем инвариантную относительно G риманову метрику на многообразии F. Каноническое расщепление касательного расслоения

$$\tau(g^{-1}(\mathrm{Int}(\sigma))) = g^*\tau(\mathrm{Int}(\sigma)) \oplus \mathrm{Ker} g_*$$

позволяет поднять векторное поле s на многообразие $g^{-1}(\mathrm{Int}(\sigma))$. Это поднятие будет согласованным для различных симплексов, поскольку

$$\partial g^{-1}(\sigma) = g^{-1}(\partial\sigma).$$

Обозначим поднятие поля s на все F через $\hat{s}$. Векторное поле $\hat{s}$ есть векторное поле Морса-Ботта на F, инвариантное относительно действия G на F. Нулями векторного поля $\hat{s}$ будут подмногообразия $G/N(x_\sigma)$. Заметим, что

$$\mathcal{E} \times_G g^{-1}(\sigma) \cong (\mathcal{E} \times_G G/N(x_\sigma)) \times \sigma.$$

Это означает, что нормальное расслоение вложения

$$(\mathcal{E} \times_G G/N(x_\sigma)) \subset \mathcal{E} \times_G F$$

есть тривиальное расслоение. Поэтому $Ind_{\hat{s}}(G/N(x_\sigma)) = (-1)^n$, где n – размерность симплекса σ. Отсюда вытекает утверждение теоремы.

Пример 3.1(ср. с [23]). Рассмотрим расслоение бутылки Клейна KL над окружностью S^1 со слоем S^1

$$p : KL \xrightarrow{S^1} S^1.$$

Индекс $I(p)$ построенного расслоения равен образующей группы

$$Z_2 \cong \pi_1^S \subset \pi_S^0(S^{1+}).$$

Доказательство. Пусть ξ_1 – нетривиальное одномерное вещественное векторное расслоение над S^1. Тогда расслоение $p : KL \to S^1$ изоморфно расслоению $p : RP(\xi_1 \oplus 1) \to S^1$. Структурная группа этого расслоения действует на слое S^1 отражениями относительно фиксированной прямой. Неподвижные точки действия соответствуют двум подрасслоениям $RP(\xi_1)$ и $RP(1)$ в расслоении $RP(\xi_1 \oplus 1)$. Нормальные расслоения вложений $RP(\xi_1)$, $RP(1) \subset RP(\xi_1 \oplus 1)$ изоморфны расслоению $\xi_1 \otimes 1 \cong \xi_1$. Построим векторное поле на S^1, инвариантное относительно действия структурной группы расслоения $RP(\xi_1 \oplus 1)$. Нулями этого поля будут неподвижные точки действия. Поле будет выталкивающим в одном нуле и притягивающим в другом. Кроме того, поле будет симметрично относительно прямой, проходящей через неподвижные точки действия. Это поле определяет послойное векторное поле Морса-Ботта s на $RP(\xi_1 \oplus 1)$. Нулями этого поля будут подрасслоения $RP(\xi_1)$ и $RP(1)$, пространства которых есть сечения расслоения $RP(\xi_1 \oplus 1)$, т.е. S^1. Свойство локализации (теорема 3.1), примененное к векторному полю s дает

$$I(p) = Ind_s(RP(\xi_1)) + Ind_s(RP(1)).$$

Выталкивающий ноль поля s имеет индекс, равный 1. Притягивающий ноль имеет индекс, как в примере 2.2, т.е. $-1 + u$, где u – образующая группы π_1^S. Следовательно, $I(p) = u$.

Глава 2.

Характеристические классы в кобордизмах

2.1. Векторные поля Морса-Ботта на грассманизациях разложимых векторных расслоений

В этом пункте мы построим послойное векторное поле Морса-Ботта на грассманизации разложимого векторного расслоения и явно вычислим его индексы. Свойства этого векторного поля играют важную роль при доказательстве формул сложения для характеристических классов Понтрягина.

Пусть $\eta \to B$ – n-мерное вещественное векторное расслоение, и $RG_k^n(\eta)$ – ассоциированное с ним расслоение со слоем RG_k^n - многообразие Грассмана k-мерных подпространств n-мерного вещественного векторного пространства.

Пусть ξ, ζ – вещественные векторные расслоения над B размерности n_1, n_2 соответственно $(n_1 + n_2 = n)$. Зададим действие группы положительных вещественных чисел R_+ на $\xi \times \zeta$ по формуле: $t \circ (v, u) = (v, tu)$. Это действие канонически переносится на грассманизацию $RG_k^n(\xi \times \zeta)$. Определим векторное поле s:

$$s(z) = \frac{d}{dt}|_{t=1} t \circ z,$$

где $z \in RG_k^n(\xi \times \zeta)$, и покажем, что оно является полем Морса-Ботта. Для этого достаточно проверить, что на типичном слое $RG_k^n(R^{n_1} \times R^{n_2})$ расслоения $RG_k^n(\xi \times \zeta)$ это поле есть поле Морса-Ботта.

Нули ограничения векторного поля s на $RG_k^n(R^{n_1} \times R^{n_2})$ суть неподвижные точки действия R_+ на этом слое, т.е. объединение многообразий $RG_{k_1}^{n_1}(R^{n_1}) \times RG_{k_2}^{n_2}(R^{n_2})$, $k_1 + k_2 = k$ (см. [16]).

В окрестности точки $z_0 \in RG_{k_1}^{n_1}(R^{n_1}) \times RG_{k_2}^{n_2}(R^{n_2}) \subset RG_k^n(R^{n_1} \times R^{n_2})$ можно ввести систему координат:

$$A(z) = \pi_z^{\perp} \circ \pi_z^{-1},$$

где $A(z)$ – матрица размера $(n-k) \times k$, π_z – ортогональная проекция плоскости z на плоскость z_0, $\pi_z^{\perp}$ – ортогональная проекция плоскости z на ортогональное дополнение к z_0 (окрестность точки z_0 состоит из всех точек z, для которых π_z – изоморфизм). Поскольку плоскость z_0 есть прямая сумма плоскостей $x_0 \in RG_{k_1}^{n_1}(R^{n_1})$ и $y_0 \in RG_{k_2}^{n_2}(R^{n_2})$, то матрица $A(z)$ естественным образом разбивается на блоки:

$$A(z) = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix},$$

где D_1 – матрица размера $(n_1 - k_1) \times k_1$, D_2 – размера $(n_1 - k_1) \times k_2$, D_3 – размера $(n_2 - k_2) \times k_1$, D_4 – размера $(n_2 - k_2) \times k_2$. Точки подмногообразия $RG_{k_1}^{n_1}(R^{n_1}) \times RG_{k_2}^{n_2}(R^{n_2})$ в этой окрестности выделяются уравнениями $D_2 = D_3 = 0$, а точки слоя трубчатой окрестности этого же подмногообразия над точкой z_0 выделяются уравнениями $D_1 = D_4 = 0$. В этой окрестности точки z_0 группа R_+ действует следующим образом:

$$t \circ \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & D_2/t \\ tD_3 & D_4 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Отсюда вытекает, что построенное векторное поле является полем Морса-Ботта.

Опишем поведение векторного поля s на всем пространстве $RG_k^n(\xi \times \zeta)$. Пусть $\mathcal{E}$ – главное $O(n)$-расслоение, ассоциированное с векторным расслоением $\xi \times \zeta$ над B. Нулями поля s будут подрасслоения $RG_{k_1}^{n_1}(\xi) \times RG_{k_2}^{n_2}(\zeta)$, $k_1 + k_2 = k$. Касательным расслоением вдоль слоев расслоения $RG_k^n(\xi \times \zeta)$ является векторное расслоение

$$\mathcal{E} \times_{O(n)} \tau(RG_k^n).$$

Пусть $\nu(RG_{k_1}^{n_1} \times RG_{k_2}^{n_2})$ – нормальное расслоение вложения $RG_{k_1}^{n_1} \times RG_{k_2}^{n_2} \subset RG_k^n$. Оно изоморфно прямой сумме векторных расслоений $\xi_{n_1-k_1} \otimes \xi_{k_2}$ и $\xi_{k_1} \otimes \xi_{n_2-k_2}$, где через ξ_k мы обозначаем k-мерное тавтологическое векторное расслоение над RG_k^n, ξ_{n-k} - $(n-k)$-мерное векторное расслоение над

$RG^{n_2}_{k_2}$, дополнительное к ξ (отметим, что расслоение ξ_{n-k} изоморфно $(n-k)$-мерному тавтологическому векторному расслоению над RG^n_{n-k}). Поэтому нормальное расслоение вложения

$$RG^{n_1}_{k_1}(\xi) \times RG^{n_2}_{k_2}(\zeta) \subset RG^n_k(\xi \times \zeta)$$

есть расслоение

$$\nu = \mathcal{E} \times_{O(n)} \nu(RG^{n_1}_{k_1} \times RG^{n_2}_{k_2}),$$

и

$$\nu \cong \pi_1^*\xi(k_1) \otimes \pi_2^*\zeta(n_2 - k_2) \oplus \pi_1^*\xi(n_1 - k_1) \otimes \pi_2^*\zeta(k_2),$$

где через $\xi(k)$ мы обозначаем k-мерное тавтологическое векторное расслоение над $RG^n_k(\xi)$ (соответственно, $\xi(n-k)$ – $(n-k)$-мерное тавтологическое векторное расслоение над $RG^n_{n-k}(\xi) \cong RG^n_k(\xi)$), π_1, π_2 – проекции на первый и второй множитель в произведении $RG^{n_1}_{k_1}(\xi) \times RG^{n_2}_{k_2}(\zeta)$.

Лемма 1.1. *Векторное поле s сопоставляет подрасслоению $RG^{n_1}_{k_1}(\xi) \times RG^{n_2}_{k_2}(\zeta)$ отображение (см. пункт 2 главы 1)*

$$\psi^s_{k_1k_2} : \nu \to \nu$$

по формуле

$$\psi^s_{k_1k_2}(u, v) = (u, -v),$$

где $u \in \pi_1^*\xi(k_1) \otimes \pi_2^*\zeta(n_2 - k_2)$, $v \in \pi_1^*\xi(n_1 - k_1) \otimes \pi_2^*\zeta(k_2)$.

Доказательство. Достаточно проверить это утверждение на каждом слое расслоения $RG^{n_1}_{k_1}(\xi)\times RG^{n_2}_{k_2}(\zeta)$. На каждом слое этого расслоения в силу (1.1) ограничение $\psi^s_{k_1k_2}$ на слой есть симметрия относительно подрасслоения $\xi_{k_1} \otimes \xi_{n_2-k_2}$. Отсюда вытекает утверждение леммы.

В предыдущих обозначениях:

Следствие 1.1. *В случае $k_2 = 0$ индекс векторного поля s на подрасслоении нулей $RG^n_k(\xi) \times B$ равен 1.*

Доказательство очевидно.

Следствие 1.2. *Квадрат индекса $Ind_s((RG^{n_1}_{k_1}(\xi) \times RG^{n_2}_{k_2}(\zeta))$ нуля векторного поля s равен 1 для любых k_1 и k_2, где $k_1 + k_2 = k$.*

Доказательство. Заметим, что $(\psi^s_{k_1k_2})^2 = id$ для всех k_1 и k_2, где $k_1+k_2 = k$. Поэтому утверждение следствия вытекает из определения умножения в кольце $\pi^0_S(\cdot)$ через композицию отображений.

Следствие 1.3.

$$\epsilon(Ind_s(RG^{n_1}_{k_1}(\xi) \times RG^{n_2}_{k_2}(\zeta))) = (-1)^{(n_1-k_1)k_2}.$$

Доказательство очевидно.

В заключении этого пункта мы проведем вычисление индекса нуля векторного поля s в случае, когда соответствующее ему отображение ψ^s есть симметрия относительно некоторого подрасслоения. В качестве следствия мы получим явное выражение для индексов нулей поля s, построенного в этом пункте.

В [15] рассмотрена теория кобордизмов $CO^*(\cdot)$, построенная по многообразиям, в стабильном касательном расслоении которых фиксирована структура комплексификации вещественного векторного расслоения. Любое расслоение вида $C \otimes \xi$ ориентируемо в этой теории, т.е. обладает классом Тома. Для n-мерного векторного расслоения ξ канонический класс Тома расслоения $C \otimes \xi$ в этой теории определяется при помощи классифицирующего отображения

$$u(\xi) : T(C \otimes \xi) \to T(C \otimes \xi_n),$$

где ξ_n – n-мерное тавтологическое векторное расслоение над $BO(n)$. Обозначим через $\bar{u}(\xi)$ другой класс Тома расслоения $C \otimes \xi$ в этой теории, задаваемый при помощи отображения

$$\bar{u}(\xi) : T(C \otimes \xi) = T(\xi \oplus \xi) \xrightarrow{(1,-1)} T(\xi \oplus \xi) = T(C \otimes \xi) \xrightarrow{u(\xi)} T(C \otimes \xi_n).$$

Пусть ξ – вещественное векторное расслоение над конечным клеточным комплексом B, и $\xi^\perp$ – ортогональное дополнение к нему. Построим отображение

$$\rho(\xi) : T(\xi \oplus \xi^\perp) \xrightarrow{(-1,1)} T(\xi \oplus \xi^\perp).$$

Обозначим через σ_m изоморфизм надстройки $CO^*(B^+) \to CO^{*+m}(S^m \wedge B^+)$.

Теорема 1.1. *Для вещественного векторного расслоения ξ в кольце $CO^*(B^+)$ имеет место формула*

$$\sigma_k^{-1} \rho(\xi)^* \sigma_k(1) = u(\xi)^{-1} \bar{u}(\xi), \tag{1.2}$$

где через u^{-1} мы обозначаем обратное отображение к изоморфизму Тома в теории $CO^*(\cdot)$, индуцированного классом Тома u, здесь $k = \dim(\xi \oplus \xi^\perp)$.

Доказательство. Заметим, что отображение $\Sigma^k(\rho(\xi))$ гомотопно отображению

$$T(\xi \oplus \xi \oplus \xi^\perp \oplus \xi^\perp) \xrightarrow{(1,-1,1,1)} T(\xi \oplus \xi \oplus \xi^\perp \oplus \xi^\perp).$$

Поэтому утверждение теоремы немедленно следует из мультипликативности класса Тома.

Элемент (1.2) кольца $CO^*(B^+)$ мы будем в дальнейшем обозначать через $\gamma(\xi)$.

Пусть F_l – связная компонента многообразия нулей поля Морса-Ботта s на многообразии F, и соответствующее отображение ψ_l^s есть симметрия относительно некоторого подрасслоения. Пусть теперь ξ – подрасслоение, на котором ψ_l^s действует послойным умножением на -1.

Следствие 1.4. *Имеет место формула*

$$(Ind_s(F_l))_{CO} = \gamma(\xi).$$

В частности, для векторного поля s на грассманизации разложимого векторного расслоения, построенного выше в этом пункте, выполняется равенство

$$(Ind(RG_{k_1}^{n_1}(\xi) \times RG_{k_2}^{n_2}(\zeta)))_{CO} = \gamma(\pi_1^*(\xi(n_1 - k_1)) \otimes \pi_2^*(\zeta(k_2))).$$

Рассмотрим формальную группу $f(u,v) = u + v + \sum_{i,j\geqslant 1} \alpha_{ij} u^i v^j$, где $\alpha_{ij} \in \Omega_U$, в комплексных кобордизмах [34]. Пусть $\bar{u} \in U^2(CP(\infty))$ – обратный элемент для $u \in U^2(CP(\infty))$ в этой группе, т.е. такой формальный ряд в $\Omega_U[[u]]$, что $f(u,\bar{u}) = 0$. Обозначим через $\phi(x)$ ряд, такой что $\bar{u} = u\phi(u)$, и $\phi_n(c_1,...,c_n)$ – ряд в кольце $U^*(BU(n)) \cong \Omega_U[[c_1,...,c_1]]$, задаваемый тождеством

$$\phi_n(\sigma_1(x_1,...,x_n),...,\sigma_n(x_1,...,x_n)) = \prod_{i=1}^{n} \phi(x_i),$$

где σ_i – элементарные симметрические многочлены от n-переменных.

Используя каноническое преобразование $\mu_U^{CO} : CO^*(\cdot) \to U^*(\cdot)$, непосредственно из теоремы 1.1 получаем:

Следствие 1.5. *В кольце комплексных кобордизмов $U^*(B^+)$ имеет место формула*

$$(Ind_s(F_l))_U = \gamma_U(\xi) = \phi_n(c_1(C\xi),...,c_n(C\xi)),$$

где $\gamma_U(\xi) = \mu_U^{CO}(\gamma(\xi))$.

Следствие 1.6. *Для одномерного вещественного векторного расслоения ξ в кольце комплексных кобордизмов $U^*(B^+)$ имеет место формула*

$$\gamma_U(\xi) = -1 - \sum_{i,j\geqslant 1} \alpha_{ij}(c_1(C\xi))^{i+j-1}.$$

Доказательство. Заметим, что $c_1(C\xi) = c_1(\overline{C\xi})$. Поэтому

$$f(c_1(C\xi), c_1(C\xi)) = 0.$$

Отсюда следует требуемое.

2.2. Теоремы сложения для характеристических классов Понтрягина

В этом пункте мы применим свойство локализации трансфера для изучения характеристических классов вещественных векторных расслоений, введенных в [15].

Пусть ξ – вещественное n-мерное векторное расслоение над конечным клеточным комплексом B (без ограничения общности можно считать, что B - гладкое многообразие). Для данного k, $1 \leqslant k \leqslant n$, рассмотрим грассманизацию векторного расслоения ξ , т.е. расслоение

$$(RG_k^n(\xi), RG_k^n, B, p_k).$$

Пусть $\tau(p_k)$ – трансфер этого расслоения. Обозначим через $\xi(k)$ тавтологическое векторное расслоение над $RG_k^n(\xi)$ и через f_k – классифицирующее его отображение

$$\xi(k) = f_k^* \xi_k,$$

где ξ_k – тавтологическое расслоение над $BO(k)$. Пусть

$$s_0 : BO(k) \to T(C \otimes \xi_k)$$

- вложение на нулевое сечение.

Определение 2.1. *Полуцелый класс Понтрягина* $p_{k/2}(\xi)$ в теории CO^* равен:

$$p_{k/2}(\xi) = \tau(p_k)^* f^* \chi(C \otimes \xi_k) = \tau(p_k)^* f^* [s_0], \tag{2.1}$$

где $\chi(C \otimes \zeta)$ – эйлеров класс расслоения $C \otimes \zeta$ в теории CO^* (см. [15]). Положим $p_{k/2}(\xi) = 0$ при $k > n$.

Как следует из свойства трансфера 1.1.1, формула (2.1) задает характеристические классы вещественных векторных расслоений.

Теорема 2.1. Пусть ξ и ζ – вещественные векторные расслоения ($\dim\xi = n_1$,$\dim\zeta = n_2$, $n_1 + n_2 = n$). Тогда для любого k имеет место формула

$$p_{k/2}(\xi\times\zeta) =$$

$$= \sum_{k_1+k_2=k} \tau(p_{k_1k_2})^*(\gamma(\pi_1^*\xi(n_1-k_1)\otimes\pi_2^*\zeta(k_2))\chi(C\otimes\xi(k_1))\times\chi(C\otimes\zeta(k_2))),$$

где $\tau(p_{k_1k_2})$ – трансфер расслоения $RG_{k_1}^{n_1}(\xi)\times RG_{k_2}^{n_2}(\zeta)$, π_1 и π_2 – проекции на первый и второй сомножитель в произведении $RG_{k_1}^{n_1}(\xi)\times RG_{k_2}^{n_2}(\zeta)$.

Доказательство. Применим к векторному полю s на $RG_k^n(\xi\times\zeta)$, построенному в пункте 1, свойство локализации трансфера в форме теоремы 1.3.2. В силу следствия 1.4 получаем

$$\tau(p_k)^*\chi(C\otimes\eta(k)) =$$

$$= \sum_{k_1+k_2=k} \tau(p_{k_1k_2})^*(\gamma(\pi_1^*\xi(n_1-k_1)\otimes\pi_2^*\zeta(k_2))\chi(C\otimes\xi(k_1))\times\chi(C\otimes\zeta(k_2))), \quad (2.2)$$

где через $\eta(k)$ мы обозначили k-мерное тавтологическое векторное расслоение над $RG_k^n(\xi\times\zeta)$. Остается заметить, что левая часть (2.2) по определению равна $p_{k/2}(\xi\times\zeta)$.

Покажем, как из теоремы 2.1 может быть получена формула сложения для классов Понтрягина по модулю элементов 2-примарного порядка.

Теорема 2.2. *Пусть ξ и ζ – вещественные векторные расслоения над конечной клеточной базой B ($\dim\xi = n_1, \dim\zeta = n_2, n_1 + n_2 = n$). Для любого k имеет место формула*

$$p_{k/2}(\xi\oplus\zeta) = \sum_{k_1+k_2=k} (-1)^{(n_1-k_1)k_2} p_{k_1/2}(\xi)p_{k_2/2}(\zeta)(\mathrm{mod}(2\mathrm{Tors})).$$

Доказательство. В силу функториальности классов Понтрягина, достаточно доказать утверждение теоремы для расслоения $\pi_1^*(\xi)\oplus\pi_2^*(\zeta)$ над $B\times B$, где π_1 и π_2 – проекции на первый и второй сомножитель в произведении $B\times B$. Заметим также, что

$$\pi_1^*(\xi)\oplus\pi_2^*(\zeta)\cong\xi\times\zeta.$$

Положим

$$\alpha = (Ind_s(RG_{k_1}^{n_1}(\xi)\times RG_{k_2}^{n_2}(\zeta)))_{CO}.$$

В силу следствия 1.2 $\alpha^2 = 1$. Имеем $\alpha = \pm 1 + u$, где $u \in \widetilde{CO}^0(RG^{n_1}_{k_1}(\xi) \times RG^{n_2}_{k_2}(\zeta)^+)$. Поскольку мы работаем в категории конечных клеточных комплексов, элемент u - нильпотентен. Соотношение $\alpha^2 = 1$ влечет равенство $\pm 2u + u^2 = 0$. Отсюда и из нильпотентности u заключаем, что элемент u 2-примарен, т.е. $u \in 2\mathrm{Tors}$. Поэтому $\alpha = \pm 1(\mathrm{mod}(2\mathrm{Tors}))$. В силу следствия 1.3

$$\alpha \equiv (-1)^{(n_1-k_1)k_2}(\mathrm{mod}(2\mathrm{Tors})). \tag{2.3}$$

Обозначим через $\eta(k)$ k-мерное тавтологическое векторное расслоение над $RG^n_k(\xi \times \zeta)$. Из формулы (2.2), учитывая (2.3), получаем

$$\tau(p_k)^*\chi(C \otimes \eta(k)) =$$

$$= \sum_{k_1+k_2=k} (-1)^{(n_1-k_1)k_2} \tau(p_{k_1k_2})^* \left(\chi(C \otimes \xi_{k_1}) \times \chi(C \otimes \zeta_{k_2})\right)(\mathrm{mod}(2\mathrm{Tors})). \tag{2.4}$$

Из свойства мультипликативности трансфера 1.1.2 вытекает, что

$$\tau(p_{k_1} \times p_{k_2})^*(\chi(C \otimes \xi(k_1)) \times \chi(C \otimes \zeta(k_2))) =$$

$$= \tau(p_{k_1})^*\chi(C \otimes \xi(k_1))\tau(p_{k_2})^*\chi(C \otimes \zeta(k_2)). \tag{2.5}$$

Объединяя (2.4) и (2.5), получаем требуемую формулу:

$$p_{k/2}(\xi \times \zeta) = \sum_{k_1+k_2=k} (-1)^{(n_1-k_1)k_2} p_{k_1/2}(\xi) \times p_{k_2/2}(\zeta)(\mathrm{mod}(2\mathrm{Tors})).$$

Теорема 2.3. *Полуцелые классы Понтрягина стабильны:*

$$p_{k/2}(\xi \oplus 1) = p_{k/2}(\xi) = p_{k/2}(1 \oplus \xi).$$

Доказательство. Применим свойство локализации трансфера к расслоению $RG^{n+1}_k(\xi \oplus 1)$ ($\dim \xi = n$). Используя следствие 1.1, получим, что для любого элемента $x \in CO^*(RG^{n+1}_k(\xi \oplus 1)^+)$ и некоторого элемента $\alpha \in CO^0(RG^{n+1}_k(\xi \oplus 1)^+)$ имеет место разложение

$$\tau(p)^*x = \tau(p_1)^* i_1^* x + \tau(p_2)^* \alpha i_2^* x,$$

где $\tau(p_1)$ – трансфер расслоения $(RG^n_k(\xi), RG^n_k, B, p_1)$, и $\tau(p_2)$ – трансфер расслоения $(RG^n_{k-1}(\xi), RG^n_{k-1}, B, p_2)$, остальные отображения определены в свойстве локализации.

Поскольку при вложении $RG^n_{k-1}(\xi) \subset RG^{n+1}_k(\xi \oplus 1)$ тавтологическое векторное расслоение $\xi(k)$ над $RG^{n+1}_k(\xi \oplus 1)$ переходит в сумму $\xi(k-1) \oplus 1$, где $\xi(k-1)$ – тавтологическое векторное расслоение над $RG^n_{k-1}(\xi)$, то

$$\tau(p)^*\chi(C \otimes \xi(k)) = \tau(p_1)^*\chi(C \otimes \xi(k)) + \tau(p_2)^*\alpha\chi(C \otimes (\xi(k-1) \oplus 1)) =$$

$$= \tau(p_1)^*\chi(C \otimes \xi(k)).$$

Отсюда получаем первое равенство теоремы. Для доказательства второго равенства необходимо векторное поле из пункта 1 умножить на -1 и провести аналогичные рассуждения.

Следствие 2.1. *При нечетных k полуцелый класс Понтрягина $p_{k/2}(\xi)$ 2-примарен.*

Доказательство. В силу теоремы 2.2

$$p_{k/2}(1 \oplus \xi) = (-1)^k p_{k/2}(\xi)(\mathrm{mod}(2\mathrm{Tors})),$$

а в силу теоремы 2.3

$$p_{k/2}(1 \oplus \xi) = p_{k/2}(\xi).$$

При нечетных k эти равенства совместны только, если $p_{k/2}(\xi) \in 2\mathrm{Tors}$.

Следствие 2.2. *Для любых двух вещественных векторных расслоений ξ и ζ выполняется соотношение* [15]

$$p_{2k/2}(\xi \oplus \zeta) = \sum_{k_1+k_2=k} p_{2k_1/2}(\xi) p_{2k_2/2}(\zeta)(\mathrm{mod}(2\mathrm{Tors})).$$

Теорема 2.4. *Для образа характеристических классов Понтрягина в комплексных кобордизмах существует формула, выражающая полуцелые классы Понтрягина суммы двух вещественных векторных расслоений через характеристические классы слагаемых.*

Доказательство. В силу разложения (2.2) достаточно показать, что $(Ind_s(RG^{n_1}_{k_1}(\xi) \times RG^{n_2}_{k_2}(\zeta)))_U$ может быть представлен в виде полинома от характеристических классов векторных расслоений $\xi(k_1)$ и $\zeta(k_2)$ с коэффициентами в $p_1^*(U^*(B)) \otimes p_2^*(U^*(B))$, где p_1 и p_2 – проекции в расслоениях $RG^{n_1}_{k_1}(\xi)$ и $RG^{n_2}_{k_2}(\zeta)$ соответственно. В силу леммы 1.1 и следствия 1.5 в комплексных кобордизмах имеет место равенство

$$(Ind_s(RG^{n_1}_{k_1}(\xi) \times RG^{n_2}_{k_2}(\zeta))_U = \phi_{(n_1-k_1)k_2}(c_1(\eta), ..., c_{(n_1-k_1)k_2}(\eta)),$$

где $\eta \cong C \otimes (\xi(n_1 - k_1) \otimes \zeta(k_2))$. Используя принцип расщепления для комплексных векторных расслоений и формулу для формальной группы

$$f(c_1(\eta_1), c_1(\eta_2)) = c_1(\eta_1 \otimes \eta_2),$$

получаем выражение классов $c_i(\eta)$ через характеристические классы векторных расслоений $C \otimes \xi(n_1 - k_1)$ и $C \otimes \zeta(k_2)$. Остается заметить, что $\xi(n_1 - k_1) \oplus \xi(k_1) \cong p_1^* \xi$.

Замечание 2.1. Полуцелые классы Понтрягина $p_{k/2}(\xi)$ с нечетными номерами k могут иметь любой 2-примарный порядок. Пусть, например, ξ_1 - одномерное тавтологическое векторное расслоение над RP^{2n+1}. Обозначим через $\mu_K^{CO} : CO^*(\cdot) \to K^*(\cdot)$ естественное преобразование теорий когомологий. Порядок элемента $\mu_K^{CO}(p_{1/2}(\xi_1)) \in K^*(RP^{2n+1})$ равен 2^n.

В заключении этого пункта рассмотрим более детально теорему сложения для первого полуцелого класса Понтрягина (см. [44]).

Пусть ξ и ζ – векторные расслоения над конечной клеточной базой B. Пусть $\tau(p)$ – трансфер расслоения $RP(\xi \oplus \zeta)$, $\tau(p_1)$ – трансфер расслоения $RP(\xi)$, $\tau(p_2)$ – трансфер расслоения $RP(\zeta)$. Обозначим через i_1 вложение $RP(\xi) \subset RP(\xi \oplus \zeta)$, через i_2 – вложение $RP(\zeta) \subset RP(\xi \oplus \zeta)$.

Теорема 2.5. *Для любого $x \in U^*(RP(\xi \oplus \zeta))$ имеет место формула:*

$$\tau(p)^*(x) = \tau(p_1)^* i_1^*(x) + \tau(p_2)^* \left(\gamma_U(p_2^* \xi \otimes \zeta(1)) i_2^*(x)\right).$$

Доказательство. Утверждение теоремы немедленно следует из теоремы 1.3.2 и следствий 1.1 и 1.4.

Следствие 2.3. *Для любых двух одномерных вещественных векторных расслоений ξ и ζ над конечной клеточной базой имеет место равенство*

$$p_{1/2}(\xi \oplus \zeta) = u - v - \sum_{i,j \geqslant 1} \alpha_{ij} f(u,v)^{i+j-1} v,$$

где $u = p_{1/2}(\xi), v = p_{1/2}(\zeta)$.

Доказательство. Для одномерного векторного расслоения ξ имеем $p_{1/2}(\xi) = c_1(C \otimes \xi)$. Поэтому требуемое утверждение вытекает из явного вида $\gamma_U(\xi \otimes \zeta)$ (см. следствие 1.6).

Положим $[u]_2 = ua(u)$, где $a(u) = 2 + \sum_{i,j \geqslant 1} \alpha_{ij} u^{i+j-1}$. Тогда результат следствия 2.3 можно переписать в виде

$$p_{1/2}(\xi \oplus \zeta) = u + v - a(f(u,v))v.$$

Далее введем следующие симметричные по u и v ряды:

$$\delta(u,v)=\frac{a(u)-a(v)}{u-v},$$

$$d(u,v)=\frac{va(u)-ua(v)}{u-v}.$$

Запишем ряд $\alpha(u)=1+\sum_{i\geqslant 1}\alpha_{i1}u^i$ в виде

$$\alpha(u)=\alpha_0(u^2)+u\alpha_1(u^2).$$

Теорема 2.6. *Для любых двух вещественных одномерных векторных расслоений ξ и ζ имеет место равенство:*

$$p_{1/2}(\xi\oplus\zeta)=u+v-uv[\alpha_0(uv)\delta(u,v)+\alpha_1(uv)d(u,v)],$$

где $u=p_{1/2}(\xi)$ и $v=p_{1/2}(\zeta)$.

Доказательство. Положим

$$\Phi(u,v)=1+\sum\alpha_{ij}u^i\left(\frac{v^j-\bar u^j}{v-\bar u}\right)\in\Omega_U[[u,v]],$$

где $\bar u : f(u,\bar u)=0$. Тогда

$$f(u,v)=f(u,v)-f(u,\bar u)=(v-\bar u)\Phi(u,v).$$

Имеем

$$f([u]_2,[v]_2)=[f(u,v)]_2=f(u,v)a(f(u,v));$$

Следовательно,

$$([v]_2-[\bar u]_2)\Phi([u]_2,[v]_2)=(v-\bar u)\Phi(u,v)a(f(u,v)).$$

Таким образом, в кольце $\Omega_U[[u,v]]$ имеет место тождество:

$$\Phi(u,v)a(f(u,v))v=\left([v]_2+\bar u v\frac{a(v)-a(\bar u)}{v-\bar u}\right)\Phi([u]_2,[v]_2).$$

При доказательстве теоремы 2.6 достаточно считать, что ξ и ζ - одномерные тавтологические векторные расслоения над $RP(\infty)$. Поэтому далее все вычисления мы будем проводить в фактор-кольце

$$A=\Omega_U[[u,v]]/([u]_2,[v]_2).$$

Из тождества $[u]_2 = (u-\bar{u})\Phi(u,u)$ в $\Omega_U[[u]]$ немедленно следует, что в этом фактор-кольце $u=\bar{u}$ и $v=\bar{v}$. Используя соотношения $[u]_2=0$ и $u=\bar{u}$, мы получаем следующее тождество в A:

$$\Phi(u,v)a(f(u,v))v = uv\delta(u,v),$$

из которого непосредственно следует, что в A имеет место соотношение:

$$a(f(u,v))v = a(f(u,v))u.$$

Теперь, используя приведенный выше явный вид ряда $\Phi(u,v)$ получаем, что в кольце A выполняется тождество:

$$a(f(u,v))\Phi(u,v) = a(f(u,v))\frac{\partial}{\partial v}f(u,v).$$

Лемма 2.1. *В кольце $\Omega_U[[u,v]]$ имеет место формула*

$$\frac{\partial}{\partial v}f(u,v) = \frac{CP(v)}{CP(f(u,v))},$$

где $CP(v) = \frac{dg(v)}{dv} = 1 + \sum_{n\geqslant 1}[CP(n)]v^n$ и $g(v)$ - логарифм группы $f(u,v)$.

Доказательство. В кольце $\Omega_U \otimes Q[[u,v]]$ для ряда $f(u,v)$ имеет место выражение

$$f(u,v) = g^{-1}(g(u)+g(v)).$$

Так как

$$\frac{dg^{-1}(x)}{dx}\cdot\frac{dg(g^{-1}(x))}{dg^{-1}(x)} = 1,$$

получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial v}f(u,v) = \frac{\partial g^{-1}(g(u)+g(v))}{\partial g(v)}\frac{\partial g(v)}{\partial v} = \frac{CP(v)}{CP(f(u,v))}.$$

Возвращаясь к кольцу A, получаем:

$$a(f(u,v))\frac{\partial}{\partial v}f(u,v) = a(f(u,v))\frac{CP(v)}{CP(f(u,v))} = a(f(u,v))CP(v).$$

Напомним, что

$$\frac{1}{CP(v)} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}|_{u=0} = 1 + \sum_{i\geqslant 1}\alpha_{i1}v^i = \alpha(v).$$

Следовательно,

$$uv\delta(u,v)\alpha(v) = \alpha(v)\Phi(u,v)a(f(u,v))v = a(f(u,v))v.$$

Лемма 2.2. *В кольце A имеют место соотношения:*

$$uv\delta(u,v)v = uvd(u,v),$$

$$uv\delta(u,v)v^2 = uv\delta(u,v)uv.$$

Доказательство. Первое равенство вытекает из соотношения

$$uv\frac{a(v)-a(u)}{v-u}v = uv\frac{va(v)-va(u)+ua(v)-ua(v)}{v-u} =$$

$$= uv\frac{ua(v)-va(u)+(v-u)a(v)}{v-u} = uv\frac{ua(v)-va(u)}{v-u} = uvd(u,v).$$

Второе равенство следует из соотношения $a(f(u,v))v = a(f(u,v))u$:

$$uv\delta(u,v)v^2 = \Phi(u,v)a(f(u,v))v^3 = \Phi(u,v)a(f(u,v))vuv = uv\delta(u,v).$$

Применяя соотношения из леммы 2.2, получаем

$$uv\delta(u,v)\alpha(v) = uv\delta(u,v)(\alpha_0(v^2) + v\alpha_1(v^2)) =$$

$$= uv(\alpha_0(uv)\delta(u,v) + \alpha_1(uv)\delta(u,v)v) = uv(\alpha_0(uv)\delta(u,v) + \alpha_1(uv)d(u,v)),$$

что завершает доказательство теоремы 2.6.

Эта теорема дает явный вид симметричного по u и v формального ряда

$$b(u,v) = u + v + \sum_{i,j\geqslant 1}\beta_{ij}u^iv^j$$

такого, что для любых двух одномерных вещественных векторных расслоений ξ и ζ над X имеет место формула:

$$p_{1/2}(\xi\oplus\zeta) = b(u,v) \in U^2(X),$$

где $u = p_{1/2}(\xi)$ и $v = p_{1/2}(\zeta)$.

Теорема 2.7 (формула сложения для первого полуцелого класса Понтрягина). *Для любых двух вещественных векторных расслоений ξ и ζ*

$$p_{1/2}(\xi\oplus\zeta) = u + v + \sum_{k,l\geqslant 1}\beta_{kl}s_{k-1}(u)s_{l-1}(v),$$

где $u = p_{1/2}(\xi), v = p_{1/2}(\zeta)$, s_k – *операции Ландвебера-Новикова в комплексных кобордизмах* [34].

Доказательство. Из теоремы о локализации трансфера вытекает,что

$$p_{1/2}(\xi \oplus \zeta) = p_{1/2}(\xi) + \tau(p)^*(\gamma_U(p^*(\xi) \otimes \zeta(1)) \cdot w),$$

где $\tau(p)$ – трансфер расслоения $RP(\zeta)$, $w = \chi(C \otimes \zeta(1))$. Предположим сначала, что $\dim \xi = 1$. Имеем:

$$p_{1/2}(\xi \oplus \zeta) = u + \tau(p)^*(\gamma_U(p^*\xi \otimes \zeta(1))w); \tag{2.6}$$

$$p_{1/2}(\zeta \oplus \xi) = v + \gamma_U(\zeta \otimes \xi)u, \tag{2.7}$$

где $u = p_{1/2}(\xi), v = p_{1/2}(\zeta)$.

Заметим, что в силу следствия 1.6

$$\tau(p)^*(\gamma_U(p^*\xi \otimes \zeta(1))w) = -\tau(p)^*(w + \sum_{i,j \geqslant 1} \alpha_{ij} f(p^*u, w)^{i+j-1} w) =$$

$$= \tau(p)^*(p_{1/2}(p^*\xi \oplus \zeta(1)) - p_{1/2}(p^*\xi)). \tag{2.8}$$

Операции Ландвебера-Новикова суть стабильные когомологические операции, поэтому они коммутируют с отображением $\tau(p)^*$. В силу теоремы 2.6 получаем, что выражение (2.8) равно

$$\tau(p)^*(w + \sum_{k,l \geqslant 1} \beta_{kl}(p^*u)^k w^l) = v + \sum_{k,l \geqslant 1} \beta_{kl} u^k s_{l-1}(v).$$

Приравнивая теперь (2.6) и (2.7), получаем

$$\gamma_U(\zeta \otimes \xi^*) \cdot u = u + \sum_{k,l \geqslant 1} \beta_{kl} u^l s_{k-1}(v).$$

Рассмотрим случай произвольного ξ. Имеем:

$$p_{1/2}(\xi \oplus \zeta) = u + \tau(p)^*(\gamma_U(p^*(\xi) \otimes \zeta(1)^*)w) =$$

$$= u + \tau(p)^*(w + \sum_{k,l \geqslant 1} \beta_{kl} w^l p^* s_{k-1}(u)) = u + v + \sum_{k,l \geqslant 1} \beta_{kl} s_{l-1}(v) s_{k-1}(u).$$

Это завершает доказательство.

Теорема 2.8. *Характеристический класс* $p_{1/2}$ *задает отображение*

$$p_{1/2} : KO(X) \to U^2(X),$$

на образе которого имеется ассоциативная операция сложения

$$x \oplus y = x + y + \sum_{k,l \geqslant 1} \beta_{kl} s_{l-1}(y) s_{k-1}(x).$$

2.3. Новое доказательство гипотезы Фробениуса о размерностях вещественных алгебр без делителей нуля

В этом пункте мы дадим новый способ доказательства гипотезы Фробениуса о размерностях вещественных алгебр без делителей нуля. Как промежуточный результат получен новый способ вычисления K-функтора вещественного проективного пространства. Приводимые доказательства существенно проще известных к настоящему времени.

Заметим также, что в основе нашего доказательства лежит стандартное рассуждение из [32], которое состоит в следующем. Гипотеза Фробениуса эквивалентна задаче о параллелизуемости вещественного проективного пространства (см. теорему 3.3 ниже). Если вещественное проективное пространство параллелизуемо, то все его характеристические классы – нулевые. В [32] использование характеристических классов Штифеля-Уитни позволяет доказать, что размерность искомых алгебр есть степень двойки. Замена классов Штифеля-Уитни на первый класс Чженя в K-теории позволяет получить точную оценку на размерности вещественных алгебр без делителей нуля. Реализации этой конструкции и посвящен данный параграф.

Обозначим через ξ_n^1 одномерное вещественное векторное расслоение Хопфа над RP^n, а через $\xi_n^\perp$ – его ортогональное дополнение. Пусть также η_n^1 – одномерное комплексное векторное расслоение Хопфа над CP^n.

В основе нашего способа вычисления K-функтора от RP^n лежит следующее геометрическое наблюдение. Комплексное расслоение Хопфа $\pi : S^{2n+1} \to CP^n$ со слоем S^1 пропускается через вещественное расслоение Хопфа $\pi_1 : S^{2n+1} \to RP^{2n+1}$ со слоем Z_2. При этом возникает расслоение $\pi_2 : RP^{2n+1} \to CP^n$, слоем которого также является окружность. Более того, имеет место теорема.

Теорема 3.1. *Расслоение $\pi_2 : RP^{2n+1} \to CP^n$ изоморфно сферическому расслоению тензорного квадрата расслоения η_n^1, причем $\pi_2^*\eta_n^1 \cong C \otimes \xi_{2n+1}^1$.*

Доказательство. Обозначим через η^2 тензорный квадрат расслоения η_n^1. Построим эквивариантный относительно действия группы S^1 гомеоморфизм g пространств RP^{2n+1} и $S(\eta^2)$. Заметим, что $S(\eta^2) \cong S^{2n+1} \times_\rho S^1$, где гомоморфизм $\rho : S^1 \times S^1 \to S^1$ задается по формуле $\rho(u,v) = u^2v$.

Построим отображение $g : RP^{2n+1} \to S(\eta^2)$, полагая

$$g(x_1 : x_2 : ... : x_{2n+1} : x_{2n+2}) = ((\bar{w}z_1, ..., \bar{w}z_{n+1}), w^2),$$

где $z_j = x_{2j-1} + ix_{2j}$, $j = 1, ..., n+1$, и w пробегает все комплексные значения, по модулю равные 1. Легко видеть, что построенное отображение корректно определено, взаимно однозначно, непрерывно и эквивариантно относительно действия S^1. Это завершает доказательство первой части теоремы.

Для доказательства второй части теоремы достаточно заметить, что расслоение η_n^1 может быть определено как множество отношений

$$\{(z_1 : ... : z_{n+1} : \lambda) | \lambda, z_j \in C, \sum_{j=1}^{n+1} |z_j|^2 \neq 0\}.$$

Поднятие этого расслоения на RP^{2n+1} по проекции π_2 есть множество отношений

$$\{(x_1 : x_2 : ... : x_{2n+1} : x_{2n+2} : u : v) | z_j = x_{2j-1} + ix_{2j}, \lambda = u + iv, \sum_{j=1}^{2n+2} x_j^2 \neq 0\}.$$

Последнее расслоение в точности есть расслоение $C \otimes \xi_{2n+1}^1$, что завершает доказательство теоремы 3.1.

Теорема 3.2 [3]. *Группа $K^0(RP^m, \emptyset)$ изоморфна прямой сумме $Z \oplus Z_{2[m/2]}$. Образующая циклической группы задается классом стабильной эквивалентности расслоения $C \otimes \xi_m^1$. Группа $K^1(RP^m, \emptyset)$ равна нулю при четном m и изоморфна Z при нечетном m.*

Доказательство этой теоремы опирается на следующую известную лемму [3].

Лемма 3.1. *Имеет место изоморфизм $K^0(CP^n, \emptyset) = Z[\beta]/\{\beta^{n+1} = 0\}$, где $-\bar{\beta} = [\eta_n^1] - [1]$ – класс стабильной эквивалентности одномерного комплексного векторного расслоения Хопфа η_n^1 над CP^n. Группа $K^1(CP^n, \emptyset)$ равна нулю.*

Замечание 3.1. В доказательстве леммы используется лишь изоморфизм Тома в комплексной K-теории и тот факт, что CP^n есть пространство Тома одномерного комплексного векторного расслоения Хопфа над CP^{n-1}.

Доказательство теоремы 3.2. Разберем сначала случай нечетного $m = 2n + 1$. Рассмотрим расслоение, построенное в теореме 3.1:

$\pi_2 : RP^{2n+1} \to CP^n$. Это есть сферическое расслоение, ассоциированное с тензорным квадратом расслоения η_n^1 над CP^n. Пусть, как и прежде, $\eta^2 \cong \eta_n^1 \otimes \eta_n^1$. Рассмотрим точную последовательность пары:

$$\begin{array}{ccccc} K^0(D\eta^2, S\eta^2) & \to & K^0(CP^n, \emptyset) & \to & K^0(RP^{2n+1}, \emptyset) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K^1(RP^{2n+1}, \emptyset) & \leftarrow & K^1(CP^n, \emptyset) & \leftarrow & K^1(D\eta^2, S\eta^2). \end{array} \qquad (*)$$

Заметим, что первый и четвертый члены этой последовательности можно заменить на $K^0(T\eta^2)$ и $K^1(T\eta^2)$ соответственно, где $T\eta^2$ - пространство Тома расслоения η^2. Кроме того, образ гомоморфизма $K^0(T\eta^2) \to K^0(CP^n, \emptyset)$ совпадает с образом сквозного гомоморфизма

$$K^0(CP^n, \emptyset) \cong K^0(T\eta^2) \to K^0(CP^n, \emptyset).$$

Последний гомоморфизм представляет собой умножение на эйлеров класс [3] расслоения η^2, т.е. на $[1] - [\bar{\eta}^2] = 2[\beta] - [\beta]^2$. Поскольку

$$K^1(T\eta^2) \cong K^1(CP^n, \emptyset) = 0,$$

то

$$K^0(RP^{2n+1}, \emptyset) \cong K^0(CP^n, \emptyset)/\{\beta^2 = 2\beta\}.$$

Отсюда вытекает, что $K^0(RP^{2n+1}, \emptyset) \cong Z \oplus Z_{2^n}$. При этом образующая подгруппы Z_{2^n} может быть задана элементом $-\pi_2^*(\beta)$. В силу теоремы 3.1 имеем $-\pi_2^*(\beta) = [C \otimes \xi_{2n+1}^1] - [1]$.

Поскольку $K^1(CP^n, \emptyset) = 0$, то из точной последовательности $(*)$ получаем

$$K^1(RP^{2n+1}, \emptyset) \cong \mathrm{Ker}[K^0(T\eta^2) \to K^0(CP^n, \emptyset)].$$

Легко видеть, что $\mathrm{Ker}[K^0(T\eta^2) \to K^0(CP^n, \emptyset)] \cong Z$.

В силу функториальности точной последовательности гомоморфизм $K^1(RP^{2n+1}, \emptyset) \to K^1(RP^{2n-1}, \emptyset)$ нулевой. Из точных последовательностей пар (RP^{2n+1}, RP^{2n}), (RP^{2n}, RP^{2n-1}) находим, что отображение $K^1(RP^{2n+1}, \emptyset) \to K^1(RP^{2n}, \emptyset)$ - эпиморфзм, тогда как отображение $K^1(RP^{2n}, \emptyset) \to K^1(RP^{2n-1}, \emptyset)$ есть мономорфизм. Следовательно, $K^1(RP^{2n}, \emptyset) = 0$. Тогда из точной последовательности пары (RP^{2n+1}, RP^{2n}) вытекает, что отображение $K^0(RP^{2n+1}, \emptyset) \to K^0(RP^{2n}, \emptyset)$ - изоморфизм. Это утверждение завершает наше доказательство.

Связующим мостиком между теоремой 3.2 и гипотезой Фробениуса является следующая теорема.

Теорема 3.3. *Предположим, что существует билинейная операция умножения* $p : R^n \times R^n \to R^n$ *без делителей нуля. Тогда расслоение* $\mathrm{Hom}(\xi^1_{n-1}, \xi^\perp_{n-1})$ *тривиально.*

Простое доказательство этой теоремы было предложено Штифелем (см., например, [32, с.44])

Теорема 3.4 [1]. *Вещественные алгебры без делителей нуля существуют только в размерностях* $1, 2, 4$ *и* 8.

Доказательство. Заметим, что

$$\mathrm{Hom}(\xi^1_{n-1}, \xi^\perp_{n-1}) \oplus 1 \cong \mathrm{Hom}(\xi^1_{n-1}, \xi^\perp_{n-1} \oplus \xi^1_{n-1}) \cong n\xi^1_{n-1}.$$

Поэтому в силу теоремы 3.3, если в размерности n искомая алгебра существует, то расслоение $n\xi^1_{n-1}$ тривиально. Следовательно, n делится на порядок элемента $[C \otimes \xi^1_{n-1}] - [1]$ в группе $K^0(RP^{n-1}, \emptyset)$. Согласно теореме 3.2 это означает, что $2^{[(n-1)/2]}$ делит n. Запишем n в виде $n = (2m+1)2^k$. Если $k = 0$, то это условие может выполняться только при $m = 0$, т.е. $n = 1$. Пусть $k > 0$. При $m > 0$ имеем $[(n-1)/2] = (2m+1)2^{k-1} - 1 > k$, и условие делимости выполняться не может. Значит, $m = 0$. Остается заметить, что $2^{k-1} \leqslant k + 1$ лишь, когда $k = 1, 2, 3$. Таким образом, $n = 1, 2, 4, 8$.

Хорошо известно, что в размерностях 1, 2, 4 и 8 вещественные алгебры без делителей нуля существуют. Можно взять, например, в размерности 1 поле вещественных чисел, в размерности 2 поле комплексных чисел, в размерности 4 тело кватернионов и в размерности 8 алгебру Кэли.

Замечание 3.2. В комплексной K-теории первый класс Чженя n-мерного комплексного векторного расслоения η равен $[n] - [\bar{\eta}]$. В рассмотренном выше примере в силу формулы Уитни для классов Чженя

$$c_1(C \otimes \tau(RP^{n-1})) = nc_1(C \otimes \xi^1_{n-1}) = n([1] - [C \otimes \xi^1_{n-1}]).$$

Если проективное пространство RP^{n-1} параллелизуемо, то $c_1(C \otimes \tau(RP^{n-1})) = 0$, т.е. порядок образующей группы $K^0(RP^{n-1})$ делит n. Упрощенная схема этого рассуждения и лежит в основе приведенного выше доказательства гипотезы Фробениуса.

2.4. Характеристические классы Понтрягина комплексных векторных расслоений

В этом пункте будут изучены характеристические классы Понтрягина комплексных векторных расслоений.

Теорема 4.1. *Пусть η – n-мерное комплексное векторное расслоение. Трансфер $\tau(p)$ расслоения $RG^{2n}_{2k+1}(\eta)$ гомотопен отображению в точку. Трансферы $\tau(p_1)$ и $\tau(p_2)$ расслоений $RG^{2n}_{2k}(\eta)$ и $CG^{n}_{k}(\eta)$ связаны соотношением:*

$$\tau(p_1) \sim i \circ \tau(p_2),$$

где $i : CG^n_k(\eta) \to RG^{2n}_{2k}(\eta)$ – каноническое вложение.

Доказательство. Рассмотрим расслоение $RG^{2n}_k(\eta) \xrightarrow{RG^{2n}_k} B$. На пространстве этого расслоения действует группа $U(1) = S^1$. Это действие индуцировано комплексной структурой в векторном расслоении η. Неподвижными точками этого действия будут такие плоскости α, что для любого вектора $v \in \alpha$ вектор iv принадлежит α. Поскольку векторы v и iv линейно независимы над полем действительных чисел, неподвижные точки возникнут только в случае, когда k четно. Применяя свойство локализации к векторному полю, соответствующему этому действию, получим, что трансфер $\tau(p)$ расслоения $RG^{2n}_{2k+1}(\eta)$ гомотопен отображению в точку (см. замечание 1.2.4). В случае четного k неподвижными точками действия будут плоскости, которые являются овеществлением $k/2$-мерных комплексных подпространств расслоения η. Применяя свойство локализации, получим, что $\tau(p_1) \sim i \circ \tau(p_2)$.

Следствие 4.1. *Если расслоение η стабильно изоморфно комплексному векторному расслоению, то*

$$p_{(2k+1)/2}(\eta) = 0.$$

Доказательство. Пусть расслоение $\eta \oplus [N]$ допускает структуру комплексного векторного расслоения, тогда

$$p_{(2k+1)/2}(\eta) = p_{(2k+1)/2}(\eta \oplus [N]) = 0.$$

Для теории комплексных самосопряженных кобордизмов $SC^*(\cdot)$ имеют место естественные преобразования теорий когомологий

$$\mu^{CO}_{SC} : CO^*(\cdot) \to SC^*(\cdot) \text{ и } \mu^{Sp}_{SC} : Sp^*(\cdot) \to SC^*(\cdot),$$

где $Sp^*(\cdot)$ – теория симплектических кобордизмов (см. [15]).

Следствие 4.2. *Если векторное расслоение η стабильно эквивалентно комплексному векторному расслоению, то образ $p_{2k/2}(\eta)$ в $SC^*(B)$ при преобразовании μ^{CO}_{Sp} лежит в $Im\mu^{Sp}_{SC}(Sp^*(B)) \subset SC^*(B)$.*

Доказательство. Поскольку классы Понтрягина стабильны, без ограничения общности можно считать, что само расслоение η допускает комплексную структуру. Пусть $\tau(p_1)$ – трансфер расслоения $RG^{2n}_{2k}(\eta)$ и $\tau(p_2)$ – трансфер расслоения $CG^n_k(\eta)$. Обозначим через $i : CG^n_k \to RG^{2n}_{2k}$ каноническое вложение. Из теоремы 4.1 получаем

$$\mu^{CO}_{SC}(p_{2k/2}(\eta)) = \mu^{CO}_{SC}\tau(p_1)^*\chi(C\otimes\xi(2k)) =$$

$$= \mu^{CO}_{SC}\tau(p_2)^* i^*\chi(C\otimes\xi(2k)) = \mu^{CO}_{SC}\tau(p_2)^*\chi(C\otimes\eta(k)) =$$
$$= \tau(p_2)^*\mu^{CO}_{SC}\chi(C\otimes\eta(k)) = \tau(p_2)^*\chi(\eta(k)\oplus\overline{\eta(k)}), \qquad (4.1)$$

где $\xi(2k)$ – $2k$-мерное тавтологическое векторное расслоение над $RG^{2n}_{2k}(\eta)$, и $\eta(k)$ – k-мерное тавтологическое векторное расслоение над $CG^n_k(\eta)$. Заметим, что для любого комплексного векторного расслоения η расслоение $\eta\oplus\bar\eta$ наделено канонической симплектической структурой. Следовательно, правая часть (4.1) лежит $Im\mu^{Sp}_{SC}(Sp^*(B))$.

Глава 3.

Исчисление Шуберта

3.1. Трансфер и гомоморфизм Гизина

В этом пункте мы докажем необходимые нам факты о связи между гомоморфизмом Гизина и трансфером Беккера-Готтлиба. Эти результаты будут использованны нами в следующем параграфе при вычислении гомоморфизма Гизина грассманизаций комплексных векторных расслоений.

Пусть $h^*(\cdot)$ – некоторая мультипликативная теория когомологий с единицей. Векторное расслоение ξ, вещественная размерность которого равна n, называется h-ориентируемым, если существует класс Тома $u_h(\xi) \in h^n(T\xi)$. Каждое h-ориентированное векторное расслоение задает изоморфизм Тома:

$$t_h : h^*(B) \cong h^{*+n}(T\xi),$$

$$t_h(x) = t_h(1) \cdot x = u_h(\xi) \cdot x.$$

Определение 1.1. *Эйлеровым классом* h-ориентированного векторного расслоения ξ называется элемент

$$\chi(\xi) = s_0^*(u_h(\xi)) \in h^n(B),$$

где $s_0 : B \to T\xi$ – вложение на нулевое сечение.

Рассмотрим расслоение (E, F, B, p) с гладким компактным замкнутым слоем F. Будем говорить, что расслоение h-ориентировано, если ориентировано расслоение $\tau_F(E)$ касательное вдоль слоев E.

Определение 1.2. Для h-ориентированного расслоения (E, F, B, p) определен *гомоморфизм Гизина*:

$$p_! : h^*(E) \cong h^{*+m}(T\nu) \xrightarrow{g} h^{*+m}(S^{n+m} \wedge B^+) \cong h^{*-n}(B),$$

где n – размерность слоя F, а g – отображение Понтрягина-Тома, соответствующее послойному вложению $i : E \subset B \times R^{n+m}$.

Сравнивая определение 1.2 с определением 1.1.2, нетрудно получить теорему

Теорема 1.1[9]. *Гомоморфизм Гизина и отображение трансфера h-ориентированного расслоения (E, F, B, p) связанны соотношением*

$$\tau(p)^*(x) = p_!(\chi(\tau_F(E)) \cdot x),$$

где x произвольный элемент из $h^*(E)$.

Доказанная в параграфе 3 главы 1 общая теорема о локализации трансфера при некоторых дополонительных предположениях позволяет получить выражение для гомоморфизма Гизина расслоения через гомоморфизмы Гизина подрасслоений нулей векторного поля касательного вдоль слоев расслоения.

Рассмотрим h-ориентированное расслоение (E, F, B, p), слой которого есть гладкое замкнутое компактное многообразие F. Предположим, что на расслоении E задано векторное поле s, касательное вдоль слоев, множество нулей которого представляет собой набор связных h-ориентированных подрасслоений (E_k, F_k, B, p_k), $k = 1, ..., m$. Пусть в кольце $h^*(B)$ существует такой элемент Δ, поднятие которого $p^*\Delta \in h^*(E)$ разлагается в произведение $\chi(\tau_F(E)) \cdot x$ для некоторого элемента $x \in h^*(E)$.

Теорема 1.2. *В описанных выше предположениях в кольце $h^*(B)$ для любого элемента $w \in h^*(E)$ имеет место равенство:*

$$\Delta p_! w = \sum_{k=1}^{m} p_{k!} \left(Ind_s(E_k) \cdot \chi(\tau_F(E_k)) \cdot x \cdot w\right).$$

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\Delta p_! w = p_! \left(p^*(\Delta) w\right) = p_! \left(\chi(\tau_F(E)) x w\right) = \tau(p)^*(xw)$$

и воспользоваться свойством локализации трансфера 1.3.2.

Предположим, что Δ не является делителем нуля в кольце комплексных кобордизмов $U^*(B)$. Как следствие теоремы 1.1 получаем:

Следствие 1.1. *Для операций Ландвебера-Новикова в комплексных кобордизмах имеет место правило коммутации*

$$s_k(p_! w) - p_!(s_k w) = -p_! \left(w \frac{s_k(\chi(\tau_F(E)))}{\chi(\tau_F(E))} \right).$$

Ниже мы будем считать, что теория когомологий $h^*(\cdot)$ – комплексно-ориентируема. Предположим, что на гладком компактном замкнутом h-ориентированном многообразии M задано действие компактной группы Ли G, сохраняющее h-ориентацию. Допустим, что на многообразии M существует инвариантное векторное поле s, нули которого представляют собой набор связных h-ориентированных подмногообразий неподвижных точек $M_1, ..., M_m$ и набор подмногообразий, на котором действие группы G свободно. Рассмотрим расслоения $p : EG \times_G M \to BG$, $p_k : EG \times_G M_k \to BG$, $k = 1, ..., m$, где $\pi : EG \to BG$ - универсальное G-расслоение. Обозначим через S множество неделителей нуля в кольце $h^*(B)$. Пусть дополнительно к предположениям теоремы 1.2 элемент $\Delta \in S$.

Следствие 1.2. *В кольце частных $h^*(B)[S^{-1}]$ для любого элемента $w \in h^*(E)$ имеет место равенство*

$$p_! w = \sum_{k}^{m} \frac{(Ind_s(EG \times_G M_k)xw)}{\chi(\nu(EG \times_G M_k))} \cap [M_k](\mathrm{mod} I(EG)),$$

где $\nu(EG \times_G M_k))$ есть нормальное расслоение вложения $EG \times_G M_k \subset EG \times_G M$, а через $\cap$ мы обозначаем операцию высечения.

Доказательство. В силу результатов [29] правая часть равенства следствия корректно определена. Домножим левую и правую части равенства на Δ. Так как Δ – неделитель нуля, то домножением мы получим эквивалентное равенство. Учитывая, что гомоморфизм Гизина расслоения $EG \times_G M_k$ совпадает ввиду тривиальности расслоения с операцией высечения, получаем

$$\Delta p_! w = \sum_{k=1}^{m} p_{k!} \left(Ind_s(EG \times_G M_k)\chi(\tau_F(EG \times_G M_k))xw\right)(\mathrm{mod} I(EG)).$$

Но полученное равенство в описанных условиях представляет собой следствие теоремы 1.2.

Замечание 1.1. Если в качестве w взять какой-нибудь характеристический класс h-ориентированных векторных расслоений, то следствие 1.2 даст выражение для соответствующего характеристического числа многообразия M через характеристические числа многообразий неподвижных точек (ср. [4, 20]).

В заключении мы приведем примеры векторных полей, удовлетворяющих условиям следствия 1.2.

Пример 1.1. Простейшим примером, для которого выполняются условия следствия 1.2, является действие тора. В этом случае искомое векторное поле задается однопараметрической подгруппой тора, порождающей плотную обмотку.

Пример 1.2. Пусть компактная группа Ли G действует полусвободно на компактном многообразии M, т. е. на дополнении к множеству неподвижных точек это действие свободно. Обозначим через M_1,...,M_k связные компоненты подмногообразий неподвижных точек действия группы G.

Теорема 1.3. *На многообразии M существует G-инвариантное векторное поле s, нули которого суть все неподвижные точки действия группы G, и набор изолированных подмногообразий нулей, на каждом из которых группа G действует свободно. Индексы нулей этого поля в неподвижных точках действия равны $+1$.*

Доказательство. Пусть $N(M_j)$, $j = 1, ..., k$, – G-инвариантные трубчатые окрестности подмногообразий M_j в многообразии M. На многообразии $M^0 = M \setminus \bigcup_{j=1}^{k} N(M_j)$ группа G действует свободно. Следовательно, M^0/G есть гладкое многообразие с краем. Построим произвольное невырожденное касательное векторное поле s на M^0/G, которое на границе $\partial M^0/G$ будет направлено во внутрь многообразия M^0/G. Поднятие этого векторного поля на многообразие M^0 по проекции $p : M^0 \to M^0/G$ может быть продолжено до касательного векторного поля на всем многообразии M. Для продолжения достаточно заметить, что $N(M_j)$ является G-деформационным ретрактом подмногообразия M_j, $j = 1, ..., k$. Пусть ϕ_t^j – соответствующая деформация. Тогда векторное поле $p^*(s)$ продолжается на каждую трубку $N(M_j)$ по формуле $\hat{s}(x, u) = |u|\phi^j_{|u|*}(p^*(s(x, u/|u|)))$. Нетрудно проверить, что построенное векторное поле удовлетворяет условиям теоремы.

Следствие 1.2(ср. с [35]). *Для полусвободного действия компактной группы Ли на компактном многообразии M имеет место тождество*

$$\chi(M) = \sum_{j=1}^{k} \chi(M_j)(\mathrm{mod}\,\chi(G)).$$

Замечание 1.2. В следующем пункте мы приведем пример построения элемента Δ, участвующего в формулировках следствий 1.1 и 1.2.

3.2. Обобщеные полиномы Шура в кобордизмах

В этом пункте мы построим специальные базисы в кольце кобордизмов многообразий комплексных флагов и в их терминах вычислим гомоморфизм Гизина для флагизаций комплексных векторных расслоений.

Зафиксируем комплексно-ориентируемую теорию когомологий $h^*(\cdot)$. Обозначим кольцо коэффициентов этой теории через $\Lambda^* = \sum \Lambda^n$, где $\Lambda^n = h^n(pt)$. Пусть $f_h(u,v)$ – формальная группа в $h^*(\cdot)$:

$$f_h(u,v) = u + v + \sum_{i,j\geqslant 1} \alpha_{ij} u^i v^j,$$

где $\alpha_{ij} \in \Lambda^{-i-j+2}$. Обозначим через $g_h(u) = u + \sum_{i>1} \beta_i u^i$, $\beta_i \in \Lambda^{-i+1}$ - логарифм формальной группы $f_h(u,v)$.

Пусть $\lambda = (\mu_1, \mu_2, ...)$ – конечная последовательность неотрицательных целых чисел.

Теорема 2.1. *Элемент кольца частных* $\Lambda^*([[x_1,...,x_n]])$

$$s^h_\lambda(x_1,...,x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \frac{\prod_{i=1}^n x_{\sigma(i)}^{\mu_i}}{\prod_{i<j} g_h^{-1}(g_h(x_{\sigma(j)}) - g_h(x_{\sigma(i)}))}$$

является формальным рядом из кольца $\Lambda^*[[x_1,...,x_n]]$, *симметричным по переменным* x_i, $i = 1,...,n$.

Доказательство. Симметричность функций $s^h_\lambda(x_1,...,x_n)$ по переменным x_i, $i = 1,...,n$ очевидна. Докажем, что эти функции являются формальными рядами. Заметим, что

$$g_h^{-1}(g_h(x_j) - g_h(x_j)) = f_h(x_j, \bar{x}_i) = f_h(x_j, \bar{x}_i) - f_h(x_i, \bar{x}_i) =$$

$$= (x_j - x_i)\left(1 + \sum_{k,l\geqslant 1} \alpha_{kl}\left(\frac{x_j^k - x_i^k}{x_j - x_i}\right)\bar{x}_i^l\right) = (x_j - x_i)\phi(x_j, x_i).$$

Ряд $\phi(x_j, x_i)$ обратим, поскольку начинается с единицы. Обозначим через $\psi(x_j, x_i)$ ряд $1/\phi(x_j, x_i)$. Нам достаточно показать, что ряд

$$\sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{s}gn(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{\sigma(i)}^{\mu_i} \prod_{i<j} \psi(x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(i)})$$

делится на $\prod_{i<j}(x_j - x_i)$. Последнее утверждение достаточно проверить для случая, когда число переменных x_i равно двум. Имеем

$$s^h_{(\mu_1,\mu_2)}(x_1, x_2) = \frac{x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2}}{(x_2 - x_1)\phi(x_2, x_1)} + \frac{x_2^{\mu_1} x_1^{\mu_2}}{(x_1 - x_2)\phi(x_1, x_2)}.$$

Откуда

$$(x_2 - x_1)s^h_{(\mu_1,\mu_2)}(x_1, x_2) = \frac{x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2}}{\phi(x_2, x_1)} - \frac{x_2^{\mu_1} x_1^{\mu_2}}{\phi(x_1, x_2)}.$$

Поскольку при $x_1 = x_2$ правая часть последнего равенства равна 0, то она делится на $(x_1 - x_2)$. Отсюда следует требуемое.

Обозначим через $\Delta^h(x_1, ..., x_n)$ формальный ряд

$$\prod_{i<j} g_h^{-1}(g_h(x_j) - g_h(x_i)).$$

Определение 2.1. *Обобщенным полиномом Шура* с индексом λ в комплексно-ориентируемой теории когомологий $h^*(\cdot)$ называется симметрический формальный ряд

$$s^h_\lambda(x_1, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \frac{\prod_{i=1}^n x_{\sigma(i)}^{\mu_i}}{\Delta^h(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)})}.$$

Замечание 2.1. В теории целочисленных когомологий формальная группа тривиальна. Поэтому обобщенные полиномы Шура в $H^*(\cdot, Z)$ совпадают с обыкновенными полиномами Шура

$$s_\lambda(x_1, ..., x_n) = det(x_j^{\mu_i + n - i})/det(x_j^{n-i}) = s^H_{\lambda+\delta}(x_1, ..., x_n),$$

где $\delta = (n-1, n-2, ..., 0)$.

Пример 2.1. Вычислим обобщенные полиномы Шура в комплексной K-теории. Формальная группа имеет вид

$$f_K(u, v) = u + v + \beta uv,$$

где β – элемент Ботта. Обратным к элементу u в этой формальной группе будет элемент $(-u)(1 + \beta u)^{-1}$. Поэтому

$$s^K_\lambda(x_1, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \frac{\prod_{i=1}^n x_{\sigma(i)}^{\mu_i}}{\Delta^K(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)})} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \frac{\prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)}^{\mu_i}}{\prod_{i<j}(x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(i)})} \prod_{i=1}^{n} (1 + \beta x_{\sigma(i)})^{n-i} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} \beta^k \sum_{\gamma \leqslant \delta; |\gamma| = k} \left(\prod_{i=1}^{n} \binom{n-i}{\gamma_i} \right) s_{\lambda+\gamma}(x_1, ..., x_n),$$

где $\delta = (n-1, n-2, ..., 0)$, а под $\gamma \leqslant \delta$ подразумевается, что $\gamma_i \leqslant n - i$ для всех $i = 1, ..., n$.

Заметим, что поскольку обобщенные полиномы Шура представляют собой симметрические функции кольца $\Lambda^*[[x_1, ..., x_n]]$, они могут быть записаны как ряды от элементарных симметрических многочленов n переменных $x_1, ..., x_n$. Пусть $P^h_\lambda(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ – соответствующие ряды:

$$s^h_\lambda(x_1, ..., x_n) = P^h_\lambda(\sigma_1(x_1, ..., x_n), ..., \sigma_n(x_1, ..., x_n)),$$

где $\sigma_k(x_1, ..., x_n)$ – k-тый элементарный симметрический многочлен от n переменных.

Рассмотрим комплексное n-мерное векторное расслоение η над базой B. Будем обозначать через $s^h_\lambda(\eta)$ характеристический класс расслоения η, равный $P^h_\lambda(c_1(\eta), ..., c_n(\eta))$, где $c_k(\eta)$ – k-тый класс Чженя расслоения η в теории $h^*(\cdot)$.

Пусть F_ω – многообразие комплексных флагов, соответствующее упорядоченному разбиению $\omega = (n_1, ..., n_k)$ числа n. Пусть $F_\omega(\eta)$ – расслоение со слоем F_ω, ассоциированное с расслоением η. Обозначим через p_ω проекцию в этом расслоении, а через $p_{\omega!}$ – гомоморфизм Гизина. Пусть $\eta(n_i)$ – i-тое тавтологическое расслоение над $F_\omega(\eta)$, $i = 1, ..., k$.

Теорема 2.2. *Для любых обобщенных полиномов Шура $s^h_{\lambda_1}$, ...,$s^h_{\lambda_k}$ в комплексно-ориентированной теории когомологий $h^*(\cdot)$ имеет место формула*

$$p_{\omega!} \left(\prod_{i=1}^{k} s^h_{\lambda_i}(\eta(n_i)) \right) = s^h_{\lambda_1 \cup \cdots \cup \lambda_k}(\eta),$$

где под $\cup$ понимается упорядоченное объединение.

Доказательство. Заметим, что флагизация комплексного векторного расслоения может быть получена последовательным выполнением грассманизаций исходного расслоения, а затем возникающих тавтологических расслоений над соответствующими грассманизациями. Поэтому утверждение теоремы достаточно доказать для случая простейшего многообразия флагов – многообразия Грассмана. В силу принципа расщепления можно считать, что база исходного расслоения есть $BT^n = CP^\infty \times \cdots \times CP^\infty$, а исходное расслоение есть декартово произведение $\zeta \cong \eta_1 \times \cdots \times \eta_n$ тавтологических одномерных комплексных векторных расслоений над CP^∞. Обозначим через x_i первый класс Чженя расслоения η_i в теории когомологий $h^*(\cdot)$.

В работе [41] построена минимальная функция Морса на многообразии Грассмана. Она имеет вид

$$f = \mathrm{ReTr}(AX)|_{X \in CG_k^n},$$

где A – диагональная матрица с попарно различными вещественными положительными собственными значениями, а X – оператор отражения относительно соответствующей плоскости. Эта функция инвариантна относительно действия структурной группы T^n расслоения ζ. Поэтому градиентный поток функции f позволяет нам построить векторное поле s на $CG_k^n(\zeta)$, касательное вдоль слоев. Нулями поля s будут сечения расслоения $CG_k^n(\zeta)$:

$$CG_k^k\left(\Pi_{i \in I} \eta_i\right),$$

где I – произвольное подмножество из k различных элементов множества $\{1, ..., n\}$. Поскольку отрицательное подпространство матрицы $\mathrm{Hes}(f)$ в критической точке функции f наделено канонической комплексной структурой [41], то индексы всех нулей векторного поля s равны $+1$. Заметим также, что касательное расслоение вдоль слоев расслоения $CG_k^n(\zeta)$ изоморфно расслоению $\bar\eta(k) \otimes \eta(n-k)$. Применим следствие 1.2 к построенному векторному полю $\mathrm{grad} f$. Так как $h^*(BT^n)$ не содержит делителей нуля, нам достаточно построить такой элемент $\Delta \in h^*(BT^n)$, что $p_k^*(\Delta)$ делится на $\chi(\bar\eta(k) \otimes \eta(n-k))$. Представим $\chi(\bar\eta(k) \otimes \eta(n-k))$ в виде ряда $P(e_1, ..., e_k)$ от образующих Ву расслоения $\eta(k)$. Пусть $e_{k+1}, e_{k+2}, ..., e_n$ - образующие Ву расслоения $\eta(n-k)$. Рассмотрим ряд

$$G(e_1, ..., e_n) = \prod_{\{i_1, ..., i_k\} \subset \{1, ..., n\}} P(e_{i_1}, ..., e_{i_k}).$$

Этот ряд делится на $\chi(\bar\eta(k) \otimes \eta(n-k))$. Поскольку вся совокупность $(e_1, ..., e_n)$ является совокупностью образующих Ву расслоения $p_k^*(\zeta) \cong \eta(k) \oplus \eta(n-k)$, и ряд G симметричен по e_j, то $G(e_1, ..., e_n)$ лежит в

$p_k^*(h^*(BT^n))$ и, следовательно, искомый Δ существует. Поэтому

$$p_{k!}(s^h_{\lambda_1}(\eta(k))s^h_{\lambda_2}(\eta(n-k))) = \sum_{I\subset\{1,\dots,n\},\sharp I=k} \frac{s^h_{\lambda_1}(\prod_{i\in I}\eta_i)s^h_{\lambda_2}(\prod_{j\notin I}\eta_j)}{\prod_{i\in I,j\notin I} f_h(\eta_j,\bar\eta_i)} =$$

$$= \sum_{I\subset\{1,\dots,n\},\sharp I=k} \frac{s^h_{\lambda_1}(x_I)s^h_{\lambda_2}(x_{\bar I})}{\prod_{i\in I,j\notin I} g_h^{-1}(g_h(x_j)-g_h(x_i))} = s^h_{\lambda_1\cup\lambda_2}(\zeta),$$

что завершает доказательство теоремы 2.2.

Замечание 2.2. Теорема 2.2 может быть доказана только с использованием теоремы Атьи-Ботта о неподвижной точке. Однако, приведенное выше доказательство может быть обобщено на широкий класс симметрических пространств, исследованных в [41]. Это позволяет вычислять мультипликативную структуру колец когомологий некоторых однородных пространств, для которых теорема Атьи-Ботта не применима.

Замечание 2.3. В силу замечания 2.1 в теории целочисленных когомологий результат теоремы 2.2 совпадает с аналогичным результатом [28].

3.3. Следы в алгебраических расширениях

В этом параграфе мы докажем две теоремы, в которых вычисляется трансфер Беккера-Готтлиба для различных флагизаций комплексных векторных расслоений. Пусть $\lambda = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ - невозрастающая последовательность неотрицательных целых чисел длины $l(\lambda) = n$, $\lambda(i)$ – число элементов в λ равных i, $i = 0, 1, 2, \dots$ Обозначим через $m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ симметрический полином, равный сумме всевозможных различных мономов вида $\prod_{i=1}^n x_{\sigma(i)}^{\mu_i}$, где $\sigma \in S_n$. Пусть в обозначениях предыдущего параграфа $\tau(p_w)$ – трансфер расслоения $F_w(\eta)$, а $m_\lambda(\eta)$ - характеристический класс расслоения η, соответствующий симметрическому полиному m_λ ($\dim_C \eta = l(\lambda)$).

Теорема 3.1. *В произвольной комплексно-ориентируемой теории когомологий для грассманизации комплексного векторного расслоения имеет место формула*

$$\tau(p_{(k,n-k)})^*(m_{\lambda_1}(\eta(k))m_{\lambda_2}(\eta(n-k))) =$$

$$= \left(\prod_{i=0}^{\infty}\binom{\lambda_1(i)+\lambda_2(i)}{\lambda_1(i)}\right) m_{\lambda_1\cup\lambda_2}(\eta),$$

где $l(\lambda_1) = k$, $l(\lambda_2) = n - k$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 2.2. После применения свойства локализации трансфера для векторного поля $\mathrm{grad} f$, получаем

$$\tau(p_{(k,n-k)})^*(m_{\lambda_1}(\eta(k)) \cdot m_{\lambda_2}(\eta(n-k))) =$$

$$= \sum_{\{i_1,...,i_k\}\subset\{1,2,...,n\}} m_{\lambda_1}(x_{i_1}, ..., x_{i_k}) m_{\lambda_2}(x_{j_1}, ..., x_{j_{n-k}}),$$

где $\{j_1, ..., j_{n-k}\} = \{1, ..., n\} \setminus \{i_1, ..., i_k\}$. Приводя подобные члены в правой части последнего равенства, получаем утверждение теоремы.

Из теоремы 3.1 может быть получена формула для трансфера произвольной флагизации n-мерного комплексного векторного расслоения η. Приведем результат для полной флагизации расслоения $F_{\{11...1\}}(\eta)$.

Теорема 3.2. *Пусть* η_j *–* j*-ое одномерное тавтологическое векторное расслоение над* $F_{\{11...1\}}(\eta)$, *и* $c_1(\eta_j)$ *– его первый класс Чженя. Тогда*

$$\tau(p_{\{11...1\}})^*(c_1^{\mu_1}(\eta_1) \cdots c_1^{\mu_n}(\eta_n)) = \left(\prod_{i=0}^{\infty} \lambda(i)!\right) m_\lambda(\eta).$$

Результаты теорем 3.1 и 3.2 дают явный вид следа оператора умножения на элемент алгебраического расширения кольца когомологий базы комплексного векторного расслоения в важном классе алгебраических расширений, определяемых флагизациями этого векторного расслоения.

Литература

[1] *Adams J. F.*, On the structure and applications of the Steenrod algebra, Comment. math. helv., V.32 (1958), p. 180-214.

[2] *Armstrong P.*, The divisibility of normal Chern numbers, Quart. J. Math., 44:(175), (1993), p. 271-281.

[3] *Атья М.*, Лекции по K-теории, М., "Мир", 1967.

[4] *Атья М., Ботт Р.*, Заметки о теореме Лефшеца о неподвижной точке, Математика, 1966, 10:4, с. 101-139.

[5] *Bakuradze M.*, The transfer and symplectic cobordism, Trans. Amer. Math. Soc., V. 349 (1997), p. 4385-4399.

[6] *Бакурадзе М. Р., Надирадзе Р. Г.*, Когомологические реализации двузначных формальных групп и их приложения, Труды Тбилисского Мат. Ин-та, Т. 94 (1991), с. 12-28.

[7] *Barton J., Rees E.*, On the divisibility of certain Chern numbers II, Quart. J. Math. Oxford (2), 33 (1982), p. 263-265.

[8] *Becker J. C.*, Characteristic classes and K-theory; Lecture Notes in Mathematics 428, Springer-Verlag (1974), p. 132-143.

[9] *Becker J.C., Gottlieb D.H.*, The transfer map and fiber bundles, Topology, 14, N 1 (1975), p. 1-12.

[10] *Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Гельфанд С. И.*, Клетки Шуберта и когомологии пространств G/P, Успехи Математических Наук, Т.28, вып.3 (1973), с. 3-26.

[11] *Bott R.*, Vector fields and characteristic numbers, Michigan Math. J., 14 (1967), p. 231-244.

[12] *Bressler P., Evens S.*, The Shubert calculas, braid relations, and generalized cohomology, Trans. Amer. Math. Soc., V. 317 (1990), p.799-811.

[13] *Bressler P., Evens S.*, Shubert calculus in complex cobordism, Trans. Amer. Math. Soc., V. 331 (1992), p. 799-811.

[14] *Brumfiel G., Madsen I.*, Evaluation of the transfer and the universal surgery classes, Inventiones math., V. 32 (1976), p.133-169.

[15] *Бухштабер В.М.*, Топологические приложения теории двузначных формальных групп, Известия Академии Наук СССР, Серия математическая, Том 42, N 1 (1978), с.130-184.

[16] *Бухштабер В.М.*, Характеристические классы в кобордизмах и топологические приложения теорий однозначных и двузначных формальных групп, Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, Т.10. М.: ВИНИТИ, 1978, с.5-178.

[17] *Бухштабер В. М.*, Трансфер Беккера-Готлиба, Приложение 3 в книге: Снэйт В., Алгебраический кобордизм и K-теория, М., "Мир", 1983.

[18] *Buchstaber V. M., Veselov A. P.*, On a remarkable functional equation in the theory of generalized Dunkl operators and transformations of elliptic genera, Math. Z., V. 223 (1996), p.595-607.

[19] *Ciocan-Fontanine I.*, The quantum cohomology ring of flag varieties, Trans. Amer. Math. Soc., V. 351 (1999), p. 2695-2729.

[20] *Коннер П., Флойд Э.*, Гладкие периодические отображения, М., "Мир", 1969.

[21] *Damon J.*, The Gysin homomorphism for flag bundles, American Journal of Math., V. 95 (1973), p. 643-659.

[22] *Damon J.*, The Gysin homomorphism for flag bundles: applications, American Journal of Math., V. 96 (1974), p. 248-260.

[23] *Dold A.*, The fixed point index of fibre-preserving maps, Inventiones Math. 25 (1974), p.281-297.

[24] *Feshbach M.*, The transfer and compact Lie groups, Trans. of the Am. Math. Soc., V. 251 (1979), p.139-169.

[25] *Фултон В.*, Теория пересечений, М., "Мир", 1989.

[26] *Givental A., Kim B.*, Quantum cohomology of flag manifolds and Toda lattices, Comm. Math. Phys., V. 168 (1995), p. 609-641.

[27] *Голубятников В.П.*, О кольцах бордизмов с расщепленными нормальными пучками, Сиб. Мат. Журнал, Т. 30, N 5 (1989), с. 42-48.

[28] *Jozefiak T., Lascoux A., Pragacz P.*, Классы детерминантных многообразий, ассоциированных с симметрической и кососимметрической матрицами, Известия АН СССР, Серия математическая, Т. 45, N 3 (1981), с. 662-674.

[29] *Кричевер И. М.*, Формальные группы и неподвижные подмногообразия действий компактных групп Ли. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, М., МГУ, 1974.

[30] *Macdonald I.G.*, Symmetric functions and Hall polinomials, 2nd edition, Oxford University Press, 1995.

[31] *Маклейн С.*, Гомология, М., "Мир", 1966.

[32] *Милнор Дж., Сташеф Дж.*, Характеристические классы, М., "Мир", 1979.

[33] *Милнор Дж., Уоллес А.*, Дифференциальная топология. Начальный курс, М., "Мир", 1972.

[34] *Новиков С.П.*, Алгебраическая топология с точки зрения теории кобордизмов, Известия АН СССР, Серия математическая, Т.31, N 4, (1967), с. 855-951.

[35] *Панов Т. Е.*, Вычисление родов Хирцебруха многообразий, несущих действие группы Z_p, через инварианты действия, Известия РАН, Серия математическая, Т. 62, N 3 (1998), с. 87-120.

[36] *Постников М. М.*, Введение в теорию Морса, М., "Наука", 1971.

[37] *Rees E., Thomas E.*, On the divisibility of certain Chern numbers, Quart. J. Math. Oxford (2), V. 28 (1977), p. 389-401.

[38] *Quillen D.*, On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory, Bull. of the AMS, V. 75, N 6 (1969), p. 1293-1299.

[39] *Снэйт В.*, Алгебраический кобордизм и K-теория, М., "Мир", 1983.

[40] *Verona A.*, Triangulation of stratified fibre bundles, Manu. Math., V. 30 (1979/80), p. 425-445.

[41] *Веселов А.П., Дынников И.А.*, Интегрируемые градиентные потоки и теория Морса, Алгебра и Анализ, Т.8, вып. 3 (1996), с. 78-103.

[42] *Уайтхед Дж.*, Новейшие достижения в теории гомотопий, М., "Мир", 1974.

[43] *Witten E.*, Suppersymmetry and Morse theory, J. Differential Geometry, 17 (1982), p. 661-692.

[44] *Бухштабер В.М., Фельдман К.Э.*, Формула сложения для первого полуцелого класса Понтрягина в комплексных кобордизмах, Успехи Математических Наук, Т.52, вып. 6 (1997), с.151-152.

[45] *Feldman K. E.*, An equivariant analog of the Poincare-Hopf theorem, Proceedings of the International conference dedicated to the 80th anniversary of V. A. Rokhlin, St. Petersburg (1999), p. 26-27.

[46] *Фельдман К. Э.*, Новое доказательство гипотезы Фробениуса о размерностях вещественных алгебр без делителей нуля, Вестник московского университета, Серия 1, Математика, Механика, N 1 (2000), с. 61-63.

[47] *Бухштабер В.М., Фельдман К.Э.*, Индекс эквивариантного векторного поля и теоремы сложения для характеристических классов Понтрягина, Известия РАН, Серия математическая, Т.64, N 2 (2000), с. 3-28.

[48] *Фельдман К. Э.*, Эквивариантный аналог теоремы Пуанкаре-Хопфа, Записки научных семинаров ПОМИ, Т. 267 (2000), с. 160-174.